



REGLAS FUNDAMENTALES DE DIFERENCIACION

POR

CARLOS WARGNY

(Continuacion)

24. Ejercicios difíciles.

171. $y = \frac{a+bx}{c}$ (EDWARDS, 51).

Esta es una función racional entera; hacemos

$$ax+b=u, \quad y = \frac{u}{c} \therefore d\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c} du = \frac{b}{c} x.$$

Mentalmente, $d \frac{a+bx}{c} = \frac{1}{c} d(a+bx) = \frac{b}{c} x.$

172. $y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m$ (CATALÁN, 121).

Suma de funciones; se diferencia cada término:

$$dy = (A_0 m x^{m-1} + A_1 (m-1) x^{m-2} + \dots + A_{m-1}) dx$$

173. $y = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \dots$

Suma de funciones:

$$dy = (Amx^{m-1} + Bnx^{n-1} + Cpx^{p-1} + \dots) dx$$

174. $y = ax^3 + b^2 x^2 + c^4 \sqrt{x}$ (BOUCHARLAT, 11)

Suma de funciones.

$$dy = \left(3ax^2 + 2b^2 x + c^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$$

175. $y = a + b\sqrt[3]{x^2} - \frac{c}{2\sqrt{x}}$ (LAURENT, 19)

Suma de funciones que se escribe así:

$$d \left(a + bx^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} cx^{-\frac{1}{2}} \right) = \left(\frac{2}{3} bx^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} cx^{-\frac{3}{2}} \right) dx$$

$$= \left(\frac{2b}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{c}{4x\sqrt{x}} \right) dx$$

176. $y = (1 + x^m)^n + (1 + x^n)^m$ (RICE-JOHNSON, 34)

Suma de funciones.

$$dy = mn [x^{m-1} (1 + x^m)^{n-1} + x^{m-1} (1 + x^n)^{m+1}] dx$$

177. $y = (a + x^2)^3 (b + x^3)^2$ (CARR, 262)

Producto de funciones. Aplicamos logaritmos:

$$Ly = 3 L(a + x^2) + 2 L(b + x^3)$$

$$\frac{dy}{y} = 3 \frac{d(a + x^2)}{a + x^2} + 2 \frac{d(b + x^3)}{b + x^3} = \left[\frac{6x}{a + x^2} + \frac{6x^2}{b + x^3} \right] dx$$

$$dy = (a + x^2)^3 (b + x^3)^2 \frac{6bx + 6x^4 + 6ax^2 + 6x^4}{(a + x^2)(b + x^3)} dx$$

$$= 6(a + x^2)^2 (b + x^3) (2x^4 + ax^2 + bx) dx$$

$$= 6x(a + x^2)^2 (b + x^3) (b + ax + 2x^2) dx$$

178. $y = (x^3 - 3x - 5)^2 (x^2 + 2x - 1)^3$ (CATALÁN, 122).

Producto de funciones. Se aplican L:

$$Ly = 2L(x^3 - 3x - 5) + 3L(x^2 + 2x - 1)$$

$$\frac{dy}{y} = \left[2 \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x - 5} + 3 \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 1} \right] dx$$

$$dy = 6(x^3 - 3x - 5)(x^2 + 2x - 1)^2(x + 1) \left[\frac{x^3 - 3x - 5 + (x^2 + 2x - 1)(x - 1)}{(x - 1)} \right] dx.$$

$$179. u = (a + bx)^m (c + fx)^n (g + hx)^p. \text{ (LARDNER, 21).}$$

Producto de funciones:

$$Lu = mL(a + bx) + nL(c + fx) + pL(g + hx)$$

$$\frac{du}{u} = \left[m \frac{b}{a + bx} + n \frac{f}{c + fx} + p \frac{h}{g + hx} \right] dx$$

$$du = (a + bx)^m \cdot (c + fx)^n \cdot (g + hx)^p$$

$$\times \left(\frac{mb}{a + bx} + \frac{nf}{c + fx} + \frac{ph}{g + hx} \right) dx$$

$$180. y = x^2 (a^2 + x^2) \sqrt{a^2 - x^2} \text{ (STURM, 41).}$$

Producto de funciones. Se aplican L:

$$Ly = 2Lx + L(a^2 + x^2) + \frac{1}{2}L(a^2 - x^2)$$

$$\frac{dy}{y} = \left[\frac{2}{x} + \frac{2x}{a^2+x^2} + \frac{1}{2} \frac{-2x}{a^2-x^2} \right] dx$$

$$dy = x \frac{2a^4 + a^2x^2 - 5x^4}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$181. y = \frac{a+x}{a-x} \cdot \frac{b+x}{b-x} \quad (\text{BAILY-LUND, 18}).$$

