HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

POR

CARLOS WARGNY

(*Continuacion*)

CAPITULO XII.

LAS MATEMATICAS DURANTE EL RENACIMIENTO

(1450 - 1637)

Son diversas las causas que motivaron el progreso de las ciencias exactas en esta época. Las obras clásicas de los griegos i de los árabes eran conocidas en las escuelas de Europa desde mediados del siglo XV; despues de la caida de Bizancio o Constantinopla, emigraron a Italia muchos hombres de estudio de la ciencia griega i de sus tradiciones; i luego con la invencion de la imprenta, se difundieron rápidamente los conocimientos adquiridos. Las producciones de los autores, ántes de este invento, eran conocidas de un escaso número de lectores, en razon del subido precio que alcanzaban las copias manuscritas de los orijinales. Es cierto que las bibliotecas públicas facilitaban la lectura de las obras clásicas; mas, despues de la destruccion de la biblioteca de Alejandría, i durante toda la Edad Media no se establecieron centros públicos científicos donde se pudieran reunir los hombres de estudio. Con estos antecedentes, se esplica cómo la introduccion de la imprenta señala el principio de una era nueva tanto en el mundo científico como en el político i literario. Creáronse, ademas, otras universidades, para satisfacer el vivo deseo de instruirse de todos los pueblos; el descubrimiento de América i las discusiones que precedieron a la Reforma, inundaron la Europa de ideas nuevas. En circunstancias tan favorables, la difusion de las ciencias matemáticas se abrió fácilmente paso junto con la de los demas conocimientos humanos.

Durante el primer siglo del Renacimiento, se perfeccionó el áljebra sincopada i la trigonometría; en las postrimerías del siglo XVI se creó la dinámica; i al comenzar el siglo siguiente la jeometría adquirió nuevas teorías i con ello au mentó su desarrollo considerablemente.

PROGRESOS DEL ÁLJEBRA I LA TRIGONOMETRÍA

Regiomontano (1436 - 1476), cuyo verdadero nombre era Juan Muller, nació en Königsberg (oríjen de *regiomontanus*), estudió bajo la direccion de Purbach, en la Universidad de Viena, i dió a la publicidad en colaboracion con su maestro un análisis del Almagesto, haciendo uso de los términos tri gonométricos *seno i coseno*. En 1490 publicó un escrito sobre astronomía, acompañado de tablas astronómicas i de los valores numéricos de las tanjentes naturales. En 1462 habia dejado la Universidad; viajó por Italia i Alemania, hasta que se estableció, por fin, en 1471, én Nuremberg, donde instaló un observatorio astronómico, una escuela i una imprenta. Aquí escribió tres obras de astronomía; i adquirió gran nombradia por haber construido una águila mecánica que, remontándose por los aires, saludó la entrada a la ciudad del emperador Maximiliano I.

Llamado por el papa Sixto IV para estudiar la reforma del calendario, se trasladó a Roma, donde fué asesinado poco tiempo despues.

Mui conocedor de los testos griegos i árabes, se familiarizó con sus descubrimientos; i entre las observaciones que hace, menciona las obras de Diofanto. Fruto de sus estudios es la obra *De Triángulis*, escrita en 1464, que es la primera esposicion metódica de la trigonometría plana i esférica, en la que hace uso de las funciones trigonométricas *seno* i *coseno*. Consta esta produccion de cinco libros, de los cuales los tres primeros versan sobre la resolucion de los triánglos planos, conocidos tres de sus elementos; en el último estudia la trigonometría esférica. Entre los problemas que resuelve, notamos el siguiente: Dada la diferencia de dos lados de un triángulo, la altura del tercer lado i la diferencia de los segmentos que determina, resolver el triángulo. Sea $A\,B\,G$ el triángulo, $B\,G$ la base, $A\,D$ la altura, $B\,D$, $D\,G$ los segmentos. Llama *res* a la incógnita, *census* a su cuadrado i resuelve la cuestion por medio de una ecuacion de segundo grado (*per artem rei et census*); supone que la diferencia de los lados vale 3, la altura 10, la diferencia de los segmentos 12, la base x i obtiene:

$$\mathrm{B\,D} = \frac{1}{2}\,x - 6, \qquad \mathrm{A\,B} = 2\,x - \frac{3}{2},$$

$$\overline{\mathrm{A\,B}}^{\,2} = 4\,x^2 + \frac{9}{4} - 6, \quad \overline{\mathrm{B\,D}}^{\,2} = \frac{1}{4}\,x^2 + 36 - 6\,x,$$

$$\text{Suma} \quad \overline{\mathrm{B\,D}}^2 + \overline{\mathrm{A\,D}}^2 = \overline{\mathrm{A\,B}}^2 = 100,$$

de lo cual sale B G. El cálculo es éste:

$$\overline{\mathrm{A\,G}}^2 - \overline{\mathrm{D\,G}}^2 = \overline{\mathrm{A\,B}}^2 - \overline{\mathrm{D\,B}}^2$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{A\,G}}^2 - \overline{\mathrm{A\,B}}^2 = \overline{\mathrm{D\,G}}^2 - \overline{\mathrm{D\,B}}^2\,,$$

o bien, $$A\,G - A\,B = 3 = \frac{1}{4}\,(D\,G - D\,B),$$

$$A\,G + A\,B = 4x = 4\,(D\,G + D\,B),$$

$$A\,B = 2x - \frac{3}{2},\ B\,D = \frac{1}{2}x - 6,$$

$$\left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x - 6\right)^2 + 100 \;\therefore\; x = \frac{1}{3}\sqrt{321}.$$

El áljebra sincopada, usada entónces, complica en estremo estos cálculos tan elementales. Regiomontano, como se ve en el problema anterior, aplicaba el áljebra a la jeometría; procedimiento que tambien empleaba en el problema de Bramagupta, construir un cuadrilátero, conocidos sus cuatro lados. Regiomontano fué el matemático mas distinguido de su época, pues sus contemporáneos ocupan un lugar secundario.

Jorje *Purbach* (1423-1461), natural de un pueblo inmediato a Lintz, ademas de un libro sobre el movimiento de los planetas, compuso una aritmética, una tabla de eclipses i otra de senos naturales, obras que vieron la luz pública despues de su muerte.

Nicolas von *Cusa* (1401-1464), hijo de un simple pescador, se elevó rápidamente al elevado rango de cardenal. Sus escritos versan sobre la reforma del calendario i la cuadratura del círculo, habiendo encontrado que es

$$\pi = \frac{3}{4}\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right) = 3{,}136\,156.$$

Defendió la rotacion diurna de la tierra.

Nicolas *Chuquet* (1440—?), bachiller en medicina de la Universidad de Paris, redactó, en 1484, el testo de aritmética *Le triparty*, en que aparece el signo radical con índices;

espone claramente la regla de los signos i designa el signo *mas* por $\overline{\text{p}}$ (plus) i *ménos* por $\overline{\text{m}}$ (minus).

Juan *Widman* (1460—?). El empleo regular de estos dos signos, + i —, se encuentra por primera vez en una aritmética comercial de éste autor, publicada en 1489, e imitada de un tratado de Wagner, que salió a luz en 1482. Significaron primeramente estos dos signos el exceso o defecto de una cantidad, práctica corriente i mui antigua en el comercio, segun se lee en *Levit. XXV*, 27 i *Macab. X*, 41. Como en las transacciones comerciales se presentan a diario el uso de los términos exceso i defecto, se supone que ciertas mercaderías encajonadas debian pesar cuatro *centners* o 200 kilógramos; si contenia algun cajon exceso de 5 kilógramos, por ejemplo, Widman designaba el contenido por 200 kilógramos + 5 i el defecto por 200 Kg.—5. Se supone ademas que estos signos eran familiares a sus lectores i que los comerciantes los escribian con tiza en el esterior del envase o cajon. Primitivamente el signo *mas* se denotaba por $\perp$; mas tarde tomó la forma actual +, ya usada por Xilandro en 1575. Algunos creen que el signo *mas* proviene de la conjuncion latina *et*, i que el signo *ménos* corresponde a la raya que se pone encima de las palabras abreviadas, como $\text{vir}\overline{\text{u}}$ por *virum*, $\overline{\text{eps}}$ por *episcopus*; otros presumen que + es una contraccion de la inicial de *plus* i que — es la forma que toma la inicial de *minus* cuando se escribe de carrera.

De Morgan opina que este último signo es una trasformacion del punto que emplearon los hindúes, i que el signo positivo proviene de esta misma raya horizontal con otra vertical puesta encima. Hai que observar que en los primeros tiempos del áljebra simbólica, no indicaron estos dos signos las operaciones de adicion i sustraccion, sino que eran simples abreviaturas; i que Widman jamas se habria imajinado la revolucion que se iba a operar en los cálculos aljebraicos con la introduccion de esta escritura simbólica. En cuanto a su actual significado, debemos atribuir a Pacioli el empleo de las abreviaturas simbólicas i signos de operacion.

