VARIACION DE LAS INTEGRALES MULTIPLES

POR

DOMINGO ALMENDRAS
Astrónomo del Observatorio Astronómico Nacional

VARIACION DE LAS INTEGRALES MULTIPLES

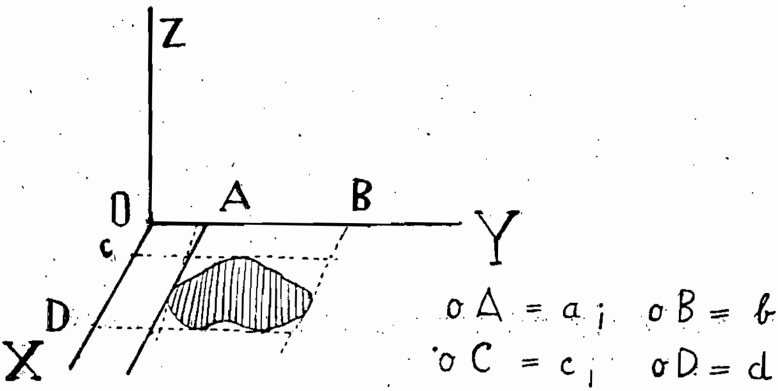
CUANDO se consultan algunas obras sobre el cálculo de las variaciones o algunos tratados de análisis que tratan esta materia, se tropieza con dificultades a veces difíciles de salvar para los que necesitan conocerlo en vista de sus usos prácticos, pues para el matemático sucederá lo contrario, él se entusiasma con la elegancia del rigor de una demostración.

Poniéndonos del lado práctico, queremos indicar un procedimiento sencillo para manejar el cálculo de las variaciones de las integrales dobles, pues el de las integrales simples es muy común.

Consideremos la integral doble

$$I = \int_{a_0}^{b} \int_{x_0}^{x_1} F\ (z, x, y, p, q, r, s, t)\ dxdy$$

extendida a una región del plano (X Y) en que la función F $(^0/_0)$ es definida. Diremos que la integral I está tomada entre límites fijos cuando la región del plano XY es limitada por una curva $y = \varphi(x)$ y si para los valores de x e y correspondientes a los puntos de la curva $y = \varphi(x)$ la función z se reduce a una función determinada $\psi(x, y)$. Si la función z se incrementa en $\varepsilon \zeta$ siendo ζ una función arbitraria de x e y ε una cantidad positiva arbi-



trariamente pequeña; $\varepsilon \zeta$ se llama la variación de z y la designaremos por δz.
p, q, r, s, y t, se reducen a:

$$p + \varepsilon \frac{\delta \zeta}{\delta x}, \quad q + \varepsilon \frac{\delta \zeta}{\delta y}, \quad r + \varepsilon \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2}, \quad s + \varepsilon \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x \delta y}, \quad t + \varepsilon \frac{\delta^2 \zeta}{\delta y^2}$$

las expresiones

$$\varepsilon \frac{\delta \zeta}{\delta x}, \quad \varepsilon \frac{\delta \zeta}{\delta y} \quad \varepsilon \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2}, \quad \varepsilon \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x \delta y}, \quad \varepsilon \frac{\delta^2 \zeta}{\delta y^2}$$

se llaman las variaciones de p, q, r, s y t y se designarán por δp, δq, δr, δs, δt.

De modo que la función $F(z, y, p, q, r, s, t)$ se reducirá a

$$F(z + \delta z, x, y, p + \delta p, q + \delta q, r + \delta r, s + \delta s, t + \delta t)$$
$$= F(z, x, y, p, q, r, s, t) +$$

$$\frac{\delta F}{\delta z}\delta z + \frac{\delta F}{\delta p}\delta p + \frac{\delta F}{\delta q}\delta q + \frac{\delta F}{\delta r}\delta r + \frac{\delta F}{\delta s}\delta s + \frac{\delta F}{dt}\delta t + \ldots$$

La diferencia $F(z+\delta z, x, y, p+\delta p, r+\delta r, s+\delta s, t+\delta t)$
$-F(z, x, y, p, q, r, s, t)$

se llama la variación total de la función F y se designa por ΔF, de modo que:

$$\Delta F = \frac{\delta F}{\delta z}\delta z + \frac{\delta F}{\delta p}\delta p + \frac{\delta F}{\delta q}\delta q + \frac{\delta F}{\delta r}\delta r + \frac{\delta F}{\delta s}\delta s + \frac{\delta F}{\delta t}\delta t \ldots\ldots$$

$+$más términos del 2.º orden.