Cuociente de funciones. Se aplican L:

$$Ly = L(a+x) + L(b+x) - L(a-x) - L(b-x)$$

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} \right) dx$$

$$dy = \frac{2(a+b)(ab-x^2)}{(a-x)^2(b-x)^2}$$

$$182. y = \frac{(1+2x^2)\sqrt{1-x^2}}{3x^3} \quad (\text{SONNET, 29}).$$

Cuociente de funciones. Se aplican L:

$$Ly = L(1+2x^2) + \frac{1}{2}L(1-x^2) - L3 - 3Lx$$

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{4x}{1+2x^2} + \frac{-2x}{2(1-x^2)} - \frac{3}{x} \right) dx$$

$$dy = - \frac{dx}{x^4 \sqrt{1-x^2}}$$

$$183. \quad y = \frac{(8x^4 + 4x^2 + 3)\sqrt{x^2-1}}{15x^5} \quad (\text{id.})$$

Cuociente de funciones. Se aplican L:

$$Ly = L(8x^4 + 4x^2 + 3) + \frac{1}{2}L(x^2 - 1) - L15 - 5Lx$$

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{32x^3 + 8x}{8x^4 + 4x^2 + 3} + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{5}{x} \right) dx$$

$$\therefore dy = \frac{dx}{x^6 \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$184. \quad y = \frac{1+x+x^2+\dots+x^{p-1}}{1+x+x^2+\dots+x^{q-1}} \quad (\text{CATALÁN, 123})$$

Multipliquemos por $(1-x) : (1-x)$ y se obtiene:

$$y = \frac{1-x^p}{1-x^q}$$

Cuociente de funciones. Aplicamos la fórmula 9:

$$dy = \frac{(1-x^q) d(1-x^p) - (1-x^p) d(1-x^q)}{(1-x^q)^2}$$

$$= \frac{(1-x^q)^p - x^{p-1} - (1-x^p) - qx^{q-1}}{(1-x^q)^2} dx$$

$$= \frac{qx^{q-1}\Sigma x - px^{p-1}\Sigma^1 x}{(1-x)\Sigma^2 x} dx$$

Σx y $\Sigma^1 x$ representan los dos términos de la fracción de la función primitiva.

$$185. y = \sqrt[3]{1+2x-x^2} \quad (\text{TIMMERMANS, 31}).$$

Función irracional entera. Hacemos $1+2x-x^2=u$

$$y = u^{\frac{1}{3}} \quad \therefore d \left(u^{\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} du = \frac{du}{3\sqrt[3]{u^2}};$$

$$\text{pero } du = d(1+2x-x^2) = 2(1-x) dx$$

$$\therefore dy = \frac{2(1-x)}{3\sqrt[3]{(1+2x-x^2)^2}} dx$$

Mentalmente se hace así:

$$d(1+2x-x^2)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(1+2x-x^2)^{-\frac{2}{3}}(2-2x) dx$$

$$186. y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (\text{TODHUNTER, 50}).$$

Función irracional fraccionaria. Hacemos $a^2 - x^2 = v^2$

$$y = \frac{x}{v} \therefore d\left(\frac{x}{v}\right) = \frac{vdx + xdv}{v^2} = \frac{(a^2 - x^2) + x \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} dx$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} dx$$

$$187. y = \sqrt{\frac{x^3}{a-x}} \quad (\text{STURM, 41}).$$

Función irracional fraccionaria. Aplico L:

$$L = \frac{1}{2} [3Lx - L(a-x)]$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{x} + \frac{1}{a-x} \right] dx = x \frac{3a-3x+x}{2x(a-x)} dx$$

$$dy = x^{\frac{3}{2}} \cdot (a-x)^{-\frac{1}{2}} \frac{3a-2x}{2x(a-x)} dx = \frac{(3a-2x)\sqrt{x}}{2(a-x)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$188. y = \sqrt{\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}} \quad (\text{CONNELL, 23}).$$

Función irracional fraccionaria. Aplico L:

$$Ly = \frac{1}{2} [L(1-x+x^2) - L(1+x-x^2)]$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{-1+2x}{1-x+x^2} - \frac{1-2x}{1+x-x^2} \right) dx$$

$$dy = \frac{1}{2} (2x-1) \frac{1+x-x^2+1-x+x^2}{(1-x+x^2)(1+x-x^2)} \cdot \frac{(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$= \frac{4x-2}{2\sqrt{(1-x+x^2)(1+x-x^2)^3}} dx$$

189. $y = \frac{x}{x-\sqrt{1-x^2}}$ (CHURCH, 20).

Función fraccionaria. Se aplica la regla 9:

$$dy = \frac{(x-\sqrt{1-x^2})-x \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)}{(x-\sqrt{1-x^2})^2} dx$$

$$= - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} (x-\sqrt{1-x^2})}$$

190. $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^3}}$ (CARR, 263).

