



MECÁNICA RACIONAL



SEGUNDA PARTE

DE LOS SISTEMAS MATERIALES

(Continuación)

CAPÍTULO XIII

DETERMINACION DE LOS MOMENTOS DE INERCIA

Por definicion, el momentó de inercia de un cuerpo respecto de un eje es la suma de los productos de la masa de cada punto del cuerpo por el cuadrado de su distancia al eje.

Se ha establecido mas arriba (cap. VI) que, a un cuerpo dado, corresponde en cada punto O del espacio un elipsoide de inercia determinado: éste tiene la propiedad que el inverso del cuadrado de cada radio vector es el momento de inercia del cuerpo respecto al radio vector considerado.

Se ha establecido tambien que el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje cualquiera es igual al momento de inercia del mismo cuerpo, respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de gravedad, mas el producto de la masa total del cuerpo por el cuadrado de la distancia de los dos ejes.

Se comprende así que, en cada caso particular, bastará conocer el elipsoide de inercia de un cuerpo en el centro de gravedad, para poder en seguida determinar el momento de inercia del cuerpo, respecto a un eje cualquiera.

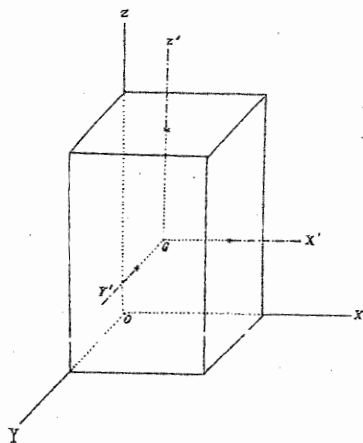
El elipsoide de inercia en el centro de gravedad será determinado si se conocen los tres momentos de inercia respecto a los ejes principales del centro de gravedad o simplemente los momentos de inercia respecto de tres ejes cualesquiera, paralelos a los primeros, puesto que de estos últimos se pueden deducir fácilmente los primeros.

Paralelepípedo recto e homogéneo

Sean a, b, c las longitudes de las tres aristas dirigidas según OX, OY, OZ (fig. 50). Busquemos el momento de inercia I_x del paralelepípedo respecto al eje OX , tendremos

$$I_x = \Sigma m(y^2 + z^2) = \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz$$

Fig. 51



Sumaremos primero los elementos situados en un prisma paralelo a OX i tendremos

$$\begin{aligned} I_x &= \rho \iint (y^2 + z^2) dy dz \int_0^a dx \\ &= \rho a \iint (y^2 + z^2) dy dz \end{aligned}$$

Sumaremos ahora todos los prismas análogos comprendidos entre z i $z + dz$, entonces

$$I_x = \rho a \int dz \int_0^b (y^2 + z^2) dy = \rho a \int dz \left(\frac{b^3}{3} + bz^2 \right)$$

Finalmente, haremos variar z entre 0 i c , entonces

$$I_x = \rho a \left(c \frac{b^3}{3} + b \frac{c^3}{3} \right) = \rho abc \frac{b^2 + c^2}{3}$$

Sea M la masa total del paralelepípedo, tendremos

$$M = \rho abc$$

Luego

$$I_x = M \frac{b^2 + c^2}{3}$$

Del mismo modo

$$I_y = M \frac{c^2 + a^2}{3}$$

$$I_z = M \frac{a^2 + b^2}{3}$$

Tracemos, por el centro de gravedad G , tres ejes paralelos a las aristas, estos serán, en este punto, los ejes principales de inercia; sean A, B, C los tres momentos principales, tendremos

$$A = I_x - M \frac{b^2 + c^2}{4} = M \frac{b^2 + c^2}{12}$$

I, del mismo modo,

$$B = M \frac{c^2 + a^2}{12}$$

$$C = M \frac{a^2 + b^2}{12}$$

Con estos datos se puede calcular el momento de inercia I respecto de un eje cualquiera; sea, por ejemplo, un eje situado a una distancia Δ del centro de gravedad i sean α, β, γ sus cosenos directores, respecto de los tres ejes principales se tendrá

$$I = M \Delta^2 + \frac{M}{12} \left[\alpha^2 (b^2 + c^2) + \beta^2 (c^2 + a^2) + \gamma^2 (a^2 + b^2) \right]$$

