TEORIA DE LA ELASTICIDAD

POR

ALBERTO OBRECHT

(*Continuacion*)

Se deduce de las dos últimas

$$y\,dy+z\,dz=0$$
$$y\,dz-z\,dy=x\,(y^2+z^2)\,dk$$

Sea entónces

$$y=x\cos\theta$$
$$z=r\,\text{sen}\,\theta$$

Se obtiene

$$d\,r=0$$
$$d\theta=x\,dk$$

En resúmen el cambio de lugar continuo de una molécula de abcisa x, situada a la distancia r del eje del cilindro está definido por las fórmulas

$$x = c^{te}$$
$$r = c^{te}$$
$$\theta = k\,x$$

Es el mismo resultado obtenido para la deformacion elemental.

CAPITULO VIII

FLEXION

Se supone que las fuerzas que obran sobre cada base se reducen a un par cuyo eje coincide con uno de los ejes principales de inercia de la base.

Se elije el eje OZ, paralelo al eje de este par i se tiene, en las ecuaciones (c),

$$F = M_x = M_y = 0$$
$$M_z = M$$

Estas ecuaciones quedan satisfechas si se adopta

$$p_{xy} = p_{xz} = 0$$
$$p_{xx} = \frac{M}{I}\, y$$

I es el momento de inercia de la seccion recta, respecto del eje OZ.

Con estos valores de las presiones directrices, la ecuacion

(d) de continuidad está satisfecha idénticamente i las presiones, sobre los elementos de la superficie lateral, son nulas; luego las condiciones del equilibrio superficial son tambien satisfechas idénticamente.

Sea ahora

$$\frac{M}{E\,I}=k$$

Las ecuaciones (e) dan

$$\begin{array}{ll}
\frac{d\,u}{d\,x}=-k\,y & \frac{d\,v}{d\,z}+\frac{d\,w}{d\,y}=0 \\
\frac{d\,v}{d\,y}=m\,k\,y & \frac{d\,w}{d\,x}+\frac{d\,u}{d\,z}=0 \\
\frac{d\,w}{d\,z}=m\,k\,y & \frac{d\,u}{d\,y}+\frac{d\,v}{d\,x}=0
\end{array}$$

Se deduce la solucion particular

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l}
u=-k\,x\,y \\
v=k\,\frac{x^2}{2}+m\,k\,\frac{y^2-z^2}{2} \\
w=m\,k\,y\,z
\end{array}\right.$$

Estas ecuaciones definen los cambios de lugar de las moléculas durante la deformacion.

Se llama *fibra* la succesion de las moléculas que se encuentran, ántes de la deformacion, sobre una paralela al eje del cilindro i *fibra neutra* la que coincide con este eje.

Las ecuaciones (9) muestran que la fibra neutra no tiene estension lonjitudinal i que ella se desplaza en el plano $X\,O\,Y$.

Este se llama plano de *flexion.* La curva descrita por la fibra neutra, despues de la deformacion, tiene por ecuacion, segun (9),

$$v = k \frac{x^2}{2}$$

Esta representa una parábola de eje $O\ Y$ i su curvatura, en el punto O, es igual a k. Sea R el radio de curvatura correspondiente; se tiene, al reemplazar k por su valor,

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E\ I}$$

Tal es, por consiguiente, la relacion entre la curvatura de la fibra neutra, en su punto medio, i el momento del *par de flexion.*

Sean X, Y, Z las coordenadas de la posicion que toma la molécula x, y, z despues de la deformacion; se tiene, por definicion,

$$X = x + u$$
$$Y = y + v$$
$$Z = z + w$$

Luego, si se desprecia k^2,

$$X - x + k\ x\ Y = 0$$

Esta ecuacion representa un plano, normal a la fibra neutra en el punto de abcisa x. Como la ecuacion no contiene y, ella esta satisfecha con las coordenadas de todas las moléculas contenidas, ántes de la deformacion, en el plano de la seccion recta de abcisa x. Luego *la flexion traslada las moléculas de una seccion recta en otro plano, normal a la fibra neutra deformada, i esta fibra conserva una lonjitud invariable.*

Se deduce tambien de las ecuaciones (9) que las moléculas contenidas en el plano de flexion ($z=0$), o bien en el plano de la seccion recta medía ($x=0$) quedan en estos respectivos planos.