Función irracional fraccionaria. Aplico L:

$$Ly = \frac{1}{2} [L(1-x^2) - 3L(1+x^2)]$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \left[\frac{-2x}{1-x^2} - 3 \frac{2x}{1+x^2} \right] dx$$

$$dy = \frac{-2x(2-x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^5(1-x^2)}} dx$$

$$191. \quad y = \sqrt[4]{\left[a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2-x^2)^2} \right]^3} \quad (\text{BRIOT, 157}).$$

Función irracional fraccionaria que se escribe

$$y = [a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}]^{\frac{3}{4}}$$

$$dy = \frac{3}{4} [a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}]^{-\frac{1}{4}} \left[\frac{1}{2} bx^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} (c^2 - x^2)^{-\frac{1}{3}} \cdot -2x \right] dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{b}{\sqrt{x^3}} - \frac{4x}{3\sqrt[3]{c^2-x^2}}}{\sqrt[4]{a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}} dx \\ &= \frac{3b\sqrt[3]{c^2-x^2} - 4x^2\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{c^2-x^2} \cdot x\sqrt{x} \sqrt[4]{a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}} dx \end{aligned}$$

192.

$$y = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} \quad (\text{HALL, 12})$$

Función radical doble. Aplicamos la fórmula 7

$$\begin{aligned}
 dy &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} dx = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{1+x^2} dx
 \end{aligned}$$

$$193. \quad u = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} \quad (\text{Id. } 14)$$

Función irracional fraccionaria. Aplicamos la misma regla 7:

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dx} &= \frac{(\sqrt{1+x^2} + 1) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - (\sqrt{1+x^2} - 1) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2} + 1)^2} dx \\
 &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{2}{(\sqrt{1+x^2} + 1)^2} = \frac{2(\sqrt{1+x^2} - 1)^2}{x^3 \sqrt{1+x^2}}
 \end{aligned}$$

$$194. \quad u = \frac{\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x+x^2}} \quad (\text{Id. } 14)$$

Función irracional fraccionaria (regla 7).

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{2} \frac{-1+2x}{\sqrt{1-x+x^2}} - \frac{\sqrt{1-x+x^2}}{2} \frac{1+2x}{\sqrt{1+x+x^2}}}{1+x+x^2}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{(1-x+x^2)(1+x+x^2)^{\frac{2}{3}}}}$$

195. $y = \frac{\sqrt{(x+1)(x+3)^9}}{(x+2)^4}$ (GÓMEZ T., 56)

Función fraccionaria. Aplico L:

$$L y = \frac{1}{2} [L(x+1) + 9L(x+3)] - 4L(x+2)$$

$$\frac{dy}{y dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + 9 \frac{1}{x+3} \right) - 4 \frac{1}{x+2}$$

$$\therefore dy = \frac{x^2}{(x+2)^5} \sqrt{\frac{(x+3)^7}{x+1}} dx$$

196. $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5 (x-3)^{11}}}$ (GRÉGORY, 4)

Función irracional fraccionaria. Aplico L:

$$L y = 9L(x-2) - \frac{1}{2} [5L(x-1) + 11L(x-3)]$$

$$\frac{dy}{ydx} = 9 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2} \left[5 \frac{1}{x-1} + 11 \frac{1}{x-3} \right]$$

$$\therefore dy = \frac{(x-2)^8}{\sqrt{(x-1)^7 (x-3)^{13}}} (x^2 + 7x + 1) dx$$

$$197. \quad y = \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}} (x-3)^{\frac{15}{2}}}{(x-2)^8} \quad (\text{BRAHY, 9}).$$

Función fraccionaria irracional *monomia*, por la cual aplicamos log. (L):

$$L y = \frac{5}{2} L (x-1) + \frac{15}{2} L (x-3) - 8 L (x-2)$$

Diferenciamos,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \frac{5}{2} \cdot \frac{dx}{x-1} + \frac{15}{2} \cdot \frac{dx}{x-3} - 8 \frac{dx}{x-2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{5(x-3)(x-2) + 15(x-1)(x-2) - 16(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right] dx \end{aligned}$$

Efectuando y sustituyendo el valor de y ,

$$dy = \frac{(x^2+4)(x-1)^{\frac{3}{2}}(x-3)^{\frac{13}{2}}}{(x-2)^9} dx$$

$$198. \quad y = \frac{a+x}{b+x} \sqrt{\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}} \quad (\text{PEACOCK, 8})$$

$$L \ y = L \ (a+x) - L \ (b+x) + \frac{1}{2} [L \ (b^2+x^2) - L \ (a^2+x^2)]$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{a+x} - \frac{dx}{b+x} + \frac{1}{2} \left(\frac{2xdx}{b^2+x^2} - \frac{2xdx}{a^2+x^2} \right)$$

$$= \left[\frac{(b+x) - (a+x)}{(a+x)(b+x)} + x \left(\frac{a^2+x^2 - b^2 - x^2}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} \right) \right] dx$$

