REGLAS FUNDAMENTALES DE DIFEREN- CIACION

POR

CARLOS WARGNY

(*Continuacion*)

28. $$d\left(\frac{m}{ax^2+bx+c}\right)=-m\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^2}$$

29. $$d\left(\frac{a+b}{a-bx^n}\right)=-(a+b)\,\frac{-bnx^{n-1}}{(a-bx^n)^2}dx$$

30. $$d\left(\frac{1}{fx}\right)=-\frac{dfx}{f^2x}=-\frac{f'x}{f^2x}dx$$

E). Radical o exponente fraccionario.

sea

$$y=\sqrt[n]{u} \qquad \text{o} \qquad y=u^{\frac{1}{n}}.$$

Diferenciamos como potencia:

$$d\left(u^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\,u^{\frac{1}{n}-1}du.$$

Ej. 31. $y=\sqrt[3]{x.}$ $\qquad d\left(\sqrt[3]{x}\right)=d\left(x^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

32. $d\left(\sqrt[5]{ax}\right)=d\,(ax)^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{1}{5}}\,dx^{\frac{1}{5}}=\dfrac{a^{\frac{1}{5}}}{5}\,x^{-\frac{4}{5}}dx$

33. $d\sqrt[10]{a-x}=d\,(a-x)^{\frac{1}{10}}=\dfrac{1}{10}(a-x)^{-\frac{9}{10}}d\,(a-x)$

$$=-\frac{1}{10}(a-x)^{-\frac{9}{10}}dx$$

*34. $d\sqrt[n]{fx}=d\,f^{\frac{1}{n}}x=\dfrac{1}{n}f^{\frac{1}{n}-1}x\,f'x\,dx.$

35. $d\left(x^{\frac{p}{q}}\right)=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}dx$

36. $d\left(x^{\frac{n-1}{n+1}}\right)=\frac{n-1}{n+1}x^{\frac{u-1}{+1\ n}-1}dx.$

F). Raíz cuadrada de u. $y=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$.

Se diferencia como potencia:

$$dy=\tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}du=\tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$\therefore\ d(\sqrt{u})=\frac{du}{2\sqrt{u}} \qquad (7)$$

Luego, la diferencial de la raíz cuadrada de u es igual a la diferencial de u dividida por el doble de la raíz.

Ej. 37. $y=\sqrt{x};\quad d\sqrt{x}=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

38. $y=\sqrt{a-bx};\quad d\sqrt{a-bx}=\frac{d(a-bx)}{2\sqrt{a-bx}}=-\frac{bdx}{2\sqrt{a-bx}}.$

39. $y=\sqrt{a^2+x^2};\quad d\sqrt{a^2+x^2}=\frac{d(a^2+x^2)}{2\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$

40. $y=\sqrt{a+bx+cx^2}$: $dy=\dfrac{d\,(a+bx+cx^2)}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}$

$$=\frac{b+2cx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}\,dx.$$

G). Producto de funciones.—Sea el producto de funciones de x

$$y=(1+x)\,(a+bx).$$

Representemos el primer factor $1+x$ por u y el segundo factor $a+bx$ por v:

$$y=uv.$$

Para diferenciar, aplico logaritmos:

$$\mathrm{L}\,y=\mathrm{L}\;u+\mathrm{L}\;v.$$

Diferencio la suma y los logaritmos:

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}.$$

Despejo y reemplazo y por uv

$$dy = uv\frac{du}{u} + uv\frac{dv}{v}.$$

Simplifico y obtengo la regla:

$$d\,(uv) = udv + vdu \qquad (8)$$

Luego, la diferencial del producto de dos funciones es igual a la primera por la diferencial de la segunda más la segunda por la diferencial de la primera.

Ej. 41. $y = (1+x)\,(a+bx).$

$$dy = (1+x)\;d\,(a+bx) + (a+bx)\;d\,(1+x)$$

$$= (1+x)\;bdx + (a+bx)\;dx.$$

42. $y = ax\,(1-x^2).$

$$dy = axd(1-x^2) + (1-x^2)\;dax$$

$$= ax\,.\,-2x\,dx + (1-x^2)\;adx$$

$$= [\,-2ax^2 + a\;(1-x^2)\,]\;dx$$

$$= (a-3ax^2)\;dx$$

43. $y=(ax+b)\ (a+bx+cx^2)$

$$dy=(ax+b)\ d\ (a+bx+cx^2)+(a+bx+cx^2)\ d\ (ax+b)$$

$$=[(ax+b)\ (b+2cx)+(a+bx+cx^2)\ a\ ]\ dx.$$

* 44. $y=fx : \varphi x$. $dy=fxd\varphi x+\varphi xdfx$

$$=fx\varphi' xdx+\varphi xf' xdx.$$

Observaciones.—*a*). Si en la fórmula

$$d\ (uv)=udv+vdu$$

hacemos $u=\pm a$ se obtiene la (4)

$$d\ (\pm av)=\pm adv,$$

porque $du=da=0$.