Lucas *Pacioli* (1450-1510?), mas conocido por el nombre de Lucas de Burgo, por ser Burgo de Toscana el lugar de su nacimiento, fue monje franciscano i enseñó las matemáticas en Roma, Pisa, Venecia i Milan. En esta última ciudad desempeñó la cátedra de matemáticas creada por Sforza. Su obra titulada *Summa de Arithmética, geometria proporzioni e proporzionalita*, impresa en Venecia en 1494, comprende dos partes: la primera versa sobre aritmética i áljebra i la segunda sobre geometría. Ademas de ser el libro de Aritmética i Aljebra mas antiguo que se haya impreso, era en su tiempo uno de los mas estimados i esparcidos. Los diversos conocimientos que contiene se fundan en los escritos de su antecesor Leonardo de Pisa. Pacioli da a conocer las cuatro operaciones de aritmética i un método particular para estraer la raiz cuadrada; se estiende con detenimiento en la parte comercial, especialmente al hablar de las letras de cambio i de la teneduría de libros por partida doble. El siguiente problema lo sacamos de esta obra: «Compro en Venecia 2,400 panes de azúcar, que pesan 7,200 libras, por el precio de 1,440 ducados; pago 2 °/₀ al ajente, 2 ducados a los pesadores i cargadores, 8 ducados gasto en envases, cuerdas, tela i embaladores, 1 °/₀ en derechos de contribucion i 3 °/₀ en la Aduana, 1 ducado por rotular las cajas, 13 ducados por el trasporte a Rimini, 2 ducados doi al capitan del buque, i su tripulacion, 6 ducados invierto en mi alimento i el de mi sirviente durante un mes, 1 ducado en viajes, lavado de ropa, barberos i calzado; 3 liras pago al capitan de puerto de Rimini, 5 liras por el desembarque, 4 sueldos por contribucion de cada carga, en número de 32; i 4 sueldos por almacenaje. Encuentro despues que un peso de 140 liras de Riminí equivale al de 100 liras de Venecia i que 4 liras de plata equivalen a 1 ducado de oro. Pregunto en cuánto debo vender 100 liras de Rimini para obtener una ganancia de 10 °/₀; i ademas deseo determinar el valor de la venta en moneda veneciana.» Pacioli da una regla para resolver la ecuacion $x \quad + x = a$, de la cual solo menciona las raices positivas.

Por mas que la obra de Pacioli esté sacada del *Liber abaci* de Leonardo de Pisa, hai que reconocer que son mui notables las mejoras i adelantos que introduce en el algoritmo aljebraico. Como los árabes i Leonardo, llama *cosa* a la incógnita, de donde la denominacion de *arte de la cosa* que se le dió primeramente al áljebra; designa nuestra x por *Co*, *R* o *R j* (abreviatura de *res*, cosa en latin); x^2 es *census*, que designa por *Ze* o *z*; x^3 es *cuba* i es *Cu* o *C*; x^4 es *censo di censo*, que escribe *Ce ce*. No emplea ninguna letra sola, sino que designa las cantidades por números en notacion árabe; indica la adicion e igualdad con las iniciales de las voces *plus* i *Æqualis*; a veces escribe *m* por *ménos* i *de* por *demptus*. Sin embargo, jamas escribe términos negativos, para lo cual hace la trasposicion conveniente en cada miembro de igualdad. Por ejemplo, no escribe $a-b-c=d-m+p$, sino $a+m=d+p+b+c$.

Ninguna novedad rejistran las pájinas de su jeometría; pero, como Regiomontano, aplica el áljebra a la resolucion de las cuestiones jeométricas. El problema siguiente se encuentra en su obra: El radio del círculo inscrito en un triángulo vale 4 cm., i los segmentos determinados en un lado por el punto de tanjencia valen 6 i 8 cm.; determinar los otros dos lados.

La fórmula

$$p\,r=S=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

da el valor

$$4\,p=\sqrt{p\,(p-14)\,6.8}\quad\therefore\quad p=21$$

i los lados incógnitos son 15 i 13.

No obstante de conocer Pacioli esta fórmula, hace caso omiso de ella; i despues de valerse de una larga construccion jeométrica, acude al áljebra para obtener los valores métricos.

Procede así: Sea *ABC* el triángulo, *D*, *E*, *F* los puntos de tanjencia del círculo de centro, O, H la interseccion de B i DF, K la de OC i DE; L, M los piés de las perpendiculares bajadas de E i F sobre BC; traza $EP \parallel AB$ que corta a BC en P; determina los valores de OB, OC, FD, FH, ED i EK; en seguida forma una ecuacion de segundo grado con las raices MB i MD; i de igual manera llega a los valores de LC i LD; luego calcula EL, FM, EP i LP; i, por último, obtiene el valor 13 para AB. Calificó Cardan esta demostracion como incomparablemente sencilla i perfecta, titulándola la verdadera corona de las matemáticas.

Leonardo de Vinci (1452-1519), autor de *La Cena*, una de las producciones mas perfectas i conocidas de la pintura italiana, nació en Vinci, Toscana. Rival en las bellas artes de Miguel Anjel i Rafael, estudió todas las ciencias de su tiempo; i fué, ademas, escultor, arquitecto, físico, injeniero, escritor i músico. Cultivó la amistad de Pacioli. Entre sus numerosos escritos, mencionaremos los que se refieren a la mecánica, la hidráulica i la óptica, siendo digno de nota que funda sus conclusiones en la esperimentacion. Por mas que la hidráulica i la óptica contengan pocos conocimientos de matemáticas i que en la mecánica haya errores de importancia, la crítica admite que conocia de un modo mui completo el equilibrio de la palanca, el frotamiento, la estabilidad de un cuerpo segun la posicion del baricentro, la resistencia de las vigas i la órbita descrita por un móvil sometido a la accion de una fuerza central. Habla tambien en sus escritos de los momentos virtuales, i se dice que poseia el teorema del paralelógramo de las fuerzas.

Alberrto *Dürer* (1471-1528), nacido en Nuremberg, es un artista como el anterior. En 1525 dió a la estampa una da sus obras de matemáticas, que es un estudio de perspective con nociones de jeometría i algunas soluciones gráficas.

Nicolas *Copérnico* (1473-1543) nació en Thorn i formuló la hipótesis del movimiento de la tierra i de los planetas alrededor del sol, hipótesis que Galileo, desde 1632, comenzó a demostrar con la observacion i el esperimento. Ademas de sus grandes méritos de astrónomo, Copérnico escribió un texto de trigonometría que, aunque no contiene ninguna novedad, demuestra que el autor estaba al cabo de los conocimientos matemáticos de su tiempo.

Roberto *Recorde* (1510-1558) nació en el Pembrokeshire, estudió en Oxford, en 1545 recibió su título Cambridge i llegó a ser médico de Eduardo VI i de María Tudor. Murió en la cárcel, donde fué encerrado por no haber podido pagar sus deudas.

En 1540 se dió a conocer con la publicacion de *El jardin de las artes*, aritmética en la que emplea «el signo $+$ que indica demasiado i esta línea $-$, sin raya transversal, que indica demasiado poco.» En 1557 compuso un libro de Aljebra con el signo $=$, igual a, que introduce porque «no hai dos cosas mas iguales que dos paralelas.» Cárlos Henry ha observado, sin embargo, que en los manuscritos de la Edad Media se encuentra el signo $=$ como abreviacion del verbo *es*. Recorde da a conocer en su obra la estraccion de la raiz cuadrada de una espresion aljebraica. Escribió, ademas, un testo de astronomía.

Cristóbal *Rudolff* (1480-?) publicó su libro de áljebra, titulado *Die Coss*, sacado de los escritos de Pacioli i Jordano. Emplea por primera vez el signo radical $\sqrt{\ }$, corrupcion de la inicial de *radix* (raiz en latin); la raiz cúbica la indica por $\sqrt{\ }\ \sqrt{\ }\ \sqrt{\ }$ i la raiz cuarta, por $\sqrt{\ }\ \sqrt{\ }$.

Adam *Riese* (1489-1559), natural de Baviera, fué minero en su juventud; mas tarde pudo dedicarse a las ciencias i escribió un libro de jeometría práctica i un manual de aritmética i áljebra en el que usa los signos $+$ i $-$.

Miguel *Stifel* (1486-1567), nacido en Esslingen, fué monje agustino i despues se hizo discípulo de Lutero, de quien fué amigo personal.