$$\therefore dy = \frac{(a-b) \{ (a+b)(ab+x^2)x - (ab-x^2)^2 \}}{(b+x)^2 (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{b^2+x^2}} dx$$

$$199. \quad y = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x} + \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} \quad (\text{CATALÁN, 116})$$

o bien,

$$y = \frac{u+x}{u-x} + \frac{u-x}{u+x} = \frac{(u+x)^2 + (u-x)^2}{u^2 - x^2} = 2 \frac{u^2 + x^2}{u^2 - x^2}$$

$$= 2(2x^2+1) \therefore dy = 2d(2x^2+1) = 2 \cdot 4xdx \therefore dy = 8xdx.$$

$$200. \quad u = \sqrt{ax + \sqrt{bx + \sqrt{ax + \dots}}} \quad (\text{HIND, 5}).$$

Elevemos al cuadrado:

$$u^2 - ax = \sqrt{bx + \sqrt{ax + \dots}}$$

Elevemos nuevamente al cuadrado:

$$u^4 - 2au^2x + a^2x^2 - bx = \sqrt{ax + \sqrt{bx + \sqrt{ax + \dots}}} = u$$

o bien,

$$u^4 - 2au^2x - u + a^2x^2 - bx = 0$$

Suma de funciones, en la que $2au^2x$ es un producto de funciones:

$$4u^3du - 2a(u^2dx + 2xudu) - du + 2a^2xdx - bdx = 0$$

$$(4u^3 - 4aux - 1) du = (2au^2 - 2a^2x + b) dx$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{2au^2 - 2a^2x + b}{4u^3 - 4aux - 1}$$

III. FUNCIONES TRASCENDENTES

25. Funciones exponenciales.—Cuando la variable está de exponente, la función se llama *exponencial*.

Regla. Para diferenciar una función exponencial, primero se aplican logaritmos y en seguida se diferencia.

Las funciones exponenciales más importantes son a^u , e^u , u^v ; en las que u , v son funciones de x .

A). Sea $y=a^u$. Aplicamos logaritmos:

$$Ly = uLa \cdot \cdot \cdot \frac{dy}{y} = Ladu$$

$$\cdot \cdot \cdot d(a^u) = a^u La du \quad (10)$$

Luego, la diferencial de la función a^u es igual al producto de la función por el logaritmo de la base y por la diferencial del exponente.

B). Si hacemos $a=e$, resulta $Le=1$, y

$$d(e^u) = e^u du;$$

y si $u=x$,

$$d(e^x) = e^x dx: \quad (11)$$

es decir, la derivada es igual a la función.

Ejercicio 201. $y=10^x$ $\cdot \cdot \cdot$ Aplicamos las fórmulas (10):

$$d(10^x) = 10^x L 10 dx.$$

$$\begin{aligned} 2. y &= (a-b)^{-nx} \cdot \cdot \cdot d(a-b)^{-nx} = (a-b)^{-nx} L(a-b) d(-nx) \\ &= -n(a-b)^{-nx} L(a-b) dx \end{aligned}$$

$$3. y = a^{fx} \cdot \cdot \cdot d(a^{fx}) = a^{fx} L a f' x dx$$

$$4. y = \frac{1}{a^u} = a^{-u} \therefore d(a^{-u}) = a^{-u} L a d(-u).$$

$$5. y = \sqrt[u]{a} = a^{\frac{1}{u}} \therefore d\left(a^{\frac{1}{u}}\right) = a^{\frac{1}{u}} L a \cdot \frac{du}{u^2}.$$

$$6. y = (10 e)^x \therefore dy = (10 e)^x L(10 e) dx$$

$$7. de^{ix} = e^{ix} dix = ie^{ix} dx$$

$$8. de^{-ix} = e^{-ix} d(-ix) = -ie^{-ix} dx$$

$$9. de^{au-ex} = e^{au-ex} d(au-ex) = e^{au-ex} (adu - edx).$$

$$200. da^{uv} = a^{uv} L a (udv + vdu).$$

C). $y = u^v$. Aplicamos L:

$$Ly = vLu$$

$$\therefore \frac{dy}{y} = v \frac{du}{u} + L u dv$$

$$\therefore dy = u^v v \frac{du}{u} + u^v L u dv$$

$$\therefore d(u^v) = u^{v-1} v du + u^v L u dv.$$

Hacemos $v=n$: se obtiene la fórmula (5):

$$d(u^n) = nu^{n-1} du.$$

Hacemos $u=a$: resulta la (10):

$$d(a^u) = a^u L a du.$$

Ejercicio 211. $y=x^x$.