b). Si son tres los factores,

$$y=uvz;$$

para diferenciar, considerámos los dos primeros como uno solo:

$$d\ (uvz)=uv.dz+zd\ (uv)$$

$$=uvdz+z\,(udv+vdu)$$

$$=uvdz+uzdv+vzdu.$$

Sin embargo, en la práctica es más ventajoso aplicar logaritmos.

c). Si son n los factores,

$$d\,(u_1\,u_2\,\ldots u_n\,)=u_2\,\ldots u_n\,du_1\,+u_1\,u_3\,\ldots u_n\,du_2\,+\ldots$$

d). Si los n factores son iguales a u:

$$d\,(u^n\,)=u^{n-1}du+u^{n-1}du+\ldots=nu^{n-1}du.$$

H). Cuociente de funciones.—Sea la fracción

$$y=\frac{a+bx}{a-bx},$$

que, abreviadamente, representamos por

$$y=\frac{u}{v}.$$

Aplicamos logaritmos:

$$\mathrm{L}y=\mathrm{L}u-\mathrm{L}v$$

Diferenciamos:

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}-\frac{dv}{v}$$

$$\therefore\ dy=\frac{u}{v}\quad\frac{du}{u}-\frac{u}{v}\quad\frac{dx}{v}$$

$$=\frac{du}{v}-\frac{udv}{v^2}$$

$$\therefore\ d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2} \tag{9}$$

Luego, la diferencial de una fracción es igual al denominador por la diferencial del numerador menos el numerador por la diferencial del denominador, todo dividído por el cuadrado del denominador.

Ej. 45. $y=\dfrac{a+bx}{a-bx}$

$$dy=\frac{(a-bx)\ d\ (a+bx)-(a+bx)\ d\ (a-bx)}{(a-bx)^2}$$

$$=\frac{(a-bx)\ bdx+(a+bx)\ bdx}{(a-bx)^2}=\frac{2ab}{(a-bx)^2}\,dx.$$

46. $y = \dfrac{2-x}{1+x-x^2}$; $dy = \dfrac{(1+x-x^2).-dx-(2-x)(1-2x)\,dx}{(1+x-x^2)^2}$

$$= \frac{-x^2+4x-3}{(1+x-x^2)^2}\,dx.$$

47. $y = \dfrac{fx}{x}$; $dy = \dfrac{\varphi x df x - fx d\varphi x}{\varphi^2 x} = \dfrac{\varphi x f'x - fx\varphi' x}{\varphi^2 x}\,dx.$

48. $y = \dfrac{3x^3}{a^2-x^3}$; $dy = \dfrac{(a^2-x^3)\,9x^2-3x^3.\,3x^2}{(a^2-x^3)^2}\,da$

$$= \frac{9a^2x^2-9x^5+9x^5}{(a^2-x^3)^2} = \frac{9a^2x^2}{(a^2-x^3)^2}\,dx.$$

49. $d.\,\dfrac{(a+bx)^2}{a-bx^2} = \dfrac{(a-bx^2)\,.\,2\,(a+bx)\,b-(a+bx)^2.-2bx}{(a-bx^2)^2}\,dx$

$$= \frac{2b\,(a-bx^2)\,(a+bx)+2bx\,(a+bx)^2}{(a-bx^2)^2}\,dx.$$

50. $y = \dfrac{1+x^n}{1-x^n}$; $dy = \dfrac{(1-x^n)\,nx^{n-1}-(1+x^n)\,.\,-nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}\,dx$

$$= nx^{n-1}\,\frac{1-x^n+1+x^n}{(1-x^n)^2}\,dx = \frac{2nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}\,dx.$$

Observación.—En la fórmula (9)

$$d\,(u:v) = \frac{vdu-udv}{v^2}$$

encontramos la (4), haciendo $v=a$:

$$d\left(\frac{u}{a}\right)=\frac{adu}{a^2}=\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\,du;$$

y la (6), haciendo $u=1$

$$d\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{-dv}{v^2}.$$

21.—Resumen de fórmulas.—Las fórmulas prácticas que se emplean para diferenciar las funciones algebraicas son las nueve siguientes:

1. Término constante........	$d\,(a)$	$=0$
2. Función logarítmica.......	$d\,(\mathrm{L}u)$	$=\dfrac{du}{u}$
3. Suma de funciones........	$d\,(u+v)$	$=du+dv$
4. Signo y coeficiente........	$d\,(\pm au)$	$=\pm adu$
5. Potencia.................	$d\ u^n)$	$=nu^{n-1}du$
6. Inversa...................	$d\left(\dfrac{1}{u}\right)$	$=-\dfrac{du}{u^2}$
7. Raiz cuadrada...........	$d\left(\sqrt{u}\right)$	$=\dfrac{du}{2\sqrt{u}}$
8. Producto de funciones.....	$d\,(uv)$	$=udv-vdu.$
9. Cuociente de funciones....	$d\left(\dfrac{u}{v}\right)$	$=\dfrac{vdu-udv}{v^2}.$

u representa una función simple o una función compuesta de x.