A continuacion de un pequeño testo de Aljebra, en 1544 compuso su *Arithmética Integra*, con un prefacio de Melanchton; en los dos primeros libros estudia, al modo de Euclides, los radicales e inconmensurables; el tercero trata del áljebra, con los signos + i — como símbolos de operacion; hace uso de las palabras italianas correspondientes para designar los datos i las incógnitas i con las letras mayúsculas denota varias incógnitas. Se le atribuye la invencion de los logaritmos i el desarrollo del binomio $(1+X)^n$. En 1553 publicó el testo de Rudolff, *Die Coss*, con la notacion aljebraica mui perfeccionada. Rudolff representaba la incógnita por R, su cuadrado por Z, + por p (plus), ménos por m (minus) i escribia:

1. Z. p 5 R m 4 por $x^2 + 5x - 4$.

Stifel escribe, designando por A la x,

1. AA + 5 A — 4.

Nicolas *Tartaglia* (1500-1557), cuyo verdadero nombre es Niccolo Fontana, nació en Brescia i murió en Venecia. En 1512, los franceses saquearon su ciudad natal; su padre fué muerto, i Nicolas resultó con el cráneo hendido i traspasado el paladar. Recojido por su madre, pudo salvar la vida, pero quedó tartamudo, por cuyo defecto le dieron el sobrenombre de tartalea o tartaglia. Viviendo en la mas estrema pobreza, pudo asistir únicamente, durante quince dias, a la escuela; pero despues logró aprender solo a leer i escribir. Sin recursos para procurarse papel, se valia de las lozas de las tumbas para hacer sus ejercicios. En medio de tanta miseria, consiguió, a pesar de todo, un puesto de profesor en Verona. En 1535, ocupó una cátedra de Matemáticas en Venecia i se hizo célebre por haber resuelto una ecuacion de tercer grado, que Antonio del Fiore le propuso en desafío. Fiore, que habia aprendido de su maestro Escipion Ferro, a resolver empíricamente la cúbica $x^3 + q\,x = r$, solucion sacada probablemente de algun testo árabe, habiendo oido decir que Tartaglia pretendia saber resolver cuestiones semejantes, le propuso treinta problemas distintos, comprometiéndose a resolver, a su vez, otras treinta cuestiones que le propusiera Tartaglia. Este no ignoraba que Fiore poseia el método árabe i supuso que los problemas propuestos por su adversario se relacionaban con la ecuacion cúbica, por lo cual estudió su resolucion aljebraica i logró encontrar las raices de casi todas las ecuaciones cúbicas. Se cree que su procedimiento fué jeométrico i que entónces encontró la fórmula conocida en nuestras escuelas con el nombre de fórmula de Cardan.

Trascurrido el plazo fijado, Tartaglia resolvió todos los problemas de Fiore i éste nó pudo dar con la solucion de ninguno de los que le propusiera aquél. Las cuestiones de Fiore, como lo sospechaba Tartaglia, se reducian a la cúbica $x^3 + q\,x = r$; i las de Tartaglia, a $x^3 + p\,x^2 = r$, forma que sabia resolver su contendor.

En 1537, Tartaglia dió a la publicidad su *Ciencia nueva*, en la que estudia la caida de los graves i el alcance de uu proyectil, encontrando que es máximo cuando la inclinacion del arma es de 45°.

En sus *Invenciones*, obra que apareció en 1546, publica la resolucion de las ecuaciones de tercer grado; i en su *Tratado de los números i medidas*, dada a luz en 1556, determina los coeficientes del desarrollo de $(1+x)^n$, haciendo uso del triángulo aritmético.

Todas sus obras fueron reimpresas en 1606. El tratado de los números i medidas de Tartaglia es una de las obras mas preciosas para el historiador, tanto por los numerosos i variados cálculos que contiene cuanto por las diferentes i correctas notas históricas que suministra. En los innumerables problemas comerciales que resuelve, trata de establecer fórmulas aljebraicas apropiadas a la naturaleza de cada cuestion. Encontramos en sus pájinas que, en su tiempo, el interes del dinero en depósitos era de 5 a 12% anual i que los préstamos ganaban hasta 20% al año.

Hace acertadas observaciones sobre el alza i baja de los precios de las mercaderías en relacion con su mayor o menor demanda; a pedido de los majistrados de Venecia, dió una tabla de precios del pan segun el valor del trigo; i, a imitacion de Pacioli, agrega a su obra un crecido número de recreaciones matemáticas, como la de adivinar un número pensado por otro, la de los lazos de parentesco de una familia i la de donaciones contradictorias.

Entre estos variados problemas encontramos los siguientes:

I. Tres hermosas damas tienen por maridos jóvenes tan galantes i agradables como celosos. En un viaje que emprenden, tienen que atravesar un rio en una pequeña embarcacion que no puede dar cabida a mas de dos pasajeros. Se pregunta la manera de atravesar el rio en parejas de damas o caballeros solos o de marido i mujer.

II. 15 turcos i 15 cristianos viajeros son sorprendidos en alta mar por una violenta tempestad. El capitan del buque, para aplacar a los dioses, determina arrojar al mar la mitad de los 30 pasajeros, escojidos de nueve en nueve. De qué manera, se pregunta, hai que disponerlos en círculo para que no salga ningun cristiano.

III. Tres hombres, que hurtan un vaso con 24 onzas de bálsamo, se encuentran con un mercader que les vende 3 vasos de 5, 11 i 13 onzas cada uno. En qué forma podrán repartirse las 24 onzas en partes iguales, valiéndose de los 3 vasos.

Sean *A*, *B*, *C*, *D* los cuatro vasos; se procede así:

Vasos........................	*A*	*B*	*C*	*D*
Su capacidad..................	24	13	11	5
1.º con *A* se llenan *C* i *D*:.....	8	0	11	5
2.º con *C* i *D* se llena *B*.:......	8	13	3	0
3.º se vácia *B* en *D*:..........	8	8	3	5
4.º se vácia *D* en *C*:..........	8	8	8	0

Estos problemas, algunos de los cuales son de oríjen oriental, forman las colecciones publicadas por Bachet, Ozanam, Montucla i Rouse Ball.

Jerónimo *Cardan* (1501-1576), natural de Pavía, llevó una vida llena de actos tan inconsecuentes como estraordinarios. Jugador empedernido, acusado de haber cometido un asesinato, fanático de la ciencia, resolvió, no obstante de tan grandes defectos, problemas que hasta entónces nadie habia podido resolver. En ciertas épocas de su vida se daba al libertinaje mas escandaloso; en otras se veia arrastrado a las prácticas astrolójicas i terminaba despues por engolfarse en los problemas mas sutiles de la filosofia. Algunos lo han juzgado como un jenio, no pocos como un demente, i los mas, como un loco. Hijo natural de un jurisconsulto de Milan, cursó en las universidades de Pavía i Padua, recibió su diploma i ejerció la medicina en Sacco i Milan, de 1524 a 1550. Durante este período de su vida, estudió las matemáticas i publicó sus principales obras. Despues de haber viajado por Francia, Escocia e Inglaterra, volvió a Pavía, donde desempeñó una cátedra universitaria. Su existencia ajitada es un tejido incomprensible de aventuras amorosas, de divagaciones astrolójicas i de estudios e investigaciones científicas. Sus dos hijos eran tan perversos como el padre: el mayor de ellos fué ajusticiado por haber envenenado a su mujer; i al menor de sus hijos le cortó las orejas en castigo de algun desliz gravísimo. En 1757, pretendió entrar a la Universidad de Bolonia; pero era tan detestable su nombre, que fué rechazado unánimemente por todos los profesores. Mas tarde, en 1570, se le encarceló por la locura de haber hecho el horóscopo de Jesucristo. En 1571, se encuentra en Roma, donde ejerce la astrolojía i recibe una pension de la Corte pontificia. Mas, su profesion predilecta le fué fatal, porque habiendo anunciado que moriria cierto dia del año, tuvo que suicidarse para mantener su reputacion intacta.

La obra principal de Cardan se titula *Ars Magna*, publicada en 1545, en Nuremberg. Habia comenzado por escribir los primeros capítulos de este libro, cuando tuvo noticias del desafío entre Tartaglia i Fiore.

Deseoso de conocer los métodos del primero, se valió de la astucia i del engaño para atraerlo a su casa, i aquí lo obligó a revelarle la solucion tan solicitada, jurando que no divulgaria el secreto sino en caractéres cifrados. Esta promesa no fué respetada, pues su obra contiene los trabajos de Tartaglia i la famosa solucion que la posteridad ha llamado fórmula de Cardan.

Uno de sus discípulos, Ferrari, a quien le enseñó el método de Tartaglia, con estos nuevos conocimientos logró reducir la ecuacion de cuarto grado a una de tercer grado.