Esfera

Consideremos tres ejes rectangulares, cuyo origen sea el centro de la esfera, estos ejes serán siempre principales de inercia i los tres momentos principales son evidentemente iguales; sea I su valor comun, tendremos

$$I = \sum m (y^2 + z^2) = \sum m (z^2 + x^2) = \sum m (x^2 + y^2)$$

Luego

$$3 I = 2 \sum m (x^2 + y^2 + z^2)$$

Designemos por r la distancia de un punto al centro de la esfera i consideremos la porcion comprendida entre dos esferas de radios r i $r + dr$; la masa de esta porcion será

$$4\pi\rho r^2 dr$$

Luego, para esta porcion de esfera, tenemos

$$\sum m (x^2 + y^2 + z^2) = 4\pi\rho r^4 dr$$

Sea R el radio de la esfera, tendremos

$$3 I = 2 \int_0^R 4\pi\rho r^4 dr = 8\pi\rho \frac{R^5}{5}$$

Luego

$$I = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

Sea tambien M la masa total, se tiene

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$$

Luego

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

NOTA.—El valor obtenido para I permite escribir

$$\rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

Como los tres integrales

$$\iiint x^2 dx dy dz, \iiint y^2 dx dy dz, \iiint z^2 dx dy dz$$

son evidentemente iguales en el caso de la esfera, su valor común será

$$\frac{4}{15} \pi R^5$$

Elipsoide

Sea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la ecuación del elipsoide, I_x su momento de inercia respecto de OX , se tiene

$$I_x = \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz$$

Hagamos

$$x = ax'$$

$$y = by'$$

$$z = cz'$$

Tendremos

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

Y también

$$I_x = \rho a b c \iiint (b^2 y'^2 + c^2 z'^2) dx' dy' dz'$$

Las coordenadas $x' y' z'$ que figuran bajo el signo de integración varían entre los límites correspondientes a una esfera de radio uno, tenemos por consiguiente, según la nota anterior

$$\iiint y'^2 dx' dy' dz' = \iiint z'^2 dx' dy' dz' = \frac{4}{15} \pi$$

Por consiguiente

$$I_x = \frac{4}{15} \pi \rho a b c (b^2 + c^2)$$

La masa total del elipsoide es

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho a b c$$

Luego

$$I_x = M \frac{b^2 + c^2}{5}$$

Del mismo modo

$$I_y = M \frac{c^2 + a^2}{5}$$

$$I_z = M \frac{a^2 + b^2}{5}$$

Cilindro recto

Supongamos el eje OZ paralelo a los generatrices del cilindro; sean Ω el área de la base, h la altura y ρ la densidad constante, se tendrá

$$I_x = \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho h \iint (y^2 + \frac{h^2}{3}) dx dy$$

$$I_y = \rho \iiint (z^2 + x^2) dx dy dz = \rho h \iint (x^2 + \frac{h^2}{3}) dx dy$$

$$I_z = \rho \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho h \iint (x^2 + y^2) dx dy$$

Sea $d\omega$ el área elemental $dx dy$; la masa total del cilindro es

$$M = \Omega \rho h$$

Luego

$$I_x = \frac{M}{\Omega} \Sigma y^2 d\omega + M \frac{h^2}{3}$$

$$I_y = \frac{M}{\Omega} \Sigma x^2 d\omega + M \frac{h^2}{3}$$

$$I_z = \frac{M}{\Omega} \Sigma (x^2 + y^2) d\omega$$

Supongamos que la masa total del cilindro se condense uni-

formemente sobre la base, de tal manera que h tienda hacia cero; en el límite se tendrá simplemente

$$(1) \quad \begin{cases} I_x = \frac{M}{\Omega} \Sigma y^2 d\omega \\ I_y = \frac{M}{\Omega} \Sigma x^2 d\omega \\ I_z = \frac{M}{\Omega} \Sigma (x^2 + y^2) d\omega = I_x + I_y \end{cases}$$

Los momentos de inercia son ahora los de una sección plana material.