Las tres primeras son fundamentales y las seis restantes están comprendidas en la 8, como se verá en los ejercicios. La 4 comprende las potencias, fracciones y radicales.

22. Ejercicios elementales. Primera serie.—Signo y coeficiente

1. $y=\frac{x}{a-b}$; $\quad dy=d\left(\frac{x}{a-b}\right)=\frac{1}{a-b}\,dx$

2. $y=\pm\frac{3u}{1-\sqrt{2}}$; $\quad d\left(\pm\frac{3u}{1-\sqrt{2}}\right)=\pm\frac{3}{1-\sqrt{2}}du.$

3. $y=\frac{(a+b+c)\,x}{a+b-c}$; $\quad dy=\frac{a+b+c}{a+b-c}\cdot xp$

Potencias:

4. $y=x^{n+1}$; $\quad dy=(n+1)\,x^n\,dx$

5. $y=\frac{1}{3}x^{3n}$; $\quad dy=nx^{3n-1}dx$

6. $y=-\frac{3}{5}(a+b)\,x^{2n}$; $\quad dy=-\frac{6n}{5}(a+b)\,x^{2n-1}dx$

7. $u=(ax^n-bx^m)^3$;

$$du=3\,(ax^n-bx^m)^3\,(nax^{n-1}-mbx^{m-1})\,dx$$

8. $y=(fx-\varphi x)^{n-1}$; $du=(n-1)(fx-\varphi x)^{n-1}$
$\times(f'x-\varphi'x)\,dx$

Término constante.

9. $u=\mathrm{L}\,(a-b)$; $du=0$

10. $y=e^i+e^{-i}$; $dy=0$

1. $u=(1+a^2)^{\frac{1}{2}}-1$; $du=0$

Suma de funciones

2. $y=\frac{x}{a}-\frac{1}{a}$; $dy=\frac{dx}{a}$

3. $f\,(x)=\frac{a+x}{b}\pm ix$; $f'xdx=d\left(\frac{a}{b}+\frac{x}{b}\right)$
$\pm dix=\left(\frac{x}{b}\pm i\right)dx$

4. $fx=ax^2+bx+c$; $dfx=(2ax+b)\,dx$

5. $fx=ax^{2n}-bx^n$; $f'xdx=(2anx^{2n-1}-bnx^{n-1})\,dx$.

6. $u=px^{2n+1}+rx^{n-2}+sx$;
$du=[(2n+1)\,px^{2n}+(n-2)\,rx^{n-3}+s]\,dx$

7. $f(x) = \mathrm{L}x - \mathrm{L}\,(a+x)$.

$$f'xdx = \frac{dx}{x} - \frac{d\,(a+x)}{a+x} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a+x}\right)dx$$

8. $y = (a+x)^2 - (a-x)^3 + (a+bx)^4$

$$dy = [\,2\,(a+x) + 3\,(a-x)^2 + 4b\,(a+bx)^3\,]\,dx$$

9. $u = f^n\,x - \varphi^m\,x$.

$$du = (nf^{n-1}x\,f'x - m\varphi x^{m-1}\,\varphi'x)\,dx$$

Inversas

120. $fx = \dfrac{1}{ax}$; $\quad dfx = \dfrac{1}{a}\,d\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}.-\dfrac{dx}{x^2}$

1. $u = -\dfrac{a}{bx}$; $\quad du = -\dfrac{a}{b}.-\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{a}{bx^2}\,dx$

* 2. $y = \dfrac{1}{(a-x)^2}$; $\quad dy = -\dfrac{d\,(a-x)^2}{(a-x)^4}$

$$= \frac{2\,(a-x)}{(a-x)^4}\,dx = \frac{2dx}{(a-x)^3}$$

* 3. $y = \dfrac{1}{x^n}$; $\quad dy = -\dfrac{dx^n}{(x^n)^2} = -\dfrac{nx^{n-1}}{n^{2n}}\,dx = -\dfrac{ndx}{x^{n+1}}$

