REGLAS FUNDAMENTALES DE DIFERENCIACION

POR

CARLOS WARGNY

I.—CONOCIMIENTOS PRELIMINARES

1. **Teoría de los exponentes.**—En la potencia a^n, el exponente n puede ser entero, positivo, negativo, nulo o fraccionario.

A) n POSITIVO, indica el número de veces que entra a como factor en un producto:

$$a^n = a.\ a.\ a\ldots,\ n \text{ veces como factor.}$$

$$a.\ a^2 = a^{1+2} = a^3;\ a^3.\ a^5 = a^8 \quad \therefore \quad \text{(luego)}$$

$$a^m.\ a^n = a^{m+n},$$

es decir, para multiplicar potencias de la misma base, SE SUMAN LOS EXPONENTES.

Por la inversa, el exponente se puede descomponer en sumandos y la potencia en producto:

$$a^5=a^{3+2}=a^3.\ a^2;\quad a^{1+n}=a.\ a^n.$$

En consecuencia, siendo $1=2-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, tendremos:

$$a=a^{2-1}=a^2.\ a^{-1}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}.\ a^{\frac{1}{2}}.$$

POTENCIA DE UN PRODUCTO: $(ab)^n=a^nb^n$, porque $(ab)^n=ab.\ ab.\ ab\ldots$, n veces como factor.

POTENCIA DE UNA FRACCIÓN: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}+\cdots=\frac{a^n}{b^n}.$

POTENCIA DE UNA POTENCIA: $(a^n)^m=a^n.\ a^n.\ a^n\ldots=a^{nm}.$

Obsérvese que $a^{mn}=(a^m)^n=(a^n)^m$; y que

$$a^{10}=(a^2)^5=(a^5)^2=(a^{3+2})^2=(a^3.\ a^2)^2=a^6.\ a^4.$$

Conocidos estos preliminares, ya no se podrá confundir

$$a^{m+n} \text{ con } a^{mn} \text{ ni } (a^m)^n \text{ con } a^{m^n}.$$

B) *n* NEGATIVO.—Recíprocamente, para dividir potencias de la misma base, SE RESTAN los exponentes:

$$\frac{2^5}{2^3}=2^{5-3}=2^2,\ \text{porque}\ \frac{2^5}{2^3}=\frac{2^3.2^2}{2^3}=2^2;$$

$$\therefore \qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

Si $m < n$ o $n=m+p$, tendremos que

$$\frac{a^m}{a^{m+p}}=a^{m-m-p}=a^{-p};\ \text{pero}\ \frac{a^m}{a^{m+p}}=\frac{1}{a^p}$$

$$\therefore \qquad a^{-p}=\frac{1}{a^p};$$

esto es, para cambiar el signo del exponente, SE INVIERTE LA POTENCIA. Por esta razón se escribe

$$a^{m-n}=\frac{1}{a^{n-m}};\ \frac{1}{a^{-m}}=a^m;\ a^{-1}=\frac{1}{a};$$

$$\frac{1}{a^{-1}}=a;\ a^{-n}=(a^n)^{-1}=\frac{1}{a^n}.$$

Conforme con lo anterior tendremos que

$$a+b=a\left(1+\tfrac{b}{a}\right)=a\left(1+ba^{-1}\right);$$

$$\text{y que}\quad (a+1)^n=\left[a\left(1+\tfrac{1}{a}\right)\right]^n=a^n\left(1+a^{-1}\right)^n$$

Por último, toda fracción puede tomar la forma de entero o de potencia, cambiando el signo del exponente del denominador:

$$\frac{1}{a}=a^{-1};\quad \frac{a^2}{b^3}=a^2\,b^{-3};\quad \left(\frac{a-b}{a-b}\right)^n=(a+b)^n\,(a-b)^{-n}$$

En la Diferenciación es preferible escribir

$$a^{-n} \text{ en vez de } \frac{1}{a^n}$$

C) n NULO. $a^0=a^{1-1}=\dfrac{a}{a}=1$, lo que nos dice que toda cantidad elevada a cero es igual a la unidad.

Conforme con lo anierior, la serie de potencias sucesivas

$$\frac{1}{a^n},\dots\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a},\ 1,\ a,\ a^2,\dots\ a^n,$$

toma la forma más conveniente para nuestro estudio:

$$a^{-n},\dots\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^0,\ a,\ a^2,\dots\ a^n.$$

D) n FRACCIONARIO.—Siendo $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt[n]{a^n} = a$, tendremos que $a = a^{2:2} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$; extraemos raíz cuadrada y se obtiene $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},$$

es decir, el denominador del exponente pasa a ser índice del radical. De lo cual se desprende que

$$a^{\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{a})^2 = (a^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^2};$$

y que

$$a^{3'142} = a^{\frac{3142}{1000}} = a^{\frac{1571}{500}} = \sqrt[500]{a^{1571}}$$

En la Diferenciación todo radical se debe expresar en forma de potencia, poniendo el índice como divisor del exponente:

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt[3]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{3}}; \quad \frac{1}{\sqrt{(a-b)^3}} = (a-b)^{-\frac{3}{2}}$$

En resumen, la forma entera a^n comprende las fracciones y los radicales, según que n sea negativo o fraccionario; y en la Diferenciación conviene considerar las fracciones y radicales como potencias.