Cuando Cardan publicó su *Ars Magna*, Tartaglia protestó i desafió a Cardan a una lucha matemática. Cardan aceptó el desafío, pero no concurrió al lugar de la cita i envió en su lugar a Ferrari.

El *Ars Magna* es una de las obras mas acabadas del mismo jénero publicadas anteriormente.

Cardan discute por primera vez las raices negativas i aun las imajinarias de una ecuacion, las que encuentra que son conjugadas, sin entrar en una esplicacion mas profunda.

Demuestra que en las cúbicas, cuando son reales sus raices, aparecen bajo la forma de imajinarias en la fórmula de Tartaglia. La teoría de las imajinarias no llamó la atencion de sus contemporáneos, con excepcion de Bombelli, como se dirá mas adelante. Dos siglos mas tarde, Euler i Juan Bernoulli le dieron mayor estension, i el primero introdujo la notacion de las variables complexas, designando por i la raiz de — 1 o sea

$$\sqrt{-1}.$$

Cardan sentó la relacion que hai entre los coeficientes i las raices de una ecuacion; conocía la regla de los signos de Descartes; i, lo que es mas notable, encontró que cuando

$f(x)=0$ cambia de signo, x pasa por un valor que anula la funcion. Fundándose en esta propiedad, da un procedimiento para calcular aproximadamente el valor numérico de la raiz de una ecuacion. La resolucion de la ecuacion de segundo grado, igual a la de Alkarismi, es jeométrica, lo mismo que la de la ecuacion de tercer grado, como se dice en seguida:

Se trata de resolver la cúbica

$$x^3+6x=20 \text{ o sea } x^3+qx=r;$$

para lo cual construye dos cubos cuyas aristas tengan el valor del producto 2 o $\frac{1}{3}q$ i cuyos volúmenes difieran en 20 o r; en tal supuesto, x será la diferencia de las aristas.

Construye luego la espresion

$$(a-b)^3=a \quad -b^3-3ab(a-b),$$

i obtiene las lonjitudes de las aristas por medio de una ecuacion de segundo grado.

Cardan enuncia diferentes reglas para resolver cada una de las formas cúbicas o de tercer grado,

$$x^3+px=q,$$

$$x^3=px+q,$$

$$x^3+px+q=0,$$

$$x^3+q=px.$$

Despues de Cardan, surjieron muchos matemáticos que estudiaron las ecuaciones de tercero i cuarto grados, entre los cuales merecen particular mencion Ferrari i Rético.

Luis *Ferrari* o Ferraro (1522-1565) nació en Bolonia, fué empleado de Cardan i el mas renombrado de sus discípulos. Se le pinta como un jovencito limpio i sonrosado, de suave voz, cara alegre, nariz pequeña, amigo del placer, de grande intelijencia, pero con las inclinaciones de un demonio. Su carácter agradable lo llevó hasta llegar a ocupar un puesto en el servicio del cardenal Fernando Gonzaga. Quebrantada su salud, despues de haber llevado una vida de disipacion, se retiró en 1565 a Bolonia, donde dió una serie de conferencias sobre las matemáticas.

El mismo año fué envenenado por uno de su familia.

Los diversos trabajos de Ferrari se rejistran en el *Ars Magna* de Cardan i en el Aljebra de Bombelli, siendo el mas auténtico de todos, su resolucion de la ecuacion de cuarto grado, que encontró con ocasion del desafío de Colla, de resolver la ecuacion

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x,$$

sacada probablemente de alguna obra de los árabes.

Jorje *Rético* (1514-1576) nació en Feld Kirchen i desempeñó el profesorado en Wittenberg, despues de haber hecho sus estudios bajo la direccion de Copérnico. Encargóse de dar a la publicidad las obras de su maestro; construyó diversas tablas trigonométricas, que publicó Otton en 1596 i que, mas tarde, las completaron Vieta i Pitisco. Los valores consignados en esta obra han servido de base a las tablas modernas. Rético encontró los valores de sen 2 a i sen 3 a en funcion del arco simple a; i no ignoraba que las funciones trigonométricas pueden obtenerse de la razon de dos lados de un triángulo rectángulo, como

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}, \ \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}.$$

Francisco *Morolico* (1494-1575) o Maurolyco, nació en Mesina, tradujo diversas obras griegas i latinas i discutió las cónicas consideradas como secciones del cono. Sus obras fueron publicadas en 1575.

Juan *Borrel* (1492-1572) compuso una áljebra, igual a la de Stifel, i una historia de la cuadratura del círculo, obras impresas en Lyon, en 1559.

Guillermo *Xilandro* (1532-1576) nació en Augsburgo, ejerció el cargo de profesor en Heidelberg, i publicó en 1556 las obras de Pselo; en 1562 los elementos del Euclides; i en 1575, la Aritmética de Diofanto. Sus demas trabajos, publicados en 1577, carecen de importancia.

Federico *Commandin* (1509-1575), natural de Urbino, dió a la estampa, en 1558, las obras de Arquímedes; en 1566, trozos de Apolonio i Pappo; en 1572, *Los Elementos* de Euclides; i en 1574, trozos de Aristarco, Heron i Pappo, con comentarios.

Santiago *Peletier* (1517-1582) de Mons, compuso obras clásicas de jeometría i áljebra. En esta última se encuentran los trabajos de Stifel i Cardan.

Adriano *Romano* (1561-1625), profesor de matemáticas i medicina en Sovaina, su ciudad natal, fué el primero que encontró el desarrollo de

$$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cos b\,b + \text{sen}\,b \cos a.$$

Bartolomé *Pitisco* (1561-1613), profesor en Heidelberg, publicó en 1599 una trigonometría que contiene el desarrollo de

$$\text{sen}\,(a \pm b) \text{ i } \cos\,(a \pm b).$$

Por este tiempo, aparecieron varias obras clásicas con una esposicion sistemática de la materia; entre sus autores mencionamos a Ramus i Bombelli.

Pedro *Ramus* (1515-1572), natural de Picardía, fué asesinado en la San Bartolomé. Siguió sus estudios en la Universidad de Paris; i al recibirse de maestro en artes, admiró i deleitó a los miembros universitarios con su brillante tésis contra Aristóteles.

Creó en Paris la primera cátedra de matemáticas i escribió diversos trabajos de filosofía i testos de aritmética, áljebra, jeometría euclidiana, astronomía de Copérnico i física, que se consideraban en su época como obras clásicas; en 1509 fueron reunidas i publicadas en Basilea.

Rafael *Bombelli* (1530—?) publicó en 1572 un testo de áljebra, con una introduccion histórica de esta ciencia. En sus pájinas menciona a Diofanto i sus obras, hasta entónces desconocidas en Europa. Discute los radicales reales e imajinarios; en la teoría de las ecuaciones, establece que en el caso irreductible de las cúbicas, las raices son reales; i hace ver que la triseccion del ángulo es un problema de tercer grado. Es digno de nota el simbolismo de Bombelli, porque escribe $\underset{\smile}{1}$, $\underset{\smile}{2}$, $\underset{\smile}{3}$ en vez de x, x^2, x^3, segun esto escribe 1 $\underset{\smile}{2}$ p. 5 $\underset{\smile}{1}$ m 4 por $x^2 + 5x - 4$. En 1586, Stevin hace uso de una notacion parecida.

PROCRESOS DEL ÁLJEBRA SIMBÓLICA

Hemos llegado a la época en que va a quedar definitivamente establecida, en sus bases actuales, el áljebra simbólica, despues de las numerosas tentativas que se hicieron hasta Stifel i Bombelli. La creacion del simbolismo aljebraico moderno es atribuida a Vieta, siendo Harriot i Descartes los principales autores que jeneralizaron su uso.

Francisco *Vieta* (Viète en frances) nació en 1540, cerca de La Rochela, i murió en Paris en 1603. Cursó la carrera de abogado i fué miembro de los parlamentos de Bretaña i Paris. Desde 1580 se dedicó al estudio de las matemáticas.

Los historiadores se complacen en narrar la siguiente anédocta sobre Vieta. Un dia el embajador de los Paises Bajos hizo observar a Enrique IV que Francia no poseia ningun matemático capaz de resolver la ecuacion de 45º grado propuesta por Adriano Romano.

$$x^{45} - 45\, x^{43} + 945\, x \quad - 12\,300\, x^{39} + \ldots + 45\, x = c.$$

El rei hizo llamar a Vieta, i al cabo de algunos minutos, el matemático frances dió dos soluciones del problema.

Es de advertir que Vieta habia encontrado en sus estudios el desarrollo de *sen n a* en funcion de *sen a* i que la ecuacion resuelta por él es el desarrollo de sen 45 *a*.