* 4. $u = \dfrac{a+b}{(a+bx)^3}$; $\quad du = -(a+x)\dfrac{3\,(a+bx)^2\,bdx}{a\,(+bx)^6}$

$$=-\frac{(4+b)\,b}{(a+bx)^4}\,dx$$

Raiz cuadrada

125. $$d\,(\sqrt{ax}) = \frac{dax}{2\sqrt{ax}} = \frac{a}{2\sqrt{ax}}\,dx = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

6. $$da\sqrt{x^n} = adx^{\frac{u}{2}} = \tfrac{1}{2}anx^{\frac{u}{2}-1}\,dx$$

7. $$d\sqrt{a-x} = \frac{d\,(a-x)}{2\sqrt{a-x}} = -\frac{dx}{2\sqrt{a-x}}$$

8. $$d\sqrt{a-bx} = \frac{d\,(a-bx)}{2\sqrt{a-bx}} = -\frac{bdx}{2\sqrt{a-bx}}$$

9. $$d\sqrt{a-bx+cx^2} = \frac{-b+2cx}{2\sqrt{a-bx+cx^2}}\,dx$$

Raiz cualquiera

130. $$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \;.\,\cdot\,.\; dy = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\,dx$$

1. $$d\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}x^4} = (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\,x^4)^{\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{4}\,(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}x^4)^{-\frac{3}{4}} - \tfrac{4}{3}x^3dx$$

2. $d\sqrt[n]{ax^m-1} = d(ax^m-1)^{\frac{1}{n}}$

$$= \frac{1}{n}(ax^m-1)^{\frac{1}{n}-1} \cdot amx^{m-1}\,dx$$

3. $d\,\dfrac{a+b-c}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = (a+b-c)\,d\,(a+bx+cx^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= -\tfrac{1}{2}(a+b-c)(a+bx+cx^2)^{-\frac{3}{2}}(b+2cx)\,dx)$$

* 4. $d\,\dfrac{2a-3b}{\sqrt[3]{(a-bx^n)^2}} = (2a-3b)\,d\,(a-bx^n)^{\frac{2}{3}}$

$$= -\tfrac{2}{3}(2a-3b)(a-bx^n)^{-\frac{1}{3}} \cdot (bnx^{n-1}(dx$$

Logaritmos:

135. $y = \mathrm{L}\,(a+x);\quad dy = \dfrac{d\,(a+x)}{a+x} = \dfrac{dx}{a+x}$

6. $d\ \mathrm{L}\,(a-bx) = \dfrac{d\,(a-bx)}{a-bx} = \dfrac{-bdx}{a-bx}$

7. $d\ \mathrm{L}\,(1-x^2) = \dfrac{d\,(1-x^2)}{1-x^2} = \dfrac{-2xdx}{1-x^2}$

* 8. $d\ \mathrm{L}\,[x+(1+x^2)^n] = \dfrac{dx+n\,(1+x^2)^{n-1}d\,(1+x^2)}{x+(1+x^2)^n}$

$$= \frac{1+2xn(1+x^2)^{n-1}}{x+(1+x^2)^n}\,da$$

Producto de funciones:

139. $y=2x(1+3x);\quad dy=2xd(1+3x)+(1+3x)\,d2x$

$$=2x\,.\,3dx+(1+3x)\,2dx=(12x+2)\,dx$$

140. $u=(1+2x)(1-3x);\ du=(1+2x)-3\,dx+(1-3x)\,2dx$

1. $d\left(\frac{1}{3}x+x^2\right)\left(x-\frac{3}{x}\right)=\left(\frac{1}{3}x+x^2\right)\left(1+\frac{3}{x^2}\right)dx$

$$+\left(x-\frac{3}{x}\right)\left(\frac{1}{3}+2x\right)dx$$

2. $d\,(a_1x^2+b_1x+c_1)\,(a_2x^2+b_2x+c_2)$

$$=[\,(a_1x^2+b_1x+c_1)\,(2a_2x+b_2)+(a_2x^2+b_2x+c_2)(2a_1x+b_1)\,]dx$$

3. $d\,(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}=(a^2+x^2)\,.\,\frac{-2xdx}{2\sqrt{a^2-x^2}}$

$$+\sqrt{a^2-x^2}\,2xdx=\left(-\frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+2\sqrt{a^2-x^2}\right)xdx$$

144. $d\,(a^2x^2+b^2x^3)\,(1-a^2b^2x)$

$$=[\,(a^2x^2+b^2x^3.-a^2b^2x+(1-a^2b^2x)\,(2a^2x-3b^2x^2)\,]\,dx$$

Funciones fraccionarias:

145. $y=\frac{1+ax}{1-bx}$; $dy=\frac{(1-bx)\,d\,(1+ax)-(1+ax)\,d\,(1-bx)}{(1-bx)^2}$