MOMENTOS DE INERCIA DE LAS ÁREAS PLANAS

Por definición, el momento de inercia de una área plana, respecto a un eje, es la suma de los productos de cada elemento de área por el cuadrado de su distancia al eje. Es una definición puramente geométrica; sin embargo, si se supone que, en todos los puntos del área, se ha condensado uniformemente cierta cantidad de materia, de tal manera que la unidad de área tenga una masa igual a la unidad, el momento de inercia, definido mas arriba, es precisamente el momento de inercia de la materia concentrada sobre la área.

Según esta definición, si $d\omega$ es un elemento de área en un punto M del plano i r la distancia de M a cierto eje, el momento de inercia I del área respecto al eje es:

$$I = \Sigma r^2 d\omega$$

Consideremos tres ejes rectangulares i supongamos que XOY sea el plano del área; sean I_x , I_y , I_z los momentos de inercia respecto de los tres ejes, se tendrá por definición:

$$I_x = \Sigma y^2 d\omega$$

$$I_y = \Sigma x^2 d\omega$$

$$I_z = \Sigma (x^2 + y^2) d\omega = I_x + I_y$$

Estas son precisamente las fórmulas (1) en las cuales la razón $\frac{M}{\Omega}$ es igual a uno.

El momento de inercia I_z no cambia evidentemente cuando los ejes OX i OY cambian de orientacion en su plano, luego la suma de los momentos de inercia de una área plana respecto a dos ejes rectangulares cualesquiera, situados en su plano, i que pasan por un mismo punto, es constante. Esta propiedad se establecerá directamente mas adelante.

VARIACION DEL MOMENTO DE INERCIA CON LA POSICION DEL EJE

Aunque la lei de esta variacion puede deducirse de la teoría jeneral del capítulo VI, la estableceremos aquí directamente. Supondremos que los ejes considerados están situados en el plano del área.

Resolveremos en primer lugar el problema siguiente:

Conociendo el momento de inercia de una área, respecto a un eje que pasa por su centro de gravedad, determinar su momento de inercia respecto a un eje paralelo.

Sea OX un eje que pasa por el centro de gravedad, y la ordenada de un elemento $d\omega$; $O'X'$ un eje paralelo a OX , b su distancia a OX i la distancia de $d\omega$ a $O'X'$, se tiene

$$y' = y - b$$

Luego, si Ω es el área total

$$\Sigma y'^2 d\omega = \Sigma y^2 d\omega + b^2 \Omega - 2b \Sigma y d\omega$$

El último término del segundo miembro es nulo, porque OX pasa por hipótesis por el centro de gravedad del área, luego

$$\Sigma y'^2 d\omega = \Sigma y^2 d\omega + b^2 \Omega$$

ELIPSE DE INERCIA

Sea O un punto cualquiera del plano de la área; OX , OY dos ejes rectangulares i OP otro eje que hace con OX un ángulo θ ; consideremos un elemento de área $d\omega$; sean x, y sus coordenadas i r su distancia a OP , se tiene

$$r = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Luego

$$r^2 = y^2 \cos^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta + x^2 \sin^2 \theta$$

Y tambien

$$\Sigma r^2 d\omega = \cos^2 \theta \Sigma y^2 d\omega - 2 \sin \theta \cos \theta \Sigma xy d\omega + \sin^2 \theta \Sigma x^2 d\omega$$

El primer miembro es el momento de inercia del área respecto a OP , lo representaremos por I ; hagamos tambien

$$(2) \begin{cases} \Sigma y^2 d\omega = A \\ \Sigma xy d\omega = B \\ \Sigma x^2 d\omega = C \end{cases}$$

Tendremos

$$(3) I = A \cos^2 \theta - 2B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta$$

Sea OP' un eje perpendicular a OP e I' el momento de inercia del área respecto a OP' . Se tendrá segun (3) i reemplazando θ por $\theta + 90^\circ$:

$$I' = A \sin^2 \theta + 2B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta$$

Luego

$$I + I' = A + C$$

Es la propiedad establecida mas arriba: la suma de los momentos de inercia del área, respecto a dos ejes rectangulares cualesquiera que pasan por el punto O , es constante.