A su vez, Vieta propuso a Romano el problema de Apolo nio, trazar un círculo tanjente a tres círculos, cuestion que resolvió el segundo valiéndose de las secciones cónicas. Mas, Vieta dió una solucion fundada en la jeometría euclidiana, trabajo que exccitó de tal manera la admiracion del matemático belga, que emprendió un viaje especial para trabar conocimiento con su autor, de quien fué, desde entónces, constante amigo.

En otra ocasion, Enrique IV acudió a la estraordinaria sagacidad de Vieta para descifrar un despacho secreto de los españoles, escrito con un alfabeto de 600 caracteres. Vieta logró traducirlo i durante dos años los franceses se impusieron, de este modo, de los planes de sus enemigos. Felipe II atribuyó a hechicería el descubrimiento de Vieta, i de ello se quejó al Papa.

Entre las numerosas obras que compuso Vieta, mencion especial merecen: *In Artem Analyticam Isagoge, Tours*, 1591; *Supplementum jeometricæ, Tours*, 1593; *De Numerosa Potestatum Resolutione*, Paris,1600; *De Equationum Recognitiore et Enmedatione*, 1615. Las primeras fueron reimpresas por von Schooten en 1646, i la última fué publicada por Anderson, en 1615.

La *In Artem* es la obra mas antigua del áljebra simbólica. En ella hace uso el autor de las letras para designar las cantidades positivas conocidas i desconocidas; emplea una notacion especial para las potencias e insiste en las ventajas de las ecuaciones homojéneas. Agregó despues a esta obra un apéndice, *Logistice speciosa*, en que trata de la adicion i multiplicacion de las cantidades aljebraicas i de la elevacion hasta la sesta potencia de un binomio. Parece que conocia la lei de formacion de sus coeficientes, siguiendo el método del triángulo que imajinara Tartaglia, dejando a Pascal la gloria de completar la regla jeneral i a Newton la de descubrir la espresion jeneral de los coeficientes del desarrollo de $(1+x)^n$.

A' este primer apéndice se agregó otro, *Zetetica*, que trata de la resolucion de las ecuaciones.

En *Su Artem* se descubren dos mejoras importantes de la notacion aljebraica, que se presume el autor haya encontrado en obras anteriores. La primera se refiere a la representacion de las cantidades conocidas por las consonantes B, C, D,.... i las incógnitas por las vocales A, E, I,... mejora introducida anteriormente por Jordano i Stifel. La notacion actual, a, b, c..., x, y, z.... para los datos e incógnitas, es debida a Descartes (1637).

Consiste la segunda mejora en que escribe A quadratus por $A,^2$ A cubus por $A,^3$ etc.; segun esta notacion,

B 3 in A quad—D plano in A+A cubo œquatur z solido, significa

$$3\,B\,A^2 - D\,A + A^3 = Z.$$

Las constantes están tomadas de suerte que la espresion resulte homojénea. Se observa que no hace uso del signo de igualdad i que, en jeneral, el simbolismo de Stifel, Bombelli i Stevin es mas ventajoso. A pesar de todo, Vieta coadyuvó a que el algoritmo fuera adoptados por todos; encontrándose, ademas, en algunas de sus obras, la notacion potencial A^q.

La teoría de las ecuaciones es estudiada por este autor en

De æquationum Recognitione et emendatricnre. Señala cómo $f(x)=o$ puede descomponerse en factores; sabe espresar los coeficientes en funcion de las raices; i puede formar otra ecuacion cuyas raices estén aumentadas en cierta cantidad o sean múltiplos de las raices de otra ecuacion. Conocedor de propiedades tan importantes, pudo hacer desaparecer el segundo término de las ecuaciones cuadradas i cúbicas, lo que le permitió dar su resolucion aljebraica. Resuelve la cúbica reduciéndola a $x^3 + 3a^2x = 2b^3$; hace en seguida $x = \frac{a\,2}{y} - y$ i obtiene la trinomia $y^6 + 2b^3y^3 = a^6$, de la que saca el valor de y i luego el de x. Para resolver la ecuacion de cuarto grado, procede como lo hizo Ferrari: elimina el segundo término i la reduce a $x^4 + a^2x^2 + b^3x = c^4$, escribiéndola $x^4 = -a^2x^2 - b^3x - c^4$; agrega $x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4$ a ámbos miembros i obtiene, $\left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)^2 = x^2(y^2 - a^2) - b^3x + \frac{1}{4}y^4 + c^4$; determina el valor de y de modo que el segundo miembro sea un cuadrado perfecto i resultan, por fin, dos ecuaciones de segundo grado en x, que resuelve separadamente.

La obra *De Numerosa Potestatum Resolutione* contiene la resolucion de un gran número de ecuaciones numéricas.

Se rejistra en sus pájinas un procedimiento tan largo como fastidioso que permite encontrar el valor aproximado de una raiz, i que en principio es igual al método que imajinara mas tarde Newton. Vieta no toma en cuenta las raices negativas.

Los trabajos trigonométricos de Vieta están consignados en las diversas obras que publicó van Schooten; ahí encontramos algunas tablas i el valor de *sen a* en funcion de los submúltiplos de *a*. Tomando en cuenta estos diversos conocimientos, se puede afirmar que el estudio elemental de la Trigonometría era conocido de un modo completo en los tiempos de Vieta. Ademas, este autor estudió la teoría de los triángulos esféricos rectángulos; demostró que la duplicacion del cubo i la triseccion del ángulo eran poblemas de tercer grado; i en 1594 sostuvo con Clavio una polémica sobre la reforma del calendario.

Por mas que los trabajos jeométricos de Vieta sean sobresalientes, hai que confesar la poca orijinalidad que todos ellos tienen. Es cierto que supo aplicar el áljebra i la trigonometría a la ciencia de la estension, mas, no alcanzó a dar al Análisis la importancia i jeneralidad que mas tarde logró darle Descartes, su ilustre compatriota. Vieta se sirvió siempre en sus estudios de espresiones homojéneas; las de primer grado o primera dimension, tal como a, representan líneas, a^2 superficies i a^3 volúmenes. Refutó la cuadratura del círculo de Scaliger i, señalando el error que éste habia cometido, encontró que el área del cuadrado inscrito i la del círculo son entre sí como el producto infinito

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots\ldots \text{ es a' } 1:$$

esta es la espresion mas antigua conocida que da el valor de π en forma de série. Mui versado en las producciones científicas de los griegos, fué el primero en reconstituir las obras perdidas de la antigüedad, i, en consecuencia, publicó *De Tactionibus* de Apolonio.

Alberto *Girard* (1595-1632) nació en Lorena. Publicó, en 1626, un pequeño testo de Trigonometría, en el cual se leen por primera vez las abreviaturas sen, tan, sec por seno, tanjente i secante, empleadas en la ciencia de los triángulos; estudió los triángulos esféricos suplementarios, cuyas propiedades ya eran conocidas de Snelio; espresó el área del triángulo esférico en funcion del exceso esférico, valor descubierto al mismo tiempo por Cavalieri. En 1627, dió una nueva edicion de la jeometría de Marolois con numerosas adiciones. Dos años mas tarde, salió a luz *Invention nouvelle* *en Algèbre*, en cuyas pájinas se lee el ejemplo mas antiguo del uso del paréntesis i la interpretacion jeométrica del signo —; demuestra, ademas, que el número de raices de una ecuacion es igual a su grado; hace el reconocimiento distinto de las raices imajinarias; enuncia la regla de Newton para encontrar la suma de las potencias semejantes de las raices de una ecuacion; i tal vez establece que $f(x)$ se puede descomponer en factores lineales. Conocimientos tan profundos e importantes no ejercieron ninguna influencia entre sus contemporáneos, porque los trabajos de Girard les fueron desconocidos.

Juan *Napier*, de quien hablamos en pájinas anteriores, con motivo de su invencion de los logaritmos, nació en Merschiston en 1550, i murió el 4 de Abril de 1617. Ocupado toda su vida en contiendas políticas i relijiosas, sólo dedicó sus ratos de ocio al cultivo de las ciencias. Sin dejar de reconocer el mérito de su principal invencion, es permitido afirmar que despues de la creacion de la teoría de los esponentes, tenia que aparecer, en el órden natural de las ideas, la de los logaritmos, su consecuencia mas lejítima e inmediata. Sin embargo, Napier no empleó en sus estudios la notacion aljebraica correspondiente; sino que únicamente preocupado, durante largos años, de abreviar la multiplicacion i division de números grandes, i estimulado por las numerosas tentativas que hacian los matemáticos de su tiempo para reducir estas operaciones, logró al fin su objeto, creando uno de los recursos mas útiles que posee hoi dia el cálculo numérico. A este respecto, conviene decir que Rético construyó sus tablas despues de hacer cálculos laboriosos en grado estremo; Vieta, con ayuda de la aritmética sola, se engolfaba en cálculos que duraban dias enteros i sin llegar a resultados apreciables; Van Ceulen (1539-1610) se puede decir que empleó su vida entera para obtener con 36 decimales el valor de π; i Cataldi (1548-1626), creador de las fracciones contínuas, perdió una gran parte de su tiempo en cálculos aritméticos. En su *Rabdolojía*, Napier dió a conocer una forma perfeccionada del uso de sus regletas e inventó otras dos reglas, que denominó *virgulæ*, con las cuales se podía estraer raiz cuadrada i cúbica. En Trigonometría Esférica descubrió las analojías de su nombre i las reglas de las partes circulares o de Manduit.