$$L y = x L x \therefore \frac{dy}{y} = x \frac{dx}{x} + L x dx = (1 + L x) dx$$

$$\therefore d(x^x) = x^x (1 + L x) dx.$$

Como $1 = L e$, y $L e + L x = L (ex)$, se obtiene:

$$d(x^x) = x^x L (ex) dx$$

$$2. d(a+2x)^{a-2x} = du^v = (a+2x)^{a-2x-1} (a-2x) \cdot 2dx$$

$$+ (a+2x)^{a-2x} L(a+2x) \cdot 2dx$$

$$3. D \left(\frac{u}{x} \right)^{ux} = D u^v = \left(\frac{u}{x} \right)^{ux-1} \frac{u}{x} D \frac{u}{x}$$

$$+ \left(\frac{u}{x} \right)^{ux} L \frac{u}{x} D(ux).$$

$$4. D(u+v)^{u-v} = (u+v)^{u-v-1} (u-v) (du+dv)$$

$$+ (u+v)^{u-v} L(u+v) (du-dv)$$

$$5. y = (fx)^{\varphi x} \quad Ly = \varphi x Lfx$$

$$\therefore \frac{dy}{y} = \varphi x \frac{f'x}{fx} dx + Lfx \cdot \varphi'x dx$$

$$\therefore dy = (fx)^{\varphi x} \left(\varphi x \frac{f'x}{fx} + \varphi'x Lfx \right) dx$$

D). Exponenciales dobles, triples, etc.

Reciben este nombre las funciones en que el exponente es también una función exponencial.

Ej. 216. $y = e^{e^x}$. Hacemos mentalmente $e^x = u$:

$$d(e^{e^x}) = e^{e^x} d(e^x) = e^{e^x} e^x dx$$

$$7. de^{x^x} = e^{x^x} dx^x = e^{x^x} (1 + Lx) x^x dx = e^{x^x} x^x L(ex) dx$$

8. $y = x^{x^x}$. Aplicamos logaritmos

$$Ly = x^x Lx \quad \therefore \frac{dy}{y} = x^x \frac{dx}{x} + Lx dx^x$$

$$\therefore dx^{x^x} = x^{x^x} (x^{x-1} + x^x Lx L(ex))$$

$$9. y = v^v. \quad Ly = v^v L v$$

$$\therefore \frac{dy}{y} = v^z \frac{du}{u} + Lu \left(v^z z \frac{dv}{v} + v^z L v dz \right)$$

$$\therefore d(v^{v^z}) = u^{v^z} v^z \left[\frac{du}{u} + L u \left(z \frac{dv}{v} + L v dz \right) \right]$$

220. $y = x^{\sqrt{x}} = x^{u^{\frac{1}{x}}}$. Aplicamos la fórmula anterior haciendo $u = z = x$, $v = u$:

$$u^{\frac{1}{x}} = x^{u^{\frac{1}{x}}} \quad u^{\frac{1}{x}} \left[\frac{dx}{x} + L v (dx + L x dx) \right]$$

$$1. d(ae)^x = (ae)^x L(ae) dx$$

$$2. d(e : a)^u = (ae)^x (1 - L a) dx$$

$$3. d(10 - e)^{1-x} = (10 - e)^{1-x} L(10 - e) d(1 - x).$$

$$4. d(x^m \cdot e^x) = (x^m e^x + m x^{m-1} e^x) dx$$

$$5. d(x^m \cdot m^x) = m^x x^{m-1} (m + L m m) dx$$

$$6. d(e^{x^e}) = e^{x^e - 1} x^{e-1} dx$$

$$7. d(e^{a^x}) = e^{a^x} a^x L a dx$$

$$8. d x (ax^2 + bx + c) = a^{ax^2 + bx + c} L a (2ax + b) dx$$

$$9. D \frac{e^{x^2}}{x} = \frac{x \cdot e^{x^2} + x - e^{x^2}}{x^2} = e^{x^2} \left(2 - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$230. u = x^{\frac{1}{x}} = x^{x^{-1}}$$

(HALL, 28)

$$\begin{aligned} L u &= \frac{1}{x} L x \therefore \frac{du}{u} = \frac{1}{x} \frac{dx}{x} + L x \cdot \frac{-dx}{x^2} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{L x}{x^2} \right) dx = \frac{1}{x^2} (1 - L x) dx \\ \therefore du &= x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} (L e - L x) dx = x^{\frac{1}{x}-2} L \left(\frac{e}{x} \right) dx. \end{aligned}$$

26. Funciones logarítmicas.

$$y = L u \therefore d(L u) = \frac{du}{u}.$$

Esta es la segunda fórmula fundamental.