Tomenos ahora sobre OP un punto N tal que

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I}}$$

Sean X, Y las coordenadas de N se tendrá segun (3)

$$(4) 1 = AX^2 - 2BXY + CY^2$$

Es la ecuacion de una cónica, referida a su centro; como el momento de inercia I no puede ser igual a cero, ON no puede ser infinito, luego todos los puntos de la cónica están a distancia finita de O ; en resumen esta cónica es una elipse. Esta se llama *elipse de inercia* en el punto O .

Cuando el punto O es el centro de gravedad del área, la elipse de inercia se llama *elipse central de inercia*.

Si los ejes OX , OY son los ejes principales de la elipse, el término en XY de la ecuación (4) debe desaparecer, luego se debe tener entonces

$$B = \Sigma xy d\omega = 0$$

En este caso, la elipse de inercia tiene por ecuación

$$AX^2 + CY^2 = I$$

i el momento de inercia I del área respecto a un eje OP que hace un ángulo θ con OX , es

$$I = A \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta$$

Si el punto O es el centro de gravedad del área $e n'$ i si EF es un eje paralelo a OP , situado a la distancia Δ de O , el momento de inercia del área respecto a EF es

$$\Sigma r^2 d\omega = \Omega \Delta^2 + A \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta$$

Los ejes principales de inercia del centro de gravedad se llaman también ejes centrales de inercia.

Forma de la elipse de inercia en los diferentes puntos del plano

Supongamos que el punto O sea el centro de gravedad del área; OX , OY los ejes centrales de inercia, la elipse central tendrá por ecuación

$$AX^2 + CY^2 = I$$

Sean a i b las coordenadas de otro punto O' del plano; $O'X'$, $O'Y'$ dos ejes paralelos a los primeros; la elipse de inercia del área en el punto O' tendrá una ecuación de la forma

$$A' X'^2 - 2 B' X' Y' + C' Y'^2 = I$$

Se tiene ahora

$$A' = A + b^2 \cdot \Omega$$

$$C' = C + a^2 \Omega$$

$$B' = \Omega x' y' d\omega = \Sigma (x-a) (y-b) d\omega$$

O bien

$$B' = \Sigma x y d\omega - a \Sigma y d\omega - b \Sigma x d\omega + ab \Omega$$

El primer término del segundo miembro es nulo porque OX i OY son direcciones principales en O , los dos términos siguientes son nulos porque O es el centro de gravedad, luego

$$B' = ab \Omega$$

Se ve que B' será nulo si una de las dos coordenadas a o b es nula, es decir, si el punto O' está situado sobre uno cualquiera de los ejes OX o OY ; luego los únicos puntos del plano en los cuales las direcciones principales de inercia son paralelas a las del centro de gravedad son los puntos situados sobre los dos ejes centrales de inercia.

En varios casos, la dirección de los ejes centrales es conocida; por ejemplo, si la figura plana tiene un eje de simetría, este es un eje central en todos los puntos situados sobre este eje; en efecto, si el eje OY es un eje de simetría de la figura, se tiene evidentemente

$$\Sigma x y d\omega = 0$$

Luego

$$B = 0$$

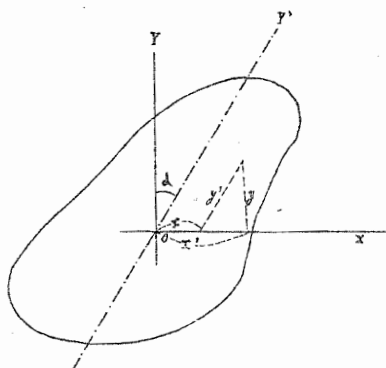
Propiedad de los diámetros

Sea una área plana i OY' un diámetro conjugado de las cuerdas paralelas a OX ; si los puntos del área se refieren a los dos ejes oblicuos OX i OY' , i si $x' y'$ son las coordenadas oblicuas de un elemento $d\omega$ se tiene evidentemente

$$(5) \quad \Sigma x' y' d\omega = 0$$

Sean x, y las coordenadas rectangulares del mismo elemento respecto a OX i OY i α el ángulo YOY' , se tiene

Fig. 52



$$x' = x - y \operatorname{tg} \alpha$$

$$y' = y \sec \alpha$$

Luego

$$\begin{aligned} \Sigma x' y' d\omega &= \\ \sec \alpha \Sigma xy d\omega - \\ \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha \Sigma y^2 d\omega \\ \text{O bien segun (5)} \end{aligned}$$

$$(6) \quad \Sigma xy d\omega - \operatorname{tg} \alpha \Sigma y^2 d\omega = 0$$

