NUEVA RESOLVENTE

DE LA

ECUACION DEL 4.° GRADO

Por ENRIQUE CRUCHAGA,
(Bachiller en Matemáticas)

NUEVA RESOLVENTE

DE LA

ECUACION DEL 4.° GRADO

Por ENRIQUE CRUCHAGA,
(Bachiller en Matemáticas)

Debido a que es preciso correjir algunas pequeñas omisiones que involuntariamente se deslizaron en el número anterior, me permito repetir la esposición de mi nuevo método de solución de la ecuación jeneral del cuarto grado.

Sea la ecuación:

$$1)\quad x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

Llamemos

$$2)\quad \begin{array}{ll} Z_1 = x_1 + x_2 & Z_4 = x_2 + x_3 \\ Z_2 = x_1 + x_3 & Z_5 = x_2 + x_4 \\ Z_3 = x_1 + x_4 & Z_6 = x_3 + x_4 \end{array}$$

Nuestra resolvente podrá escribirse así:

$$3)\quad Z^6 - AZ^5 + BZ^4 - CZ^3 + DZ^2 - EZ + F = 0$$

Determinando sus coeficientes, encuentro:

$$4)\quad \begin{array}{ll} A = 3a & D = 2a^2b + b^2 + ac - 4d \\ B = 2b + 3a^2 & E = ab^2 + a^2c - 4ad \\ C = 4ab + a^3 & F = a^2d + c^2 - abc \end{array}$$

Reparemos que, si a fuese igual a cero, desaparecerían los coeficientes de las potencias impares de Z i la resolvente sería por tanto bicúbica. Haciendo, pues

$$5)\quad y = x - \frac{a}{4} \quad \text{tendremos,}$$

$$6)\quad y^4 + \left(b - \frac{3}{8}a^2\right)y^2 \pm \left(c + \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2}\right)y + \frac{a^2b}{16} + d - \frac{3}{256}a^4 - \frac{ac}{4} = 0$$

Para esta ecuación transformada encuentro una nueva resolvente, la que sigue:

$$7)\quad U^6 + \left[2b - \frac{3}{4}a^2\right]U^4 + \left[\frac{3}{16}a^4 + b^2 + ac - a^2b - 4d\right]U^2 + \left[c + \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2}\right]^2 = 0$$

ecuación que puede resolverse como una del 3.^er^ grado, haciendo

$$8) \quad U^2 = V$$

Pongamos que:

$$9) \quad \begin{array}{lll} U_1 = y_1 + y_2 & U_3 = y_1 + y_4 & U_5 = y_2 + y_4 \\ U_2 = y_1 + y_3 & U_4 = y_2 + y_3 & U_6 = y_3 + y_4 \end{array}$$

Tendremos que:

$$10) \quad \begin{array}{l} U_1 + U_2 + U_3 = 2y_1 \\ U_1 + U_4 + U_5 = 2y_2 \\ U_2 + U_4 + U_6 = 2y_3 \\ U_3 + U_5 + U_6 = 2y_4 \end{array}$$

Hemos combinado los índices de este modo:

$$\text{I.} \quad \begin{array}{l} 1-2-3 \\ 1-4-5 \\ 2-4-6 \\ 3-5-6 \end{array}$$

en tal forma de evitar las agrupaciones siguientes de ellos:

$$\text{II.} \quad \begin{array}{l} 1-6 \\ 2-5 \\ 3-4 \end{array}$$

o sean las que suman cero, a saber:

$$U_1+U_6=0$$
$$U_2+U_5=0$$
$$U_3+U_4=0$$

Las otras combinaciones posibles, esceptuando las agrupaciones apuntadas, o sean

$$\text{III.}\quad \begin{matrix} 1-2-4 \\ 1-3-5 \\ 2-3-6 \\ 4-5-6 \end{matrix}$$

representarán los índices de las siguientes acuaciones

$$11)\quad \begin{aligned} U_4+U_5+U_6&=-2y_1 \\ U_2+U_3+U_6&=-2y_2 \\ U_1+U_3+U_5&=-2y_3 \\ U_1+U_2+U_4&=-2y_4 \end{aligned}$$

dualidad que corresponde al doble signo del coeficiente de y en la ecuación 6).

Así es que, cualesquiera de las agrupaciones I o III que ensayemos, obtendremos inmediatamente uno de los valores absolutos de y, restándonos sólo ver que su signo sea el que le corresponde, para poder escribir en seguida sus cuatro valores. Simultáneamente se obtienen los valores de x de la ecuación

$$x = y + \frac{a}{4}$$

Enrique Cruchaga Ossa.

N. B.—Se puede consultar con provecho a Job, Beitrag zur, Auflösung der Gleichungen, Dresden 1864.