2. **Teoría de los logaritmos**.—En la igualdad

$$a^n=b,$$

el exponente n de la base a es el logaritmo de la potencia o número b; lo que se indica así:

$$n=\log_a(a^n)=\log_a b.$$

La base a puede ser cualquiera, pero sólo se usan como tales la base 10 y el número trascendente e (N.º 7). Cuando la base es 10, se escribe $n=\log(10^n)$ y los logaritmos son *vulgares*; y cuando la base es e, se escribe $n=\mathrm{L}(e^n)$ y los logaritmos son *naturales*. Los símbolos log y L son signos de operación.

Obsérvese que de la potencia $a^n=b$ se deduce $n=\log(a^n)$, o bien, $n=\log_a b$, y esta operación equivale a *despejar* el exponente n. Por la inversa, para despejar a 2 de $n=\log 2$, se escribe $2=10^n$; y de $n=\mathrm{L}2$, se despeja el número 2 escribiendo $2=e^n$.

CÁLCULO DE LOS LOGARITMOS VULGARES.—Dándole a n diferentes valores, la potencia $10^n=b$ adquiere también diferentes valores.

Por ejemplo, sea $n=0$; tendremos $10^0=1$; luego el exponente 0 es el logaritmo de 1, o bien $0=\log 1$.

$$\begin{array}{llll}
\text{Sea } & n=1, & 10^1=10 & \therefore\ 1=\log 10; \\
 & n=2, & 10^2=100 & \therefore\ 2=\log 100; \\
 & n=3, & 10^3=1000 & \therefore\ 3=\log 1000.
\end{array}$$

En este cálculo se ve que al variar n, b también varía, esto es, los valores de b DEPENDEN de los de n, lo que se expresa diciendo que b ES FUNCIÓN DE n, y esta relación de dependencia se denota así:

$$b = f(n)$$

o bien, $$f(n) = 10^n.$$

Si en lugar de n ponemos los valores de más arriba obtendremos:

$$f(0) = 10^0 = 1 \quad \therefore \quad 0 = \log 1$$
$$f(1) = 10^1 = 10 \quad \therefore \quad 1 = \log 10$$
$$f(2) = 10^2 = 100 \quad \therefore \quad 2 = \log 100$$

La notación de FUNCIÓN DE, $f()$, es muy importante en este estudio.

Las variaciones de n son aquí positivas y corresponden a los logaritmos de las potencias ENTERAS de 10. Los números decimales tienen logaritmos negativos:

$$f(-1) = 10^{-1} = 0{,}1 \quad \therefore \quad -1 = \log 0{,}1$$
$$f(-2) = 10^{-2} = 0{,}01 \quad \therefore \quad -2 = \log 0{,}01$$
$$f(-3) = 10^{-3} = 0{,}001 \quad \therefore \quad -3 = \log 0{,}001$$

*(Difícil). Para calcular $10^n = 2$, hacemos $n = 1 : x$, porque $1 > n > 0$: $10^{\frac{1}{x}} = 2 \; \therefore \; 10 = 2^x$.

Sea $x = 3$, $2^3 = 8 \; \therefore \; x > 3$; sea $x = 3 + 1 : x^{\mathrm{I}}$.

$10 = 2^{3+1:x'} = 2^3, 2^{1:x'} \; \therefore \; 2 = (1{,}25)^{x'}$.

Sea $x^{\mathrm{I}} = 3 \; \therefore \; 1{,}25^3 = 1{,}953125 \; \therefore \; x^{\mathrm{I}} > 3$.

Sea $x^{\mathrm{I}} = 3 + \frac{1}{x''}$, $2 = (1{,}25)^{3+\frac{1}{x''}} = 1{,}25^3 \cdot 1{,}25^{1:x''}$, Prosiguiendo del mismo modo esta serie de operaciones, se obtiene la FRACCIÓN CONTINUA

$$\log 2 = \frac{1}{3+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{9+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{16+}\cdots$$

$$= 0{,}301\ 029\ 995\ 663\ 981\ldots$$

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS LOGARITMOS.— 1.ª El log. de cualquiera base es igual a la unidad.

Lo que es evidente, porque siendo $a^1 = a$ $\therefore$ $1 = \log_a a$ Luego, $1 = \log 10 = Le$.