Sea ahora

$$A X^2 - 2 B X Y + C Y^2 = I$$

la ecuación, respecto de los ejes rectangulares de la elipse de inercia en el punto O , la relación (5) es equivalente a la siguiente

$$B - A \operatorname{tg} \alpha = 0$$

Esta relación expresa que, en la elipse de inercia del punto O , OY' es un diámetro conjugado de las cuerdas paralelas a OX .

La misma propiedad se aplica a todos los puntos del diámetro OY' i en particular al centro de gravedad, situado evidentemente sobre este diámetro.

APLICACIONES

Rectángulo.

Sean a i b los dos lados del rectángulo dirigidos segun OX i OY ; busquemos en primer lugar los momentos de inercia respecto de OX i OY ; se tendrá

$$I_x = \Sigma y^2 d\omega = \iint y^2 dx dy$$

I, aplicando la regla jeneral de integracion

$$I_x = \int y^2 dy \int_0^a dx = a \int_0^b y^2 dy = a \frac{b^3}{3}$$

Del mismo modo

$$I_y = b \frac{a^3}{3}$$

El área total del rectángulo es

$$\Omega = ab$$

Luego

$$I_x = \Omega \frac{b^2}{3}$$

$$I_y = \Omega \frac{a^2}{3}$$

Consideremos ahora dos ejes GX' , GY' paralelos a los primeros i que pasan por el centro de gravedad G ; sean A i B los momentos de inercia correspondientes, estos son evidentemente los momentos de inercia principales, se tendrá

$$A = I_x - \Omega \frac{b^2}{4} = \Omega \frac{b^2}{12}$$

$$B = I_y - \Omega \frac{a^2}{4} = \Omega \frac{a^2}{12}$$

Luego la elipse central de inercia, tiene por ecuacion

$$\frac{\Omega}{12}(b^2 X^2 + a^2 Y^2) = 1$$

Sus ejes son precisamente proporcionales a los lados correspondientes del rectángulo, luego la elipse es semejante de otra inscrita en el rectángulo.

El momento de inercia I del rectángulo respecto de un eje,

situado a la distancia Δ del centro de gravedad en una dirección tal que su ángulo con GX' es θ , es

$$I = \Omega \Delta^2 + \frac{\Omega}{12} (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)$$

Círculo

Consideremos dos ejes rectangulares OX , OY cuyo origen esté en el centro del círculo; los dos momentos de inercia son evidentemente iguales i su valor comun es la mitad del momento de inercia respecto del eje OZ perpendicular al plano del círculo.

En resumen sea I el momento de inercia de un círculo respecto a uno de sus diámetros, r la distancia de uno de los elementos al centro, se tiene

$$2I = \sum r^2 d\omega$$

Consideremos los puntos del círculo comprendidos entre dos circunferencias de radios r i $r + dr$, el área de esta corona es

$$d\omega = 2\pi r dr$$

Luego, si R es el radio del círculo, se tendrá

$$2I = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{R^4}{4}$$

$$(7) \quad I = \pi \frac{R^4}{4}$$

El área Ω del círculo es

$$\Omega = \pi R^2$$

Luego

$$I = \Omega \frac{R^2}{4}$$

Elipse

Sea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la ecuación de la elipse, referida a su centro, el momento de inercia respecto del eje OX será

$$I_x = \iint y^2 dx dy$$

Hagamos todavía

$$x = ax'$$

$$y = by'$$

Tendremos

$$I_x = ab^3 \iint y'^2 dx' dy'$$

Como

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

la integral doble representa el momento de inercia de un círculo de radio uno respecto de uno de sus diámetros, luego su valor es según (7) igual a $\frac{\pi}{4}$ i se tiene