En particular las trayectorias de las moléculas de la seccion recta media verifican la ecuacion diferencial

$$\frac{dy}{y^2-z^2}=\frac{dz}{2zy}$$

Se deduce de ella

$$\frac{dz}{z}=\frac{2y\,dy+2z\,dz}{y^2+z^2}$$

Luego

$$y^2+z^2-C\ z=0$$

Esta representa una familia de circunferencias tanjentes, en O, al plano de flexion.

Ademas, si se designa por σ el cambio de lugar de una molécula del referido plano i por r su distancia al punto O; se deduce

$$\sigma=m\,k\frac{x^2}{2}$$

Se ve que la magnitud de los cambios de lugar de las moléculas son proporcionales a los cuadrados de sus distancias al centro de la seccion.

FLEXION CONTINUA

Cuando el par de flexion obra de una manera continua, las formulas (9) deben reemplazarse por ecuaciones diferenciales equivalentes. Sin embargo el caso es distinto de los dos anteriores porque el cuerpo deformado deja de ser un cilindro. Es preciso, por consiguiente, suponer que la cantidad k queda mui pequeña.

En estas condiciones, la integracion conduce prácticamente a las mismas fórmulas (9).

FLEXION DE UN CILINDRO CUYAS DIMENSIONES TRASVERSALES SON MUI PEQUEÑAS EN COMPARACION DE SU LONJITUD I SOMETIDO A LA ACCION DE FUERZAS PARALELAS CUALESQUIERA

Se supondra que las fuerzas son paralelas al eje OY. En una seccion recta, cualquiera el sistema de las presiones es equivalente a las fuerzas que obran a un mismo lado de la seccion i estas últimas son equivalentes, en el centro de gravedad de la seccion, a una resultante jeométrica F, paralela a OY, i a un par de momento M, paralelo a OZ.

Se tienen, por consiguiente, las ecuaciones

$$(10)\quad \begin{cases} \int p_{xx}\, d\omega = 0 & \int (y\, p_{xz} - z\, p_{xy})\, d\omega = 0 \\ \int p_{xy}\, d\omega = F & \int z\, p_{xx}\, d\omega = 0 \\ \int p_{xz}\, d\omega = 0 & \int y\, p_{xx}\, d\omega = M \end{cases}$$

Estas ecuaciones difieren esencialmente de las ecuaciones (c) porque F i M dependen de x; ademas, en numerosas aplicaciones, F es una funcion discontinua de x. Mientras tanto, M es siempre una funcion continua; en efecto, cuando la abcisa de la seccion recta tiene un incremento dx, la variacion correspondiente de M es

$$d\,M = -F\,dx$$

Por consiguiente

$$\frac{d\,M}{dx} = -F$$

Se comprueba así que M es siempre una funcion continua de x.

El problema de determinar las presiones directrices que satisfacen a las ecuaciones (10) i a las ecuaciones (a) de continuidad, presenta grandes dificultades, pero la solucion se simplifica si las dimensiones trasversales del cilindro se consideran como infinitamente pequeñas en comparacion de las dimensiones lonjitudinales.

Se observa, en primer lugar, que las ecuaciones (10) quedan satisfechas si se adopta

$$p_{xx} = -\frac{M}{I}y$$

$$p_{xy} = \frac{F}{\Omega}$$

$$p_{xz} = 0$$

El cuociente de p_{xy} por p_{xx} es del órden de la razon entre las dimensiones trasversales i lonjitudinales; en consecuencia p_{xy} puede despreciarse en comparacion de p_{xx}.