La integral I se reducirá a $I + \Delta I$ tal que

$$\Delta I = \int_a^b \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\delta F}{\delta z}\delta z + \frac{\delta F}{\delta p}\delta p + \frac{\delta F}{\delta q}\delta q + \frac{\delta F}{\delta r}\delta r + \frac{\delta F}{\delta s} \right.$$

$$\left. \delta s + \frac{\delta F}{\delta t}\delta t + \text{inf. de 2.º orden} \right) dx\, dy$$

Como sabemos, el objeto de producir la variación de I es el de encontrar la función que reduce a un máximo o a un mínimo la integral I en la región considerada. Ahora es esvidente que el objeto se habrá alcanzado cuando ΔI conserve un signo fijo en toda la región considerada. Se sabe además que δz siendo por definición igual a $\varepsilon\zeta$ y ζ completamente arbitrario, se puede elegir arbitrariamente la cantidad ε de modo que el signo de ΔI sea el del término principal que contiene a $\varepsilon\zeta$ por tanto, para que ΔI conserve un signo fijo es necesario que el término en $\varepsilon\zeta$ sea nulo.

Formemos pues el término en δz o $\varepsilon\zeta$

Se tiene integrando por partes

$$\int_a^b \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta F}{\delta p}\delta p\, dx dy = \int_a^b \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta F}{\delta p}\frac{\delta}{\delta x}(\delta z)\, dx\, dy$$

$$= \int_a^b dy \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta F}{\delta p} \frac{\delta}{\delta x} (\delta z) \, dx$$

$$\int_b^a \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta F}{\delta p} \delta p \, dxdy = \int_b^a \left[\frac{\delta F}{\delta p} \delta z \right]_{x_0}^{x_1} dy -$$

$$\int_a^b \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta F}{\delta p} \right) \delta z . \, dx \, dy$$

De la misma manera resulta:

$$\int_b^a \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta F}{\delta q} \delta q \, dxdy = \int_c^d \left[\frac{\delta F}{\delta q} \delta z \right]_{y_0}^{y_1} dx -$$

$$\int_a^b \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta F}{\delta q} \right) \delta z . \, dxdy$$

$$\int_a^b \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta F}{\delta r} \delta r \, dxdy = \int_a^b \left[\frac{\delta F}{\delta r} \frac{\delta \, (\delta z)}{\delta x} \right]_{x_0}^{x_1} dy -$$

$$\int_a^b \left[\frac{\delta}{dx} \left(\frac{\delta F}{\delta r} \right) \delta z \right]_{x_0}^{x_1} dy + \int_a^b \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta^2}{\delta x^2} \left(\frac{\delta F}{\delta r} \right)$$

$$\delta z . \, dxdy$$

$$\int_a^b \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta F}{\delta s} \delta s \, dxdy = \int_a^b \left[\frac{\delta F}{\delta s} \frac{\delta \, (\delta z)}{\delta y} \right]_{x_0}^{x_1} dy -$$

$$\int_c^d \left[\frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta F}{\delta s} \right) \delta z \right]_{y_0}^{y_1} dx + \int_a^b \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta^2}{\delta x \delta y} \left[\frac{\delta F}{\delta s} \right)$$

$$\delta z . \, dxdy$$

El termino que contiene a $\varepsilon\zeta$ en el primea grado es la variación del primer orden de I la cual debe ser identicamente nula dentro del intervalo considerado está variación es:

$$\delta I = \int_a^b \left\{ \left[\frac{\delta F}{\delta p}\delta z\right]_{x_0}^{x_1} + \left[\frac{\delta F}{\delta r}\frac{\delta(\delta z)}{\delta x}\right]_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta F}{\delta r}\right)\delta z\right]_{x_0}^{x_1} + \left[\frac{\delta F}{\delta s}\frac{\delta(\delta z)}{\delta y}\right]_{x_0}^{x_1} \right\} dy$$

$$+ \int_c^d \left\{ \left[\frac{\delta F}{\delta q}\delta z\right]_{y_0}^{y_1} + \left[\frac{\delta F}{\delta t}\frac{\delta(\delta z)}{\delta y}\right]_{y_0}^{y_1} - \left[\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)\delta z\right]_{y_0}^{y_1} + \left[\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta F}{\delta s}\right)\delta z\right]_{y_0}^{y_1} \right\} dx$$

$$+ \int_a^b \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\delta F}{\delta z} - \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta F}{\delta p}\right) - \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta F}{\delta q}\right) + \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left(\frac{\delta F}{\delta r}\right) + \frac{\delta^2}{\delta x \delta y}\left(\frac{\delta F}{\delta s}\right) + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)\right] \delta z.\ dx\ dy$$