6. $u=\frac{3x^2-5}{7x-x^3}$; $du=\frac{(7x-x^3)\,6x-(3x^2-5)\,(7-3x^2)}{(7x-x^3)^2}dx$

7. $y=\frac{(1-x^3)^2}{1+x^3}$;

$$dy=\frac{(1+x^3)\,2\,(1-x^3).-3x^2-(1-x^3)^2\,.\,3x^2}{(1+x^3)^2}dx$$

* 8. $d\ \frac{(ax-b)^n}{ax^2+bx-c}$

$$=\frac{(ax^2+bx-c)\,n\,(ax-b)^{n-1}a-(ax-b)^n\,(2ax+b)}{(ax^2+bx-c)^2}dx$$

* 9. $d\ \frac{L\,(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}\frac{1}{1+x}-L\,(1+x)\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}d$

* 150. $d\ \frac{\sqrt[n]{1+x^m}}{\sqrt[m]{1-x^n}}=\frac{(1-x^n)^{\frac{1}{m}}\,.\,\frac{1}{n}\,(1+x^m)^{\frac{1}{n}-1}\,.\,mx^{m-1}}{(1-x^n)^{\frac{2}{m}}}dx$

$$+\frac{(1+x^m)^{\frac{1}{n}} \cdot -\frac{1}{m}(1-x^n)^{\frac{1}{m}-1} \, n x^{n-1}}{(1-x^n)^{\frac{2}{m}}} d x$$

Segunda serie de ejercicios.—Verificar o efectuar los siguientes.

151. En las funciones algebraicas, la variable x no puede estar sometida más que a una de las seis operaciones que se indican:

1. Adición	$a+x$
2. Substracción	$a-x$
3. Multiplicación	ax
4. División...............................	$a:x$
5. Elevación a potencia..................	x^n
6. Extracción de raíz....................	$\sqrt[n]{x}$

Para diferenciar estas funciones, bastan las tres reglas fundamentales. En efecto, para las dos primeras nos valemos de la regla de la suma,

$$d\,(a \pm x) = da \pm dx$$

y del término constante $da = 0$,

$$\therefore d\,(a \pm x) = \pm dx.$$

En seguida aplicamos logaritmos a las restantes:

$L(ax) = La + Lx$, se reduce a una suma;

$L(a : x) = La - Lx$, se reduce a una diferencia;

$L(x^n) = nLx$, se reduce a un producto;

$L\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}Lx$; se reduce a un cuociente.

Ahora bien, por complicadas que sean las funciones no pueden ser más que monomios o polinomios.

Si son monomios compuestos, se aplican logaritmos y toman la forma polinomia $u+v$, que se diferencian por la regla de la suma; o toman la forma de una función simple, de diferenciación inmediata.

Más adelante se verá que las funciones trascendentes pueden tomar forma algebraica.

152. Para hacer evidentes las variaciones de x, en la regla fundamental de la suma, en lugar de u y y, podemos escribir

$$y = fx + \varphi x$$

Tendremos:

$$u = f(x); \quad u + du = f(x + dx) \therefore du = f(x + dx) - fx \qquad (1)$$

$$v = \varphi x, \quad v + dv = \varphi(x + dx) \therefore dv = \varphi(x + dx) - \varphi x \qquad (2)$$

$$y + dy = u + du + v + dv \therefore dy = du + dv \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3) se obtiene:

$$d\,(fx+\varphi x)=f\,(x+dx)-fx+\varphi\,(x+dx)-\varphi x=dfx+d\varphi x$$

153. La fórmula del producto de funciones

$$d\,(uv)=udv+vdu$$

se puede encontrar sin emplear L; porque, siendo $y=uv$, luego

$$y+dy=(u+du)\,(v+dv)=uv+vdu+udv+dudv$$

$$\therefore\ dy=vdu+udv;$$

$dudv$ es de segundo orden o nulo.

154. Todas las fórmulas del núm. 20 están comprendidas en la fórmula del producto:

$$d\,(uv)=udv+vdu$$

a) Hacemos $u=a$ constante, resulta $du=0$ y

$$d\,(av)=adv$$

b) sea $u=v$, resulta la potencia

$$d\,(u^2)=2\,u\,d\,u;$$

si hacemos $v=y\,z$, se obtiene

$$d\,(u\,\overline{y\,z})=u\,d\,\overline{y\,z}+y\,z\,d\,u$$

$$=u\,y\,dz+u\,z\,d\,y+y\,z\,du$$

$$\therefore d\,(u^3)=3\,u^2\,d\,u$$

$$\text{luego } d\,(u^n)=n\,u^{n-1}\,d\,u$$

c) sea v fraccionario:

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=d\,(u\,v^{-1})=u.-v^{-2}dv+v-1\;d\,u$$

$$=-\frac{u}{v^2}dv+\frac{du}{v}$$

$$=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$$

d) sea n negativo: $d\,(u^{-n})=-u^{-n1}d\,u$

e) sea n fraccionario: $d\left((u^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\,u^{\frac{1}{n}-1}\;d\,u$

155. El siguiente diagrama manifiesta cuáles son las fórmulas fundamentales de diferenciación y cuáles las funciones algebraicas a que se aplican.