Enrique *Briggs* (1561-1631), natural de Halifax, estudió en Cambridge, donde se graduó de maestro en artes i enseñó la jeometria en la cátedra fundada por Grasham en 1619, i en Saville, fundada por Sir H. Savile. A Briggs le cupo la gloria de hacer popular el uso de los logaritmos i convenció a Kepler de sus grandes ventajas, lo que contribuyó a que su adopcion se estendiera rápidamente en Alemania. Cavalieri i Wingate ayudaron eficazmente a la misma obra de vulgarizacion en Italia i Francia. Briggs popularizó, ademas, el actual método de division.

Tomas *Harriot* (1560-1621), nacido en Oxford, pasó su juventud en América con Sir Walter Ralcigh; estudió la topografía jeométrica de la Virjinia i Carolina del Norte; i de vuelta a Lóndres, despues de concluidos los planos de estas dos rejiones, se consagró de lleno al estudio de las ciencias exactas.

Su principal mérito es el de haber completado los descubrimientos aljebraicos de Vieta, dándoles fundamentos científicos; en su *Artis Analyticæ Praxis* (1631) hace una esposicion sistemática de la teoría de las ecuaciones, notándose un progreso en el simbolismo aljebraico; no obstante, no toma en cuenta las raices negativas ni las imajinarias. Esta obra tuvo escepcional acojida en el público. Fué mui leida i coadyuvó a difundir en las escuelas los variados métodos de que dispone el Análisis matemático. A Harriot se debe la introduccion de los signos de desigualdad $>$ i $<$ en el cálculo. Escribia, lo mismo que Wallis, a, aa, aaa por a, a^2, a^3; siendo la última notacion obra del insigne Descartes.

Guillermo *Oughtred* (1575-1660), de Eton, educado en Camdridge, donde mas tarde dió conferencias sobre las ciencias matemáticas, publicó en 1631 la obra de *Clavis Ma-*

thematicae que encierra cuanto en su tiempo se sabia de aritmética.

En esta obra es donde emplea el signo de proporcion $::$ equivalente a $=$. Miéntras sus predecesores escribian una proporcion en esta forma: $a - b - c - d$, Oughtred dió un paso mas i escribió $a . b :: c . d$.

Siguiendo a Girard, hizo uso de las abreviaturas sen, tan, sec, en una trigonometría que vió la luz pública en 1657. Empero, tanto el algoritmo de Oughtred como el de Girard, fueron desconocidos de sus contemporáneos; hasta que Euler los empleó en sus escritos i los dió a conocer de este modo al mundo científico.

Hemos llegado a esta parte de nuestra Historia, despues de consignar claramente que las Matemáticas Elementales, Aritmética, Aljebra i Trigonometría, habian alcanzado en esta época su completo desarrollo i tal como ahora, son conocidas.

Las adiciones posteriores que tuvieron estos diversos ramos, no alteraron sus principios fundamentales ni el órden lójico de las ideas.

Oríjen de los signos aljebraicos

En las líneas que siguen, hacemos un resúmen de los diferentes datos, esparcidos en el curso de esta obra, relativos a los signos o símbolos aljebraicos i a su oríjen mas probable.

Los antiguos griegos i los hindúes indicaban la adicion yustaponiendo los términos o números, como aunse hace en las fracciones mixtas, $4\,{}^1/_3 = 4 + {}^1/_3$, que es un resto subsistente de aquella notacion primitiva. Los aljebristas italianos usaron la p, por *plus* mas; Pacioli escribia p o e; i Tartaglia Φ. Los matemáticos alemanes e ingleses introdujeron el $+$ como signo de exceso i no de adicion, segun se dijo al hablar de Widman (año 1489); mas, en 1630 ya era usado como signo de operacion.

Diofanto denotaba la substraccion por Ψ, los hindúes por un punto; los italianos por m, *minus* ménos; Pacioli por *m* o de, *demptus*; los anglo-sajones emplearon, por fin, el signo — como *signum subtractorum*. El signo + probablemente proviene de esta raya horizontal a la que se le agrega una vertical ⊥ i despues se trasformó en +.

Pacioli i Tartaglia se valian del signo — para indicar una division, una razon o una proporcion. Vieta i van Schooten espresaban la diferencia entre a i b así: $a = b$; en tanto que Barrow, como nosotros, escribia $a - b$. En 1630 ya se usaba el signo — como signo de sustraccion.

Oughtred designaba la multiplicacion por el aspa × i Harriot por un punto.; en 1637 Descartes yustaponia los factores, suprimiendo todo signo, como lo hacemos nosotros. Pero Leibnitz, en 1866, escribia ⌒ en vez de *por*.

Los árabes escribian la fraccion $\frac{a}{b}$ así: $a - b$, a/b i tambien $\frac{a}{b}$; Oughtred empleaba el punto i Leibnitz el signo ◡. El doble punto se encuentra (1657) en *Canones Sinuum* de Oughtred. En 1659, Enrique Rahn de Zürich i Juan Pell de Lóndres (1668), introdujeron el signo de division ÷; Barrow i otros empleaban el signo ⁚ ⁚ en las proporciones contínuas.

En 1557, Recorde usó por primera vez el signo actual de igualdad =; Xilandro se valia del signo ‖; otros, hasta 1600, escribian la palabra *æqualis* igual a sus iniciales *æ*, oríjen del signo ∝ *igual a*, que desapareció en tiempos de Newton.

Los signos de desigualdad >, < fueron inventados por Harriot en 1631; durante el siglo XVI, varios escritores, entre ellos Oughtred, escribian ⊏ por mayor que. Los signos *no es igual a*, *no es mayor que* son de creacion reciente.

Vieta, en 1591, usaba el vínculo o raya que aun usamos en jeometría, $\overline{BA}^2$; Girard introdujo, en 1629, el uso del paréntesis; i en 1526 Rudolff habia empleado el signo $\sqrt{}$, notacion parecida a la Bhaskara i Chuquet. Bombelli (1572) denotaba la incógnita por $\underset{\smile}{1}$, su cuadrado por $\underset{\smile}{2}$ i su cubo por $\underset{\smile}{3}$; Stevin (1586) empleaba la misma notacion, encerrando los números dentro de un círculo; i sujirió ademas la idea de los índices fraccionarios; Vieta (1591) escribia A, Aquad, Acub; Harriot, a, aa, aaa; Herigone (1634), a, a2, a3; por último, Descartes (1637) a, a^2, a^3. En 1659, Harriot completa la obra de Descartes e imajina los esponentes negativos i fraccionarios, notacion propuesta años atras por Oresme i Stevin. Newton, en sus cartas a Leibnitz (1676), usa el esponente *cualquiera* n.

El signo del infinito ∞ se encuentra en la *Arithmetica Infinitorum* (1655) de Wallis i el *Ars Cogitandi* (1713) de Juan Bernoulli; lo usaron los romanos para indicar el número 1000; i es probable que de aquí pasó a servir como signo de una cantidad infinitamente grande.

La division sexajesimal del círculo nos viene de los babilonios, por intermedio de los griegos. La unidad angular de los babilonios era el ángulo del trisógono (60°), que estaba dividida en 60 partes iguales o grados, cada grado en 60 minutos, etc. Hoi dia no se usan los terceros sino la division decimal. Se ha sostenido que el sistema sexajesimal tuvo por objeto dividir la esfera celeste en 360°, division que corresponde, mas o ménos, a los 365 dias solares de un año.

Regiomontano sacó de los árabes el vocablo *seno*; *Fink* (1561-1646) introdujo la tanjente i la secante; Rético, la cosecante (1596); Gunter la cotanjente i el coseno (1620); Girard, las abreviaciones sen, tan, sec (1626); i Oughtred, cos i cot, términos que Euler hizo mas tarde de uso jeneral. La nocion de funciones trigonométricas pertenece a Juan Bernoulli i fué desarrollada por Euler en su *Introduccion al Cálculo Infinitesimal.*

CAPÍTULO XII

FIN DEL RENACIMIENTO

(1586-1637)

Los últimos años del Renacimiento son notables en nuestra Historia, por los nuevos métodos que se crearon en jeometría i por la formacion de la mecánica, hasta entónces completamente descuidada por los hombres de ciencia

PROGRESO DE LA MECÁNICA

Simon *Stevin* (1548-1620) nació en Brujas i murió en La Haya. De su vida solo se sabe que principió por ser empleado de comercio, i, en los últimos años de su vida, llegó a ser amigo del príncipe Mauricio de Orange, quien lo nombró para un puesto superior en el ejército holandes.