A). Consideremos, en primer lugar, un logaritmo de base cualquiera a i sea la fórmula

$$y = \log_a u$$

Para reemplazar el signo $\log_a$ por L , acudimos a la fórmula inversa $a^y = u$, a la que aplicamos L :

$$y L a = L u \therefore y = \frac{L u}{L a}$$

$$\therefore dy = d \log_a u = d \frac{L u}{L a} = \frac{du}{u L a}$$

B). Pero, si $a^x = e \therefore e^{\frac{1}{x}} = a;$

o bien, tomando logaritmos,

$$x \log_a a = \log_a e, \quad \frac{1}{x} \log_e e = \log_e a;$$

y comó, $\log_e a = 1 = \log_e e$, resulta:

$$\log_e e = \frac{1}{\log_a a}.$$

La diferencial anterior se puede escribir así

$$d(\log_a u) = \frac{1}{L_a} \cdot \frac{du}{u} = \log_a e \frac{du}{u}.$$

C). Si suponemos $a=10$, tendremos:

$$d(\log u) = \log e \frac{du}{u} = M \frac{dx}{x},$$

en la que $M=0,434\ 294\ 819$.

$$\text{Ej. 231. } D \text{ colog } u = D \log \frac{1}{u} = D(-\log u) = -M \frac{1}{u}.$$

$$2. \ d \text{ co } L u = d L 1 : u = d(1 - L u) = -\frac{du}{u}$$

$$3. \ d \log_{\sqrt{2}} x = \log_{\sqrt{2}} e \frac{dx}{x} = \frac{1}{2L 2} \frac{dx}{x}$$

$$4. y = \log_x x, \text{ o } x^y = x, \text{ o } x^{y-1} = 1 \therefore dy = \frac{1-y}{x L x} dx$$

$$5. y = \log v, \text{ o } u^y = v \therefore y L u = L v,$$

$$\therefore y \frac{du}{u} + L u dy = \frac{dv}{v} \therefore y = \frac{u dv - v y du}{u v L u}$$

D). Logaritmos dobles

$$236. y = L(Lu) \therefore dy = \frac{d L u}{L u} = \frac{du}{u L u}$$

$$7. y = \log(\log x) = \log u \therefore dy = M \frac{d \log x}{\log x} M^2 = \frac{dx}{x \log x}$$

$$8. y = \log(L x) = \log u \therefore dy = M \frac{d L x}{L x} = M \frac{dx}{x L x}$$

$$9. y = L(\text{colog } u) = L\left(\log \frac{1}{u}\right) \therefore dy = \frac{M : u}{\log 1 : u}$$

$$240. y = \log_a [\log_b (\log_c u)] = \log_a (\log_b z) = \log_a t$$

$$dy = \frac{1}{L a} \cdot \frac{dt}{t} = \frac{d \log_b z}{L a \log_b z} = \frac{dz}{L a L b z \log_b z}$$

$$= \frac{du}{u L a L b L c \log_c u \log_b (\log_c u)}$$

27. La Diferenciación logarítmica consiste en aplicar logaritmos naturales (L) a las funciones monomias compuestas, con el objeto de descomponerlas en funciones simples, de fácil diferenciación.

Ya hemos visto la importancia que tiene el empleo de estos logaritmos en las funciones

$$u^v, u : v, u^n, a^u;$$

que se convierten en las formas sencillas,

$$L u + L v, L u - L v, n L u, u L a,$$

cuyas diferenciales son:

$$\frac{du}{u} + \frac{dv}{v}, \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}, n \frac{du}{u}, L a du.$$

Ejercicio 241. $y = u_1 u_2 u_3 \dots u_n$.

$$L y = L u_1 + L u_2 + L u_3 + \dots + L u_n$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{du_3}{u_3} + \dots + \frac{du_n}{u_n}.$$

2. $y = (x-a)^m (x-b)^n (x-c)^p \dots$ (STURM, 59).

$$L y = m L (x-a) + n L (x-b) + p L (x-c) + \dots$$

$$\frac{dy}{y} = \left[\frac{m}{x-a} + \frac{n}{x-b} + \frac{p}{x-c} + \dots \right] dx$$

$$\frac{dy}{dx} = (x-a)^{m-1} (x-b)^{n-1} [m (x-b) (x-c) \dots + n (x-a) (x-c) \dots]$$

$$3. \quad y = \frac{(a+x)^m (b-x)^n}{(c-x)^p (e+x)^r}$$

$$L y = m L (a+x) + n L (b-x) - p L (c-x) - r L (e+x)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{m}{a+x} - \frac{n}{b-x} + \frac{p}{c-x} - \frac{r}{e+x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a+x)^{m-1} (b-x)^{n-1}}{(c-x)^{p+1} (e+x)^{r+1}} [m (b-x) (c-x) (e+x)$$

$$- n (a+x) (c-x) (e+x) + p (a+x) (b-x) (e+x)$$

$$- r (a+x) (b-x) (c-x)].$$

$$4. \quad y = \frac{x^3 \sqrt{1-x}}{(1+x)^2 (1+x^2)}$$

$$L y = 3 L x + \frac{1}{2} L (1-x) - 2 L (1+x) - L (1+x^2)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{3}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{2}{1+x} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 (b-5x-x^2-5x^3+x^4)}{2 (1-x^2) (1+x)^2 (1+x^2)^2}$$