- a (1)
- L u (2)
  - u^n (5)
    - u^{-n}
      - $\frac{1}{u}$ (6)
    - $u^{\frac{1}{n}}$
      - $\sqrt{u}$ (7)
    - $u^{\pm\frac{p}{q}}$
  - $u\,v$ (8)
    - $\pm au$ (4)
    - $u\,v^{-1}$ (9)
- $u \pm v$ (3)
  - $u - v$
  - $u + a$

156. J. Bertrand, Calcul Différentiel.
pág. 27: Las funciones simples son 6:

$$x^m,\ a^x,\ \mathrm{L}x,\ \text{sen}\ x,\ \cos x,\ \text{tg}\ x$$

p. 28: $x=y^2$, $x=e^y$, $x=$sen y son funciones inversas de

$$y=\sqrt{x},\quad y=\mathrm{L}x,\quad y=\text{arc sen}\ x.$$

p. 39: Una función es creciente cuando los crecimientos de la variable y de la función tienen el mismo signo.

157. A. Cournot, Traité des fonctions.

p. 103: Las funciones elementales son 3: x^m, Lx, sen x.
p. 119: $d\,(ax^m + b)^n = du^n = nu^{n-1}\,du$.

158. Ch. J. de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse.

p. 7: Los números reales, tanto racionales como irracionales, expresan las magnitudes CONTÍNUAS; y están constituídos de tal manera que entre dos números reales diferentes siempre se puede intercalar un número ilimitado de otros números.
p. 26: Las funciones elementales son 5:

$$x^m,\ a^x,\ \mathrm{L}x,\ \text{sen } x,\ \text{arc sen } x.$$

p. 59: Toda derivada que tiene una derivada finita, para un valor dado de x, es contínua en este punto.
p. 62: Hay 5 reglas de derivación: $d\,(u+v)$, $d\,(uv)$, $d\,(u : v)$, función inversa, función de funciones.

159. G. Humbert, Cours d'Analyse.

pág. 1: 0,9; 0,99; 0,999;. . .$\rightarrow$1.
p. 13: Toda cantidad fija, por pequeña que sea, no puede ser infinitesimal.

p. 19: $d\,(uvw) = uvw\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}\right)$

160. Rouché-Lévy, Calcul Différentiel.

* p. 8: $f\,(x+h) - fx = h\,(f'x + \varepsilon)$, h y $\varepsilon \rightarrow 0$

p. 32: $d\,(\mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^{m-1} + \mathrm{C}x^{m-2} + \ldots + \mathrm{H}x + \mathrm{K})$

$$= (m\mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}\,(m-1)\,x^{m-2} + \mathrm{C}\,(m-2)\,x^{m-3} + \ldots + \mathrm{H})\,dx$$

p. 42: Las funciones simples son tres: x^m, Lx, sen x.

* p. 43: $\text{lím}\ \frac{\mathrm{L}\,(x+h) - \mathrm{L}x}{h} = \frac{d\mathrm{L}x}{dx}$

161. Ch. STURM, Cours d'Analyse.

pág. 8: $\text{lím } \dfrac{x}{\text{tg } x} = \text{lím } \dfrac{\text{sen } x}{\text{tg } x} = \text{lím cos } x = 1$

$$\text{lím } \frac{\text{sen } 2x}{\text{sen } 3x} = \text{lím } \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\text{lím } \frac{\text{sen } x + 3 \text{ sen}^2 x}{x + 2x^3} = \text{lím } \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

p. 14: $d\,(ax^m + bx^n + cx^p + \ldots)$

$$= (amx^{m-1} + bnx^{n-1} + cpx^{p-1} + \ldots)\,dx$$

p. 35: $d\,(u + v\sqrt{-1}) = du + idv$

$$d\left(a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{e}{x^2}\right) = bdx^{\frac{2}{3}} - dx^{\frac{4}{5}} + edx^2$$

162. M. NAVIER, Leçons d'Analyse.

pág. 1: En Algebra las cantidades x, y son determinadas; en Cálculo representan cantidades variables.

p. 10: dx puede considerarse como la DIFERENCIA entre valores consecutivos de la variable x.