$$I_x = \frac{\pi}{4} ab^3$$

El área total es

$$\Omega = \pi ab$$

Luego

$$I_x = \Omega \frac{b^2}{4}$$

Se obtendría de la misma manera

$$I_y = \Omega \frac{a^2}{4}$$

La elipse de inercia tiene por ecuacion

$$\frac{\Omega}{4}(b^2 X^2 + a^2 Y^2) = 1$$

Se vé que esta elipse es semejante a la elipse propuesta

Paralelogramo

Sean a i b los dos lados del paralelogramo i θ el ángulo que hacen entre ellos; el momento de inercia del paralelogramo respecto del lado a será evidentemente el mismo que el momento de inercia de un rectángulo de altura $b \text{ sen } \theta$, luego podemos escribir

$$I_a = \Omega \frac{b^2 \text{ sen}^2 \theta}{3}$$

I_b del mismo modo

$$I_b = \Omega \frac{a^2 \text{ sen}^2 \theta}{3}$$

El centro de gravedad del paralelograma es su centro de figura, consideremos en este punto dos ejes OX , OY paralelos a los lados a i b ; como estos ejes son diámetros del paralelograma, la elipse central tendrá dos diámetros conjugados dirigidos segun OX , OY ; los momentos de inercia correspondientes serán, como en el caso del rectángulo,

$$I_x = \Omega \frac{b^2 \text{ sen}^2 \theta}{12}$$

$$I_y = \Omega \frac{a^2 \text{ sen}^2 \theta}{12}$$

Luego la elipse central, referida a los dos ejes oblicuos OX , OY tendrá por ecuacion

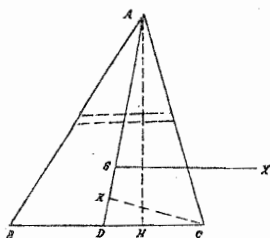
$$\frac{\Omega \text{ sen}^2 \theta}{12} (b^2 X^2 + a^2 Y^2) = 1$$

Esta elipse es semejante de otra elipse inscrita en el paralelogramo

Triángulo

Busquemos, en primer lugar, el momento de inercia respecto de un lado. Sea (fig. 53) el triángulo ABC , a la longitud del lado BC i h la altura correspondiente AH ; consideremos un elemento de área comprendida entre dos paralelas a BC , sea a' la base de este trapecio infinitamente pequeño, x su distancia a BC i dx su altura; I_a el momento de inercia buscado, se tendrá

Fig. 53



$$I_a = \int_0^h a' x^2 dx$$

Pero

$$\frac{a'}{a} = \frac{h-x}{h}$$

Luego

$$I_a = a \int_0^h \frac{h-x}{h} x^2 dx = a \int_0^h x^2 dx - \frac{a}{h} \int_0^h x^3 dx$$

O bien

$$I_a = a \frac{h^3}{3} - \frac{a}{h} \frac{h^4}{4} = \frac{a h^3}{12}$$

Finalmente, si Ω es el área del triángulo

$$(8) \quad I_a = \Omega \frac{h^2}{6}$$

Tracemos por el centro de gravedad una paralela GX a BC

i sea I_x el momento de inercia del triángulo respecto a GX , se tendrá

$$I_x = \Omega \frac{h^2}{6} - \Omega \left(\frac{h}{3} \right)^2 = \Omega \frac{h^2}{18}$$

La mediana AD es un diámetro, luego las direcciones GX i GA seran las de dos diámetros conjugados de la elipse central; sea I_y el momento de inercia del triángulo respecto a GA i $CK=K$ la altura del triángulo ACD ; el momento de inercia de ABC sera igual a dos veces el momento de inercia de ACD , luego tendremos segun (8)

$$I_y = 2 \frac{\Omega}{2} \frac{k^2}{6} = \Omega \frac{k^2}{6}$$

Si el triángulo es isóceles, K es igual a $\frac{a}{2}$; sea b el otro lado del triángulo, se tendrá tambien

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$$

Luego los dos momentos de inercia dirijidos segun GX i GA son entonces

$$I_x = \frac{\Omega}{18} \left(\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4} \right)$$

$$I_y = \Omega \frac{a^2}{24}$$

Las dos direcciones GX i GA son entonces perpendiculares i son los ejes centrales del triángulo.

Si el triángulo es equilátero, se tiene $b=a$, luego

$$I_x = \Omega \frac{a^2}{24}$$

$$I_y = \Omega \frac{a^2}{24}$$

(Continuará)

ALBERTO OEBRECHT