$$5. \quad y = \frac{(a+x)^3 \sqrt{a-x}}{(b-x^2) \sqrt[3]{b+x}}$$

$$L y = 3 L (a+x) + \frac{1}{2} L (a-x) - L (b-x^2) - \frac{1}{3} L (b+x)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{3}{a+x} - \frac{1}{2(a-x)} + \frac{2x}{b-x^2} - \frac{1}{3(b+x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5(b-x^2)[5b-2a]a + (5a-7b)x-9x^2 + 12x(b+x)(a^2-x^2)}{6(a+x)^{-2}(b+x)^{\frac{1}{3}}(a-x)^{\frac{1}{2}}(b-x^2)^2}$$

$$6. \quad y = \sqrt{\frac{a+x}{a-x} \cdot \frac{b+x}{b-x}}. \quad (\text{LAMB, 91})$$

$$L y = \frac{1}{2} [L (a+x) + L (b+x) - L (a-x) - L (b-x)]$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a^2-x^2} + \frac{b}{b^2-x^2} \right) = \frac{(a+b)(ab-x^2)}{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(a+b)(ab-x^2)}{(a-x)^{\frac{3}{2}}(b-x)^{\frac{3}{2}}(a+x)^{\frac{1}{2}}(b+x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$7. \quad y = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}} = \left(\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{siendo } z = \frac{u}{v}.$$

$$L y = \frac{1}{2} [L (z^2 + 1) - L (z^2 - 1)]$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \left[\frac{2z}{z^2 + 1} - \frac{2z}{z^2 - 1} \right] dz = z \frac{-2}{z^4 - 1} dz$$

$$dy = -\frac{u}{v} \frac{2}{\frac{u^4}{v^4} - 1} d\frac{u}{v} = -\frac{u}{v^3} \cdot \frac{2}{u^4 - v^4} \cdot \frac{vdu - vdu}{v^2}$$

$$\therefore dy = \frac{-2 u (vdu - u dv)}{v^3 (u^4 - v^4)}$$

$$8. \quad y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^x \text{ (Catalan, 123)}$$

$$L y = x [L(x^2 + 1) - L x]$$

$$\frac{dy}{y dx} = x \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) + L \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + L \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^x \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + L \frac{x^2 + 1}{x}\right)$$

$$9. \quad y = \frac{v^u}{u v} \therefore Ly = uLv - La - vLu$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{u dv}{v} + Lv du - v \frac{du}{u} - L u dv$$

$$= \left(\frac{u}{v} - Lu\right) dv + \left(\frac{v}{u} - Lv\right) du$$

$$dy = \frac{v^u}{au^v} \left(\frac{u - Lu^v}{v} dv - \frac{vLu^u}{u} du \right)$$

$$250. \quad y = (aLx - b)^{L(a-bx)}$$

$$Ly = L(a-bx) L(aLx - b)$$

$$\frac{dy}{y} = L(a-bx) \frac{adx}{(aLx-b) Lx} - L(aLx-b) \frac{bdx}{a-bx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (aLx-b)^{L(a-bx)} \frac{L(a-bx)^a - L(aLx-b)}{(a-bx)(aLx-b) Lx}$$

28 Funciones trigonométricas.—Para diferenciar esta clase de funciones emplearemos primeramente el siguiente

Método elemental.—LEMA I. El coseno y la secante de un arco infinitesimal son iguales a la unidad.

$$\cos dx = \sec dx = 1.$$

Demostración. Sabemos que el coseno es la inversa de la secante,

$$\cos x = \frac{1}{\sec x};$$

y que si el arco disminuye indefinidamente o tiende a cero ($\rightarrow 0$), el coseno aumenta indefinidamente y se hace igual a la unidad; y la secante disminuye y se hace también igual a la unidad; luego, cuando el arco es infinitesimal, se verifican las relaciones

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad \text{o} \quad \cos dx = 1$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sec x = 1 \quad \text{o} \quad \sec dx = 2$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\therefore \cos dx = \sec dx = 1$$

LEMA II. El seno y la tangente de un arco infinitesimal son iguales al arco.