p. 12: Las funciones simples son 5:

$$x^m,\ \text{L}x,\ a^x,\ \text{sen } x,\ \text{cos } x$$

p. 32: Diferenciales usuales algebraicas:

$$d\,(ax+b),\ d\,(\,x^a\,),\ d\left(\frac{1}{x}\right),\ d\,(\sqrt{x}).$$

163. T. C. Hall, Diff. and. Int. Calculus.

p. 8: reglas: $d\,(ax)$, $d\,(x)$, $d\,(ax\pm b)$, $d\,(ax^m)$, $d\,(z+v+w+\ldots)$,

$$d\,(zv),\ d\,(z:v),\ d\,(zvw),\ d\,(\sqrt{z}),\ df\,(\mathrm{F}x)$$

p. 12: $d\,\dfrac{x^m}{(x+1)^m}=d\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^m=m\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{m-1}\cdot\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}\,dx$

164. J. Tannery, Leçons d'Alg. et d'Analyse.

p. 119: $d\,\dfrac{\mathrm{A}}{(x-a)^m}=-\dfrac{m\mathrm{A}}{(x-a)^{m+1}}\,dx$

p. 105: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\mathrm{L}a$. Se hace $a^x=1+z.\because.x=\dfrac{\mathrm{L}(1+z)}{a}$.

p. 132: Notación de Leibníz para las derivadas:

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{dfx}{dx},\quad \frac{df}{dx}.$$

p. 130: $d\,\mathrm{L}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\tfrac{1}{2}\left[\,d\,\mathrm{L}\,(+1x)-d\,\mathrm{L}\,(1-x)\,\right]=\dfrac{dx}{1-x^2}$

* p. 171: $\frac{1}{x+i} = -\frac{dx}{(x+i)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x2)^2} + \frac{2x}{(1+x2)^2} i$

165. J. M. VILLAFAÑE V. Tratado de Análisis.

p. 37: $\lim_{n \to 0} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to 0} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = e$

p. 39: serie exponencial de Euler:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

p. 40: $\lim_{x \to 0} \frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha} = m$

p. 86: Según Wallés, de $a^x = n$ sale $x = \log_a{}^n$.

$n = \text{antilog. } x.$

p. 101. $\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x} = \infty$, $\lim_{x \to 0} \frac{a^x}{x} = 0$

p. 185: funciones elementales: x^m, L x, sen x, arssen x.

p. 208: Si dos derivadas son iguales, los funciones son iguales ó difieren en un término constante.

p. 278: $d\,u^{-\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \frac{du}{\sqrt[q]{u^{p-q}}}$

p. 283: $d\sqrt[5]{3\,x^2 - 5\,x + 2} = \frac{6\,x - \quad 5}{5\sqrt[5]{(3\,x^2 - 5\,x + 2)^4}}\,d\,x$

166. A. Timmermans. Traité de Calcul Diff.

p. 23: funciones fundamentales: L x, sen x.

p. 28: Corolarios: $x,^m$ $a^{f\,x}$

p. 31: $d\sqrt[3]{1+2\,x - x^2} = dz^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} dz = \frac{2 - 2\,x}{3\sqrt[3]{(1+2x - x^2)^2}}\,dx.$

167. H. Sonnet, Eléments de Calcul Infin.

p. 6: ecuaciones fundamentales: $x,^m$ L x, sen x.
p. 10: Corolarios: $d\,(a)$, $d\,(u+v)$, $d\,(uv)$, $d\,(u:v)$, $d\,f\,(\varphi\,x)$.
p. 12: Sea $y = u:v \;.\cdot.\; y\,v = u \;.\cdot.\; du = y\,dv + v\,d\,y$

$$.\cdot.\quad dy = \frac{du - y\,dv}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

p. 27. $d\sqrt[n]{u} = d\,u^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\,u^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

aplicación: $d\sqrt[3]{ax^3 + b\,x^2 + c\,x + d} = \dfrac{3\,ax^2 + 2\,bx + c}{3\sqrt[3]{(a\,x^3 + b\,x^2 + cx + d)^3}}\,d\,x$

168. E. Catalan. Cours d' Analyse.

p. 117 a 121: Derivadas principales: D (x), D (a), D (uv),

D $(a\,v)$, D $(u,\ u_2\,u_3\ldots)$, D $(u:v)$, D $(a:v)$, D (u^n), D$\left(u\dfrac{p}{q}\right)$,

D$\left(\dfrac{1}{u\,p}\right)$, D$\left(\sqrt{u}\right)$

169. A. S. Carr, A Synopsis of Mathematics

p. 259: $\dfrac{dy-dx^2}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$

p. 260: Si u y v son funciones de x, es más correcto escribir:

$\dfrac{d\,(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$ que $d\,(u+v) = du + dv$.

p. 261: Para encontrar la derivada de x^n, se desarrolla:

$(x+dx)^n = x^n + u\,x^{n-1}\,d\,x + \dfrac{n\,(n-1)}{2\,!}x^{n-2}\,d\,x^2 + \ldots$; restamos:

$(x+dx)^n - y = ux^{n-1}\,dx = d\,(\,x^n\,)$

170. L. O. DE TOLEDO, Funciones de Variable Compleja. p. 82; funciones elementales. entera z^n; exponencial e^z; circulares directas sen z, cos z; logarítmica, L $((z))$; circulares inversas arc sen z, arc cos z.