Por otra parte se tiene

$$\frac{d\,p_{xx}}{d\,x} = -F\frac{y}{I}$$

$$\frac{d\,p_{xx}}{dy} = \frac{M}{I}$$

El cuociente de la primera derivada por la otra es tambien del orden de la razon entre las dimensiones trasversales i lonjitudinales, por consiguiente se puede despreciar la derivada de p_{xx} respecto de x, en comparacion de su derivada respecto de y.

Se deduce que en un elemento del cilindro, comprendido entre dos secciones normales, infinitamente próximas una de otra, se pueden reducir las presiones directrices a la componente p_{xx} i considerar esta como independiente de x; es el caso estudiado mas arriba: la fibra neutra del cilindro elemental queda en el plano de flexion i su curvatura es

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E\,I}$$

Esta misma ecuacion se aplica a todos los puntos de la fibra neutra del cilindro total i se puede admitir que las moléculas de una seccion, perpendicular a $O\,X$, en el cilindro primitivo, se colocan normalmente a la fibra neutra, despues de la deformacion.

En las aplicaciones, el radio de curvatura R es mui grande en comparacion de los dimensiones lonjitudinales del cilindro, luego, si se designan por x, y las coordenadas de un punto de la fibra neutra deformada, se tiene, con suficiente aproximacion,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E\,I}$$

VIGA PESADA APOYADA EN SUS DOS ESTREMOS

Sea $2a$ la distancia de los dos puntos de apoyo; estos se encuentran por hipótesis a un mismo nivel. Sean tambien P el peso de la unidad de lonjitud de la viga, x la abcisa de una seccion vertical, contada a partir del punto medio de la viga; se tiene

$$M = P\,a\,(a-x) - P\,\frac{(a-x)^2}{2} = P\,\frac{a^2-x^2}{2}$$

Luego

$$\frac{M}{E\,I} = \frac{P}{2\,E\,I}\,(a^2-x^2)$$

Se pone, para simplificar,

$$\frac{P\,a^3}{E\;I} = \varepsilon$$

La cantidad ε es un coeficiente numérico que, por lo jeneral, es mui pequeño.

La ecuacion diferencial de la fibra neutra es entónces

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varepsilon}{2\, a^3} (a^2 - x^2)$$

Se deduce

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon}{2\, a^3}\left(a^2\, x - \frac{x^3}{3}\right) + A$$

$$y = \frac{\varepsilon}{2\, a^3}\left(a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right) + A\, x + B$$

Las constantes arbitrarias A i B se calculan de manera que y sea nulo para $x = \pm a$; se averigua así que $A = o$ i

$$B = -\frac{5}{24}\, \varepsilon\, a$$

En resúmen la ecuacion de la fibra neutra es

$$y = \varepsilon \frac{x^2\,(6\, a^2 - x^2)}{24\, a^3} - 5\, \frac{\varepsilon\, a}{24} = -\frac{\varepsilon\, a}{4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(5 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

La flecha es

$$\frac{5}{24}\, \varepsilon\, a$$

VIGA EMPOTRADA EN SUS DOS ESTREMOS

El empotramiento equivale a la accion de un par, que obra junto con la reaccion de apoyo, i obliga la fibra neutra a tener una tanjente horizontal, en el punto considerado.

En consecuencia, si se designa por X el par incognito, se tiene, en una seccion de abcisa x,

$$M = P\frac{a^2 - x^2}{2} - X$$

El momento X se determina con la condicion que la tanjente a la fibra neutra sea nula para $x = \pm a$.