En su tiempo era conocido por sus trabajos de fortificaciones i arte militar; inventó un coche que se movia a impulsos del viento; i a él se le debe la implantacion de un sistema conveniente de contabilidad comercial.

En su Aritmética, dada a luz en 1585, hace uso de los signos (1), (2), (3) para denotar las incógnitas x, x^2, x^3, i escribe de igual modo los números decimales; sujiere la idea de esponentes fraccionarios e imajina un sistema de pesos i medidas.

Compuso una Jeometría en la que da algunas nociones de perspectiva. Su reputacion descansa principalmente en su *Estática e Hidrostática*, impresa en 1586, en Leyde. En esta obra enuncia el teorema del triángulo de las fuerzas, atribuido por algunos a Leonardo de Vinci, i considerado por Stevin como el teorema fundamental de la ciencia del movimiento. Introducia de este modo una novedad en la mecánica, pues, autores anteriores a él, habian considerado como fundamental la teoría de la palanca. Stevin representa las fuerzas por líneas rectas, lo que le permite reducir las cuestiones mecánicas a construcciones jeométricas. De este modo consigue dar una demostracion del paralelógramo de las fuerzas, teorema equivalente al triángulo de las mismas. Stevin carece de claridad en la esposicion i de rigor en las conclusiones, defectos que supo evitar Varignon en sus obras de mecánica publicadas en 1687. El problema, tantas veces discutido, de determinar la equilibrante de un cuerpo apoyado sobre un plano inclinado, lo resolvió Stevin de un modo completo, haciendo una distincion entre el equilibrio estable i el inestable. En hidrostática determinó las diferentes presiones de un fluido contenido en un vaso i esplicó la paradoja hidrostática.

Stevin era un tanto dogmático en sus raciocinios i no aceptaba las contradicciones. «En cuanto a aquellos que no comprenden estas verdades», dice en la última obra, «que el Supremo Hacedor tenga piedad de ellos, porque la falta no está en el raciocinio sino en los ojos que no ven, mal que no podemos remediar.»

Galileo Galilei nació en Pisa el 18 de Febrero de 1564, i murió en Florencia el 8 de Enero de 1642. Es el creador de la Dinámica, rama de la mecánica que trata de las fuerzas i del movimiento que producen i que descansa en tres principios: el de la inercia, enunciado por Kepler; el de la accion i reaccion, debido a Newton; i el del movimiento relativo, descubierto por Galileo.

Hijo de un matemático, a la vez que músico, Galileo estudió en el monasterio de Vallombrosa, donde sobresalió por sus talentos literarios i mecánicos; i en 1581 entró a la Universidad de Pisa para estudiar la medicina.

Fué en la catedral de esta ciudad donde observó el movimiento oscilatorio de una lámpara de bronce que aun existe en el mismo lugar. Observó que las oscilaciones eran isócronas o de igual duracion, cualquiera que fuera su amplitud, lo que constató comparando el tiempo de las oscilaciones con el moviento regular de su pulso. Hasta entónces no conocia las Matemàticas; mas, habiendo asistido a una leccion de jeometría, encontró tan atrayente esta ciencia i tan sencillas sus verdades, que se dedicó enteramente a su estudio i abandonó la medicina. Mas tarde, en 1586, se retiró de la Universidad para consagrarse de lleno a la observacion i estudios esperimentales.

En 1587 describe la balanza hidrostática i, un año despues, publica un ensayo sobre el centro de gravedad de los sólidos, trabajos que llamaron la atencion i le conquistaron la cátedra de Matemáticas en su ciudad natal. Llevó a cabo los famosos esperimentos de la caida de los graves en la torre inclinada de Pisa, estableciendo de este modo los fundamentos de la Dinámica. Su caracter sarcástico, no obstante sus grandes méritos, le acarrearon enemistades que le hicieron perder su puesto universitario. En 1592 fué nombrado profesor de la Universidad de Padua, cargo que sirvió durante diez i ocho años; i en 1612 publicó las lecciones que diera en sus cursos universitarios.

Demuestra que los cuerpos no caen con una velocidad proporcional a sus pesos; como se creia entónces; supone el movimiento uniformemente acelerado i relaciona el espacio, el tiempo i la aceleracion tal como hoi se enseña en nuestros colejios. Años atras habia encontrado las mismas relaciones valiéndose del plano inclinado, compuesto de una simple cuerda, por la cual corría un pequeño carro; i el tiempo empleado en la caida era medido por un clepsidro o reloj de agua. Probó que la trayectoria de un proyectil es parabólica, fundado implícitamente en los principios que sirvieron mas tarde a Newton para formular las dos primeras leyes del movimiento.

Con motivo de la definicion exacta que dá de *momentum*, producto de la masa por la velocidad, créen algunos autores que conocía la tercera lei del movimiento; mas, ateniéndose otros a que estas leyes de la dinámica no son mencionadas claramente en ninguno de sus escritos, quieren considerar a Galileo como el precursor de Newton.

En Estática estableció que lo que se gana en fuerza se pierde en camino recorrido; determina la equilibrante de un cuerpo apoyado sobre un plano inclinado; establece las leyes fundamentales de las presiones hidrostáticas de los líquidos i de los cuerpos flotantes; i es probable que empleara el termómetro, pero en una forma mui rudimentaria e imperfecta.

Galileo es conocido principalmente, por lo jeneral, como astrónomo; i sus títulos a esta gloria son, con sobrada justicia, eminentes. En 1609 llegó a su noticia que Hippersheim, óptico de Middleburgo, habia dispuesto, dentro de un tubo, dos lentes, i estaban colocados de tal modo que mirando al traves de ellos se veian los objetos mui agrandados. Con estos simples datos se puso a la obra i construyó el anteojo conocido hoi dia con el nombre de anteojo de teatro, compuesto, como se sabe, de dos oculares biconvexos i dos objetivos bicóncavos. Prosiguió en la mejora de su invento i en sus aplicaciones; i al cabo de algunos meses logró fabricar anteojos que aumentaban los objetos 32 veces; i en el curso de un año publicó numerosos trabajos sobre sus observaciones de las manchas solares, las montañas de la luna, los satélites de Júpiter i los anillos de Saturno.

Al descubrimiento del anteojo siguió naturalmente el del microscopio, i entónces fué colmado de honores i recompensas; lo que le permitió abandonar, en 1610, el profesorado i retirarse a Florencia.

Es de presumir que Galileo aceptara en todo tiempo el sistema de Copérnico; sus observaciones de los satélites de Júpiter deben haberle dado una prueba evidente de su verdad; i a pesar de no haberse atrevido, en un principio, a lanzar al público ideas tan avanzadas como temerarias, despues de estos descubrimientos, preconizó el sistema solar en términos decididos i enérjicos. El 24 de Febrero de 1616, la Inquisicion decretó que sus ideas eran contrarias a las Santas Escrituras. En Enero de 1632, Galileo publicó sus diálogos sobre el sistema de Copérnico, sin hacer mencion de las tres leyes inmortales de Kepler, conocidas en el mundo científico desde 1609. Despues de la publicacion de esta obra por mas que mereciera la aprobacion de la censura eclesiástica, Galileo fué llamado a Roma i aquí tuvo que retractarse. Los detalles de este desgraciado suceso se hallan tan desnaturalizados, a causa de las funestas pasiones relijiosas que se suscitáron entónces i que todavía se promueven, que el historiador de la marcha de la ciencia ha de dejar al tiempo i a la sana crítica que dilucide la verdad de incidentes tan debatidos. Cualquiera que sea el fallo definitivo que llegue a pronunciarse, en el mundo político i relijioso tendrá trascendental importancia, en el científico, ninguna. Agregaremos que las últimas investigaciones hechas a este respecto, prueban que Galileo fué amenazado de someterlo a la tortura, pero no con la intencion de hacerla efectiva.

Publicó en Leyde (1638) su obra de mecánica titulada *Discorso intorno a due nuove scienze;* i no obstante de haber perdido completamente la vista en 1637, cuando ya tenía 73 años, prosiguió con igual ardor, en compañia de sus discípulos, sus esperimentos de hidrostática, de mecánica i del choque de los cuerpos.