23. Diferenciación por sustitución.—Las funciones compuestas toman una forma simple cuando se representan la variable x y las operaciones a que está sometida, por una variable auxiliar, tal como u.

Por ejemplo, para diferenciar la función compuesta

$$y=(a+b)^n,$$

sustituimos el binomio $a+bx$ por u y resulta la forma simple

$$y=u^n,$$

cuya diferencial es

$$dy=nu^{n-1}du;$$

buscamos el valor $du=d(a+bx)=bdx$; y sustituimos u por x

$$dy=n(a+bx)^n dx$$

Como segundo ejemplo, tomemos el siguiente de Navier (p. 33):

$$y=(ax^m+b)^n$$

Hacemos $v=x^m$ (1), $u=av+b$ (2), $y=u^n$ (3) y diferenciamos:

$$dv=mx^{m-1}\,dx \ (4),\quad du=adv \ (5),\quad dy=nu^{n-1}\,du \ (6)$$

sustituímos (2) y (5) en (6):

$$dy=n\ (av+b)^{n-1}\,adv$$

y aquí, (1) y (4):

$$dy=n\ (ax^m+b)^{n-1}amx^{m-1}\,dx$$

$$\therefore\ dy=amnx^{m-1}\ (ax^m+b)^{n-1}\,dx$$

Por su sencillez, este método de sustitución es muy empleado por los principiantes; pero como es demasiado largo, se ha de limitar su empleo, aplicándolo solamente a las funciones verdaderamente complicadas.

Cuando haya adquirido alguna práctica, lo que se consigue con el ejercicio constante de ejemplos, el estudiante debe tratar de hacer la DIFERENCIACIÓN MENTAL de las funciones, sin acudir a las variables auxiliares.

Para diferenciar mentalmente una función hay que DIFERENCIAR CADA UNO DE LOS SIGNOS DE OPERACIÓN QUE AFECTAN A LA VARIABLE, siguiendo el siguiente orden:

Sea la función

$$y=-\tfrac{1}{2}\,(a+bx)^3.$$

Primero SE DIFERENCIA el coeficiente con su respectivo signo, anteponiéndolos al signo d:

$$dy=-\tfrac{1}{2}\,d\ (a+bx)^3$$

En seguida SE DIFERENCIA la potencia, bajando el exponente a coeficiente, disminuyendo la potencia en una unidad y multiplicando por la diferencial de la base;

$$dy = -\tfrac{1}{2}.\, 3\,(a+bx)^2\, d\,(a+bx).$$

Por último SE DIFERENCIA la base

$$dy = -\tfrac{3}{2}\,(a+bx)^2\, bdx$$

y se ordena:

$$dy = -\tfrac{3}{2}\, b\,(a+bx)^2\, dx.$$

En la suma de funciones, SE RETIENE MENTALMENTE LA dx, como se indica. Sea la suma

$$y = x - x^2 + 5\,x^3$$

En lugar de operar así:

$$dy = dx - 2\,xdx + 15\,x^2dx,$$

se retiene en la mente la dx, escribiendo únicamente los coeficientes diferenciales de cada término, y poniendo la infinitesimal de factor común:

$$dy = (x - 2x + 15x^2)\,dx$$

Esta práctica, de separar la diferencial en dos factores, a saber, la derivada $f'x$ y la infinitesimal dx, tiene muchas ventajas en las aplicaciones del Cálculo.

En las potencias negativas o fraccionarias hay que hacer transformaciones en la derivada. Ejemplo:

$$y = \sqrt[n]{\frac{1}{ax^m - 1}} = (ax^m - 1)^{-\frac{1}{n}}$$

Se diferencia mentalmente como potencia:

$$dy = -\frac{1}{n}(ax^m - 1)^{-\frac{1}{n}-1} \cdot amx^{m-1}dx.$$

Hacemos enteros y positivos los exponentes:

$$dy = -\frac{amx^{m-1}}{n\sqrt[n]{(ax^m - 1)^{n+1}}}\,dx.$$

(*Continuará.*)