2.ª El log. de la unidad, cualquiera que sea la base, es igual a cero: $0 = \log 1 = L1$.

3.ª El log. de un producto es igual a la suma de los logs. de los factores: $\log(ab) = \log a + \log b$. De lo cual se deduce, si $b = a$, $\log(a^2) = 2\log a$; $\log(a^n) = n\log a$. En consesecuencia, $\log(1{:}a) = \log(a^{-1}) = -\log a = \text{colog}\ a$; $\log(a{:}b) = \log(ab^{-1}) = \log a - \log b$; $\log(\sqrt[n]{a}) = \log(a^{1:n})$ $= \frac{1}{n}\log a$.

En las reglas anteriores está fundado el CÁLCULO LOGARÍTMICO. Por ejemplo, para calcular el valor de $x = \frac{ab}{c}$, tomamos o aplicamos log:

$$\log x = \log a + \log b - \log c.$$

Sea ahora,

$$x = \sqrt[3]{\frac{a^2 b^3}{c\, d^4}}:$$

aplicamos log:

$$\log x = \tfrac{1}{5}(2 \log a + 3 \log b - \log c - 4 \log d).$$

El alumno debe habituarse a este cálculo.

Con la aplicación de log, el signo $\times$ se reduce a $+$, : a $-$, el exponente pasa a ser coeficiente y el índice, divisor.

Para calcular $x = a + b$, conviene hacerlo así:

$$\log (a + b) = \log \left[a (1 + b \,.\, a)\right] = \log a + \log (1 + b : a).$$

Los logarítmos de Gauss se emplean en tales casos.

Con el empleo de los logaritmos, los monomios se descomponen en polinomios, observación que se ha de tener presente.

3. **Binomio de Newton.**—Efectuemos las multiplicaciones sucesivas de $a + b$ por $a + b$:

$$
\begin{aligned}
(a + b)^1 &= a + b,\\
(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2,\\
(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\\
(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,\\
(a + b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + a^4.
\end{aligned}
$$

Los segundos miembros de estas identidades son los DESARROLLOS de los primeros miembros; todos los términos son HOMOGÉNEOS o del mismo grado; y los coeficientes forman el triángulo aritmético de Pascal:

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1,
\end{array}
$$

en el cual un número cualquiera se obtiene sumando el que está encima con el de la izquierda; de modo que la sexta línea será:

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1;$$

y la séptima potencia de $a+b$:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Estos coeficientes se expresan, en términos del exponente, así:

$$21 = \frac{7\text{-}6}{2} = \frac{7.(7-1)}{1.2}, \quad 35 = \frac{7.6.5}{2.3} = \frac{7(7-1)(7-2)}{1.2.3},$$

$$35 = \frac{7.6.5.4}{2\text{-}3\text{-}4} = \frac{7(7-1)(7-2)(7-3)}{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4}, \text{ etc.}$$

Los productos de los números sucesivos, llamados factoriales, se denotan por el signo !:

$$2! = 2.1, \quad 3! = 3.2.1, \quad n! = n(n-1)! = n(n-1)\ldots 1$$

En consecuencia, la octava potencia de $a+b$ es:

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + \frac{8.7}{2!}a^6b^2 + \frac{8.7.6}{3!}a^5b^3 + \ldots$$

y CUALQUIERA que sea la potencia de $a+b$:

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

Tal es la fórmula del Binomio de Newton, cuyo estudio pertenece al Algebra Superior.

Desarrollo en serie.—El medio más natural que se presenta a la mente para calcular una expresión complicada, consiste en descomponerla en términos sencillos, y esto es lo que constituye el DESARROLLO EN SERIE. Desarrollar en serie es, pues, descomponer una o más operaciones complicadas en una suma de términos. El Binomio de Newton sirve para este objeto y ha sido el origen de fórmulas análogas que se emplean para desarrollar en serie.

Pero antes de citar ejemplos, daremos a conocer algunas formas particulares del Binonio.

A) BINOMIO DIFERENCIA: $(a - b)^n = a^n - n\,a^{n-1}b$

$$+ \frac{n(n-1)}{2\,!}\,a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!}\,a^{n-3}\,b^3 + \dots$$

En este desarrollo los signos son ALTERNOS, esto es, las potencias pares de b son positivas y las impares, negativas.

B). BINOMIO SIMPLIFICADO.—Hacemos $a = 1$:

$$(1 + b)^n = 1 + n\,b + \frac{n(n-1)}{2\,!}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!}\,b^3 + \dots$$

C) REDUCCIÓN AL BINOMIO SIMPLIFICADO:

$$(a + b)^n = [\,a\,(1 + b : a)\,]^n = a^n\,(1 + b : a)^n$$

$$= a^n \left[1 + n\frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{b^3}{a^3} + \ldots \right]$$

D) Trasformar un monomio en binomio:

$a = a + 1 - 1 = 1 - (1 - a) = 1 - \triangle$, siendo $\triangle = 1 - a$.