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x = dx.$$

Demosiración. Tenemos

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \therefore \operatorname{sen} x = \cos x \operatorname{tg} x.$$

Si el arco es infinitesimal, escribimos.

$$\operatorname{sen} dx = \cos dx \operatorname{tg} dx$$

Según lema I, $\cos dx = 1$,

$$\operatorname{sen} dx = \operatorname{tg} dx;$$

y como el arco esta comprendida entre el seno y la tangente, resulta.

$$\operatorname{sen} dx = dx = \operatorname{tg} dx.$$

Diferencial del seno.—Sea la función

$$y = \text{sen } u.$$

Si u aumenta su valor en du , y lo aumentará en dy :

$$y + dy = \text{sen } (u + du)$$

$$= \text{sen } u \cos du + \text{sen } du \cos u.$$

Según los lemas anteriores, $\cos du = u$, $\text{sen } du = du$:

$$y + dy = \text{sen } u + \cos u du.$$

Restamos la función primitiva.

$$dy = \cos u du$$

$$o \quad d(\text{sen } u) = \cos u du \quad (12)$$

Luego, la diferencial del seno es igual al coseno por la diferencial del arco.

$$\text{Ejercicio 251. } y = \text{sen } x \quad \therefore \quad dy = \cos x dx$$

$$2. d \text{ sen } au = \cos au da u = a \cos a u du.$$

$$3. d \text{ sen } (ux + a) = \cos (ux + a) d(ux + a) = n \cos (n + xa) dx.$$

$$4. d \text{ sen } (1 - x) = \cos (1 - x) = -\cos (1 - x) dx$$

$$5. d \operatorname{sen} x^2 = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2 dx$$

$$6. d \operatorname{sen} \sqrt{x} = \cos \sqrt{x} d \sqrt{x} = \frac{d.c}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$$

$$7. d \operatorname{sen}^2 x = 2 \operatorname{sen} x \cos x dx = \operatorname{sen} 2x dx$$

$$8. d a \operatorname{sen}^m x^n = am \cdot \operatorname{sen}^{m-1} x^n \cos x^n dx^n$$

$$= amn x^{n-1} \operatorname{sen}^{m-1} x^n \cos x^n dx$$

$$9. d \operatorname{sen} Lx = \cos Lx d Lx = \cos Lx \frac{dx}{x}$$

$$260. d L \operatorname{sen} x = \frac{d \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen} x} = \cot x dx.$$

$$1. y = a^{\operatorname{sen} u}. \text{ Aplicamos logaritmos.}$$

$$L y = \operatorname{sen} u L a \therefore dy = L a \cos u du$$

$$\therefore da^{\operatorname{sen} u} = a^{\operatorname{sen} u} L a \cos u du$$

$$2. y = (\operatorname{sen} u)^x \therefore L y = x L \operatorname{sen} u$$

$$\frac{dy}{y} = x \frac{d \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} u} + L \operatorname{sen} u dx = x \cot u du + L \operatorname{sen} u dx$$

$$\therefore dy = \text{sen}^x u (x \cot u du + L \text{ sen } u dx)$$

$$3. \quad y = (\text{sen } x)^{\text{sen } x} \therefore L y = \text{sen } x L \text{ sen } x$$

$$\frac{dy}{y} = \text{sen } x \cot x dx + L \text{ sen } x (\cos x dx) = \cos x (1 + L \text{ sen } x)$$

$$d \text{ sen } x = \text{sen } x \cos x (1 + L \text{ sen } x)$$

$$4. \quad y = \frac{\text{sen } x}{x} \therefore dy = \frac{x \cos x - \text{sen } x}{x^2} dx$$

$$265. \quad y = \frac{x \text{ sen } (90^\circ - x)}{\sqrt{\text{sen } (90^\circ + x)}}. \quad \text{Apliquemos logaritmos:}$$

$$L y = L x + L \text{ sen } (90^\circ - x) - \frac{1}{2} L \text{ sen } (90^\circ + x)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} + \frac{\cos (90^\circ - x) d(90^\circ - x)}{\text{sen } (90^\circ - x)}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\cos (90^\circ + x) d(90^\circ + x)}{\text{sen } (90^\circ + x)}$$

$$\frac{dy}{yx} = \frac{x \cos x}{\sqrt{\cos x}} \left[\frac{1}{x} - \frac{\text{sen } x}{\cos x} - \frac{1}{2} \frac{\text{sen } x}{\cos x} \right]$$

$$= x \sqrt{\cos x} \left[\frac{1}{y} - \frac{3}{2} \frac{\text{sen } x}{\cos x} \right] = \sqrt{\cos x} - \frac{3}{2} x \frac{\text{sen } x}{\sqrt{\cos x}}$$

Diferencial del coseno. Como $\cos u = \sin (90^\circ - u)$, tendremos:

$$d \cos u = d \sin (90^\circ - u) = \cos (90^\circ - u) d (90^\circ - u).$$

Pero, $\cos (90^\circ - u) = \sin u$; y $d (90^\circ - u) = -du$:

$$\therefore d (\cos u) = -\sin u du \quad (13)$$

La diferencial del coseno es igual a menos el seno por la diferencial del arco.

Ejerc. 266. $y = \cos (ax + b) \therefore dy = -\sin (ax + b) d (ax + b)$

$$= -a \sin (ax + b) dx.$$

(Continuará)