Ahora es fácil darse cuenta que si los límites son fijos debe tenerse ahí $\delta z = o$, pues para los valores de x e y que satisfacen la función $y=\varphi(x)$ la función z se reduce a la función determinada $\psi(x, y)$, es decir $y=\varphi(x)$ y $z=\psi(x, y)$ determinan una curvo fija. Se tiene pues,

$$\delta I = \int_a^b \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\delta F}{\delta z} - \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta F}{\delta p}\right) - \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta F}{\delta q}\right) + \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left(\frac{\delta F}{\delta r}\right) + \frac{\delta^2}{\delta x \delta y}\left(\frac{\delta}{\delta s}\right) + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)\right] \delta z.\ dxdy = o$$

Como está integral debe ser nula cualquiera que sea la función arbitraria δz se tendrá finalmente

$$(1)\ \frac{\delta F}{\delta z} - \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta F}{\delta p}\right) - \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta F}{\delta q}\right) + \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left(\frac{\delta F}{\delta r}\right) + \frac{\delta^2}{\delta x \delta y}\left(\frac{\delta F}{\delta s}\right) + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\left(\frac{\delta F}{\delta t}\right) = o$$

Este ecuación con derivadas parciales del cuarto orden nos sirve para determinar la función z(x,y) que hace máxima o mínima la integral I.

$$I = \int_a^b \int_{x_0}^{x_1} F\ (z,\ x,\ y,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)\ dxdy.$$

Aplicación.—Determinar la superficie de aérea mínima que pasa por una curva dada cerrada.

Solución.—Puesto que el área de una superficie cualquiera está dáda por—

$$\int_b^a \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+p^2+q^2}\ dxdy \quad \text{en que}$$

$$p = \frac{\delta z}{\delta x},\quad q = \frac{\delta z}{\delta y}$$

se tiene inmediatamente aplicando la ecuación (1)

$$F = -\sqrt{1+p^2+q^2}$$

$$\frac{\delta F}{\delta z} = o\ :$$

$$\frac{\delta F}{\delta p} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdots\cdots\cdots \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta F}{\delta p}\right) = \frac{r(1+q^2) - pqs}{(1+p^2+q^2)^{3:2}}$$

$$\frac{\delta F}{\delta q} = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdots\cdots\cdots \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta F}{\delta q}\right) = \frac{t(1+p^2) - pqs}{(1+p^2+q^2)^{3:2}}$$

La ecuación que nos dá z es;

$$\frac{r\ (1+q^2) + t\ (1+p^2) - 2\ p\ q\ s}{(1+p^2+q^2)^{3:2}} = o$$

Se demuestra en la teoría de las superficies que esta expresión representa la curvatura media en un punto de la superficie, luego llamando R_1 y R_2 los radios de curvatura principales se tiene:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0 \qquad (*)$$

Las superficies de área mínima que pasan por una curva fija tienen curvatura media nula en todos sus puntos.

Si la curva dada es plana la superficie de área mínima que pasa por ella será la parte del plano encerrada por ella.

2.ª Aplicación.—Encontrar las superficies de área mínima que encierran un volumen dado.

Se resuelve de la misma manera que el anterior reduciéndolo primeramente a un problema de mínimo absoluto. Se encuentra

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{Const},$$

es decir las superficies de área mínima que encierran un volumen dado tienen curvatura media constante en todos sus puntos.

Hay muchas superficies que cumplen la propiedad anterior y se presenta comunmente en la naturaleza. (Experiencia de Plateau, y fenómenos capilares en general). (Ver Chwolson II Tomo).

Para encontrar las variaciones de las integrales múltiples se procede en forma análoga; por esta razón he tomado una integral doble y para no complicar la exposición con desarrollos largos que no tendrían objeto, por lo demás creo que no se presentarán casos más complicados en la naturaleza.

(*) Esta ecuación ha sido integrada por Monge.

NOTA.—Pedimos disculpas a nuestros lectores por haber usado el mismo signo para la derivada parcial y la variación· ¡Consecuencias de la escasez de tipos matemáticos!