La ecuacion diferencial de la fibra neutra es

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{2EI}(a^2 - x^2) - \frac{X}{EI}$$

Se deduce

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{2EI}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{X}{EI}x + A$$

Para que la tanjente sea horizontal cuando $x = \pm a$ es preciso que la constante arbitraria A sea nula i que se tenga

$$X = \frac{P a^2}{3}$$

Se deduce

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{6\,EI}(a^2\,x-x^3)$$

O bien

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varepsilon}{6\,a^3}(a^2\,x-x^3)$$

Luego

$$y=\frac{\varepsilon}{6\,a^3}\left(a^2\,\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)+B$$

La ordenada y debe ser nula para $x=\pm a$, luego

$$B=-\frac{\varepsilon\,a}{24}$$

Se deduce

$$y=-\frac{\varepsilon}{24\,a^3}(x^2-a^2)^2$$

La flecha es

$$\frac{\varepsilon\,a}{24}$$

VIGA EMPOTRADA EN UN ESTREMO I APOYADA EN EL OTRO

Se elije el oríjen de coordenadas en el punto de empotramiento. La reaccion, en el punto de apoyo, no es ahora igual a *a P;* sea $\lambda\,a\,P$ su valor se tendra

$$M=\lambda\,a\,P\,(2\,a-x)-P\frac{(2\,a-x)^2}{2}$$

Luego la ecuacion diferencial de la fibra neutra es

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\lambda\,\varepsilon}{a^2}(2\,a-x)-\frac{\varepsilon}{2\,a^3}(2\,a-x)^2$$

La integracion da

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\lambda\,\varepsilon}{a^2}\,\frac{(2\,a-x)^2}{2}+\frac{\varepsilon}{2\,a^3}\,\frac{(2\,a-x)^3}{3}+A$$

$$y=\frac{\lambda\,\varepsilon}{a^2}\,\frac{(2\,a-x)^3}{6}-\frac{\varepsilon}{2\,a^3}\,\frac{(2\,a-x)^4}{12}+A\,x+B$$

La incognita λ i las constantes A i B se determinan de tal modo que la tanjente sea horizontal para $x=o$, i la ordenada nula para $x=o$ i $x=2\,a$.

Se obtiene así

$$-2\,\lambda\,\varepsilon+\frac{4}{3}\,\epsilon+A=o$$

$$\frac{\lambda\,\varepsilon}{a^2}\,\frac{8\,a^3}{6}-\frac{\varepsilon}{4\,a^3}\,\frac{16\,a^4}{12}+B=o$$

$$2\,A\,a+B=o$$

Se deduce

$$\lambda=\frac{3}{4},\ A=\frac{\varepsilon}{6},\ B=-\frac{a\,\varepsilon}{3}$$

En consecuencia

$$y=\frac{\varepsilon}{8}\,\frac{(2\,a-x)^3}{a^2}-\frac{\varepsilon}{24}\,\frac{(2\,a-x)^4}{a^3}+\frac{\varepsilon\,x}{6}-\frac{a\,\varepsilon}{3}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3\,\varepsilon}{8}\,\frac{(2\,a-x)^2}{a^2}+\frac{\varepsilon}{6}\,\frac{(2\,a-x)^3}{a^3}+\frac{\varepsilon}{6}$$

Para determinar la flecha se busca la abcisa del punto, en el cual la tanjente es horizontal; ella esta definida por la ecuacion

$$4\,x^2 - 15\,a\,x + 12\,a^2 = o$$

Se deduce

$$\frac{x}{2\,a} = 0{,}5785$$

La flecha correspondiente es

$$0{,}0867\,a\,\varepsilon$$

En resúmen las flechas, en los tres casos estudiados, son los siguientes:

dos apoyos..................	$0{,}2083\ a\,\varepsilon$
dos empotramientos.........	$0{,}0417\ a\,\varepsilon$
un empotramiento i un apoyo	$0{,}0867\ a\,\varepsilon$

La lonjitud total de la viga es $2\,a$; ε es un coeficiente numérico definido por la relacion

$$\varepsilon = \frac{P\,a^3}{EI}$$

P es el peso de la unidad de lonjitud de la viga, E su coeficiente de elasticidad, I el momento de inercia de la seccion recta respecto de un eje perpendicular al plano de flexion.