En suma, las investigaciones mecánicas de Galileo son memorables i dignas de los mayores elojios, por cuanto establece que las ciencias deben estar fundadas sobre hechos deducidos de la esperimentacion; sus observaciones astronómicas son excelentes i fueron espuestas con un talento literario incomparable.

Francisco *Bacon* (1561-1626) hizo ver, con notable vigor, la necesidad de fundar la ciencia i sus principios sobre bases esperimentales. Educado en Cambridge i recibido de abogado, llegó a ocupar el puesto de canciller del reino, con el título de Lord Verulan.

En 1620 dió a luz su *Novum Organum*, en oposicion al *Organum* de Aristóteles, donde da a conocer las reglas que deben observarse en la esperimentacion científica. Esta obra fué poco conocida hasta el siglo XVIII, ejerciendo desde esta época una accion preponderante i benéfica sobre los estudios de las ciencias. Con esta salvedad, Bacon i Descartes pueden ser considerados como los creadores de la filosofía moderna.

Habak Kuk *Guldin* (1577-1643) nació en Saint Gall, era de oríjen judio, se convirtió al cristianismo i entró en la órden de los jesuitas. Los dos teoremas de Pappo que dió a conocer en su obra *De Centro Gravitatis* (1635), llamaron la atencion de todos los matemáticos de su tiempo.

Eduardo *Wright* (1560 1615) merece ser mencionado en estas pájinas por haber establecido el arte de la navegacion sobre principios científicos. Fué preceptor del hijo de Jacobo I; corrijió la carta de Mercator; publicó *Algunos errores de navegcion reconocidos i correjidos* (1599), obra que esplica las correcciones anteriores de las latitudes, consigna la designacion de 32 estrellas, esplica la inclinacion, la paralaje i la refraccion. Mas tarde encontró que la latitud de Lóndres era de 51°32'.

Willebrod *Snelio* (1581-1626) nació en Leyde, descubrió la lei de la refraccion, enseñó los procedimientos que sirven para determinar el largo de un arco de meridiano terrestre i encontró las propiedades de los triángulos esféricos polares. Revelóse un niño prodijioso, pues a los doce años conocia ya todas las obras matemáticas clásicas de su tiempo.

PROGRESOS DE LA JEOMETRÍA PURA

Juan *Kepler*, uno de los fundadores de la astronomía moderna, nació de padres pobres, cerca de Stuttgard, el 27 de Diciembre de 1571, i murió en Ratisbona el 15 de Noviembre de 1630. Despues de haber estudiado bajo la direccion de Mästlin, en 1593 fué nombrado profesor en Graetz, donde conoció a una viuda rica con quien contrajo matrimonio, sacrificando, a causa del carácter de su cónyuge, la tranquilidad del hogar al bienestar material que procura la fortuna. Seis años mas tarde, en 1599, aceptó el empleo de ayudante del célebre astrónomo Tycho-Brahé, i al año siguiente sucedió a su maestro en el cargo de astrónomo del emperador Rodolfo II. Mas, la desgracia no dejó de perseguirlo: sus honorarios no le fueron pagados; volvióse demente su mujer i poco tiempo despues murió; contrajo segundas nupcias con una niña que habia sido cuidadosamente escojida entre once jóvenes conocidas, pero que le acarreó, como su primera mujer, toda clase de sinsabores. En medio de estas desgracias, fué espulsado de la cátedra i poco faltó para que se le condenara como hereje. Vivió prediciendo el porvenir i haciendo horóscopos, «porque dice él, la naturaleza le concedió a cada animal sus medios de subsistencia i al hombre le dió la astrolojía que es lo accesorio i la ayuda de la astronomía».

Murió en un viaje que habia emprendido para recibir parte de sus honorarios con que sostenia a sus hijos.

Hemos hablado ya de las leyes descubiertas por Kepler i de la parte importante que tuvo en la vulgarizacion del uso de los logaritmos; pero lo que se ignora jeneralmente es que Kepler era un jeómetra i un aljebrista de primer órden. Su nombre, unido al de Galileo i Desargues, forma el lazo de union que média entre el Renacimiento i los tiempos modernos.

En su obra *Paralipomena* (1604) dá a conocer el principio de continuidad; como ejemplo demuestra que la parábola es el caso límite a la vez de la elipse i de la hipérbola; i da un segundo ejemplo al hablar de las cónicas i de sus focos, término introducido por él en la jeometría; esplica que dos paralelas se encuentran en el infinito e imajina el ángulo excéntrico en la teoria de la elipse.

En su *Estereometria* (1615) determina el volúmen i el área de ciertos sólidos, empleando para ello los infinitamente pequeños en vez del método de exhaucion de los antiguos.

Fueron emprendidos estos estudios con motivo del problema propuesto por un negociante en vinos de determinar el volúmen de un barril. Guldin i otros autores objetaron su método de los infininitesimales como inexacto; mas, está fuera de duda que Kepler procedió con entera correccion, preparando de este modo el descubrimiento de los indivisibles que hiciera mas tarde Cavalieri i del Cálculo Infinitesimal de Newton i Liebritz.

Los descubrimientos de Kepler en astronomía tienen su oríjen en los trabajos de Tycho Brahe i son fruto de laboriosísimos e innumerables estudios practicados con objeto de reducir los diversos fenómenos celestes a leyes símples. La primera de sus leyes (1609) espresa que los planetas describen elipses alrededor del sol, que ocupa uno de sus focos; la segunda, que las áreas descritas por los radios vectores son proporcionales a los tiempos empleados en describirlos; i la tercera (1619), que los cuadrados de los tiempos de las revoluciones planetarias son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al sol. Dedujo estas leyes de las observaciones que hiciera de los movimientos de Marte i la Tierra; las hizo estensivas a los demas planetas i trató de esplicarlas siguiendo la teoría de los torbellinos de Descartes Kepler consagró, ademas, una gran parte de su vida en buscar la esplicacion de la vision i refraccion en óptica.

Gerardo *Desargues* (1593-1662) nació en Lyon, fué injeniero i arquitecto; dió en Paris conferencias gratuitas que produjeron una grande impresion entre sus contemporáneos i 1636 publicó una obra de perspectiva. Tres años despues en 1639, dió a luz su *Brouillon Proiect* sobre las cónicas, obra descubierta por Miguel Chasles en 1845 i con la cual se ha conquistado el título de creador de la jeometria proyectiva. Establece en ella el principio de continuidad de Kepler; así, los estremos de una recta pueden ser considerados como coincidentes; las paralelas se encuentran en el infinito, lo mismo que los planos paralelos; la recta es un círculo de radio infinito; establece la teoría de seis puntos en involucion, la propiedad proyectiva de haces en involucion, i la teoría de las polares. Hace ver que la tanjente es la posicion límite de la secante i que la asíntota es una tanjente en el infinito. Demuestra que las líneas que unen dos a dos cuatro puntos de un plano, determinan sobre una transversal cualquiera tres pares de puntos en involucion, i que con una cónica que pasa por los 4 puntos se puede obtener otro par de puntos en involucion con dos cualesquiera de los primeros. Prueba que la interseccion de las diagonales i dos lados de un cuadrilátero inscrito en una cónica, forma una triada conjugada, i aun cuando uno de los tres puntos está en el infinito, su polar es un diámetro. Se puede afirmar que su libro encierra los fundamentos de la involucion, la homolojía, los polos i polares i la perspectiva.

Los trabajos de Desargues tuvieron considerable influencia sobre Descartes, Pascal i demas matemáticos del siglo XVII; mas, con la creacion de la Jeometría Analítica de Descartes, la Jeometría Proyectiva fué relegada al olvido, hasta los comienzos del siglo XIX en que tomó un nuevo i mas vigoroso vuelo.

Estado de las Matemáticas a fines del Renacimiento.

Antes de entrar al período mas brillante que rejistran las pájinas de la historia de la Ciencia Matemática conviene hacer un resúmen del estado de los conocimientos adquiridos hasta principios del siglo XVII.

Las verdades fundamentales de la Aritmética, del Aljebra, de la Teoría de las Ecuaciones i de la Trigonometría eran ya conocidas i sus líneas jenerales estaban ya trazadas; empero no existía ningun libro elemental de estas doctrinas por lo que los hombres de estudio tenian que acudir a las voluminosas obras orijinales para posesionarse de tales conocimientos. La notacion aljebraica habia quedado definitivamente establecida, pero su uso no era jeneral i no fué universalmente aceptado sino en las postrimerías del siglo XVII.

La Mecánica en sus grandes ramas de la Estática estudiada por Stevin i la Dinámica creada por Galileo, presentaban una sólida base científica para los estudios de Newton; i es permitido decir que su progreso necesitaba de la estension que le dieron Descartes a la jeometria i Newton al cálculo.