Ejemplo: $2 = 3 - 1 = 3\left(1 - \frac{1}{3}\right)$.

Sin embargo, en el cálculo de $\sqrt{2}$ se verá que conviene más proceder así:

$$a = \frac{m}{p^n} + \frac{r^n - s}{p^n} + \frac{r^n\left(1 - \frac{s}{r^n}\right)}{p^n} = \left(\frac{r}{p}\right)^n \left(1 - \frac{s}{r^n}\right)$$

E) Efectuemos ahora la división $1 : 1 + x$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + x^{2n} - x^{2n+1} + \ldots$$

La fórmula del Binonio también sirve para este objeto, si le damos a la fracción la forma de potencia:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 + (-1)x + \frac{-1.-2}{2!}x^2 + \frac{-1.-2.-3}{3!} + .$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

El desarrollo se compone de un NÚMERO INFINITO de términos y se llama SERIE. De modo que el desarrollo del Binomio es una serie cuando el exponente es negativo o fraccionario.

Consideremos, ahora, la serie

$$f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+\dots+x^n+x^{n+1}+\dots$$

si, en lugar de x, ponemos un valor entero, la serie es CRECIENTE O DIVERGENTE, como sigue:

$$f(1)=1+1+1+1+\dots$$
$$f(1)=1+2+4+8+16+32+\dots$$
$$f(1)=1+3+9+27+81+\dots$$

Pero si x es fraccionario, la serie es DECRECIENTE-

$$f(\tfrac{1}{2})=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\dots$$

$$f(\tfrac{1}{10})=1+0{,}1+0{,}01+0{,}001+0{,}0001+\dots$$

Estas dos series decrecientes son CONVERGENTES, porque la suma de sus n primeros términos tiende hacia un límite finito y determinado, cuando n crece indifinidamente.

F). Para extraer la raíz cuadrada de $1+x$, se da al radical la forma de potencia:

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2\,!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3\,!}x^3+\dots$$

$$=1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3-\tfrac{5}{128}x^4+\tfrac{7}{256}x^6+\dots$$

Si en esta nueva serie hacemos $x=1$, obtendremos:

$$\sqrt{2}=1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}-\tfrac{5}{128}+\tfrac{7}{256}-\dots$$

Para calcular RÁPIDAMENTE la raíz cuadrada de 2, vamos a transformar la serie anterior en otra que sea MÁS CONVERGENTE, de modo que baste sumar los primeros términos para obtener $\sqrt{2}$ con muchas cifras exactas. Se consigue que la serie sea muy convergente, descomponiendo a 2 de tal forma que los denominadores de la serie sean números muy grandes. Por ejemplo, $2=\frac{8}{4}=\frac{9-1}{4}=\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{9}\right)$.

$$\therefore \quad \sqrt{2}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{18}-\frac{1}{648}-\frac{1}{3888}-\frac{5}{209\ 952}-\ldots\right)$$

Pero se obtiene una serie más convergente aún, operando como se indica:

$$2=\frac{800}{400}=\frac{28^2+4^2}{400}=\frac{28^2}{20^2}\left(1+\frac{4^2}{28^2}\right)=\left(\frac{7}{5}\right)^2\left(1+\frac{1}{7^2}\right)$$

$$\therefore \sqrt{2}=\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{7^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{7}{5}\left(1+\frac{7}{2.7^2}-\frac{1}{2^3.7^4}+\frac{1}{2^4.7^6}-\ldots\right)$$

Convirtiendo estas fracciones en decimales, resulta:

$\sqrt{2}$=1,407	000	000	000	000	000	000..
+0,014	285	714	285	714	285	714..
—0,000	072	886	297	376	093	294..
+0,000	000	743	737	728	327	482..
—0,000	000	009	486	450	616	421..
+0,000	000	000	135	520	723	091..
—0,000	000	000	002	074	296	782..
+0,000	000	000	000	033	261	312..
—0,000	000	000	000	000	551	526..
+0,000	000	000	000	000	009	374..

Sumados los términos positivos y restados los negativos, encontramos el valor de $\sqrt{2}$, con 18 cifras decimales exactas:

$$\sqrt{2}=1,414\ \ 213\ \ 562\ \ 373\ \ 095\ \ 048.$$

Se ha hecho detalladamente el cálculo anterior de $\sqrt{2}$ para que el principiante sepa lo que es una serie, que se compone de un número infinito de términos, que es convergente cuando va disminuyendo hasta reducirse a cantidades muy pequeñas, lo cual no se verifica sino cuando el denominador es muy grande.

(*Continuará*)