

Estudios en honor de  
Francisco Javier Domínguez  
AUCH, 5ª Serie, N° 8 (1985): 225-242

## JUEGOS DE AGUA

MATILDE MACAGNO  
Estados Unidos de Norteamérica

### INTRODUCCIÓN

Los chorros o venas líquidas han interesado a la humanidad desde hace mucho tiempo. Desde la remota antigüedad se ha hecho uso de fuentes con uno o más chorros para la provisión de agua y más tarde como objetos de embellecimiento y causas de placer estético. Aunque básicamente un chorro sigue siempre una curva simple bajo la acción de la gravedad, tal curva en sí resulta bella y armoniosa. El encanto de los chorros de agua está ciertamente en los fenómenos que los acompañan, debidos principalmente a las resistencias y a la acción de la tensión superficial. Otra cualidad que puede aumentar el atractivo de los juegos de agua es la impermanencia. Los artistas y técnicos que diseñaron fuentes parecen haber pensado durante mucho tiempo en producir chorros permanentes, dejando al azar las variaciones. No pueden dejar de haber notado que el viento, por ejemplo, agregaba una variabilidad casi siempre agradable. Hay otra impermanencia que quizás apareció pronto, pues hay evidencias históricas del uso del chorro vertical en fuentes de la antigüedad. Este chorro fue y es todavía muy popular. Nos presenta la paradoja de que el agua debiera bajar por la misma línea por la que subió. Es pues fácilmente inestable, y su intermitencia es sin duda uno de sus encantos, cuando es suficientemente pronunciada. Con el progreso de la tecnología, los chorros líquidos se han ido aplicando de diversas maneras, y en muchas regiones el viajero puede ver diversas clases de chorros, generalmente impermanentes, usados para el riego de los cultivos. La idea inspiradora de este trabajo es de que un análisis de los chorros impermanentes

semejantes al que ha existido desde hace mucho tiempo para chorros permanentes puede resultar de interés tanto para crear nuevos juegos de agua como para perfeccionar algunas aplicaciones técnicas.

#### ALGUNAS NOCIONES BÁSICAS

Al comenzar esta investigación con la mira puesta en los ejes de los chorros impermanentes, no dejamos de percibir los atrayentes problemas que los chorros permanentes ofrecen. Hemos mencionado el chorro vertical, que en verdad no se puede analizar con el simple método que vamos a usar en este trabajo. Aunque se hallan ahora pocas referencias sobre el chorro vertical, parece haber despertado interés durante un cierto período, como lo atestiguan las fórmulas de Mariotte, d'Aubuisson y Weisbach, así como las tablas de Freeman citadas por F.J. Domínguez (1). Sabemos también que Leonardo da Vinci y Torricelli se ocuparon de chorros verticales. El primero estudió la analogía entre la trayectoria de un proyectil vertical y la de un chorro vertical y describió precisa, aunque cualitativamente, las diferencias entre los dos fenómenos (2).

Otro fenómeno muy atrayente es el de la inversión de la vena líquida, que también aparece en los chorros impermanentes. Pero la inversión de la vena líquida es muy difícil de estudiar; como observa el Prof. Domínguez, a pesar de haber sido observado ya por Bidone en el siglo pasado, "no ha sido reducido al cálculo y no tenemos de él un conocimiento científico". También es importante la disgregación de los chorros en gotas de diferentes tamaños.

En este estudio se olvidarán muchos de los bellos aspectos de los chorros para concentrar la atención y el trabajo de análisis en la forma del eje del chorro. Supondremos las mismas condiciones que especifica el Prof. Domínguez en su estudio de chorros permanentes (1), donde hace notar que "para el trazado de la trayectoria de una vena líquida, que sale de un orificio en la atmósfera que la rodea, se puede prescindir de la resistencia del aire cuando las velocidades son pequeñas y las dimensiones del orificio no son muy reducidas y, dada la constancia de las presiones, el eje de los chorros es la trayectoria parabólica de un punto material pesado". Las condiciones para chorros impermanentes que cambian de forma son algo diferentes, pero esa diferencia se estudiará cuando se emprenda un cálculo en el cual se trate de incluir las resistencias. Por ahora, se procederá al cálculo de trayectorias de partículas que no interfieren entre ellas y que hallan, supuestamente, una resistencia despreciable.

$$v_x = V_o \quad v_z = g(t - T)$$

Integrando una vez más, se obtienen las coordenadas de la partícula en función del tiempo,

$$x_T = V_o(t - T) \quad z_T = \frac{g(t - T)^2}{2}$$

El subíndice T se usa para recordar que estas son las coordenadas de la partícula que sale de la boquilla en el instante  $t = T$ . Eliminando el parámetro  $t$  entre las dos ecuaciones anteriores, se obtiene

$$z = \frac{gx^2}{2V_o^2}$$

que muestra que el eje del chorro es una parábola fija. La representación gráfica de este movimiento depende del tiempo en que se deja abierta la boquilla. Si ese tiempo es  $t$ , se puede representar el chorro a los tiempos  $t = t, 2t, 3t$ , etc., tal como se ha hecho en la Fig. 1. Las tres figuras

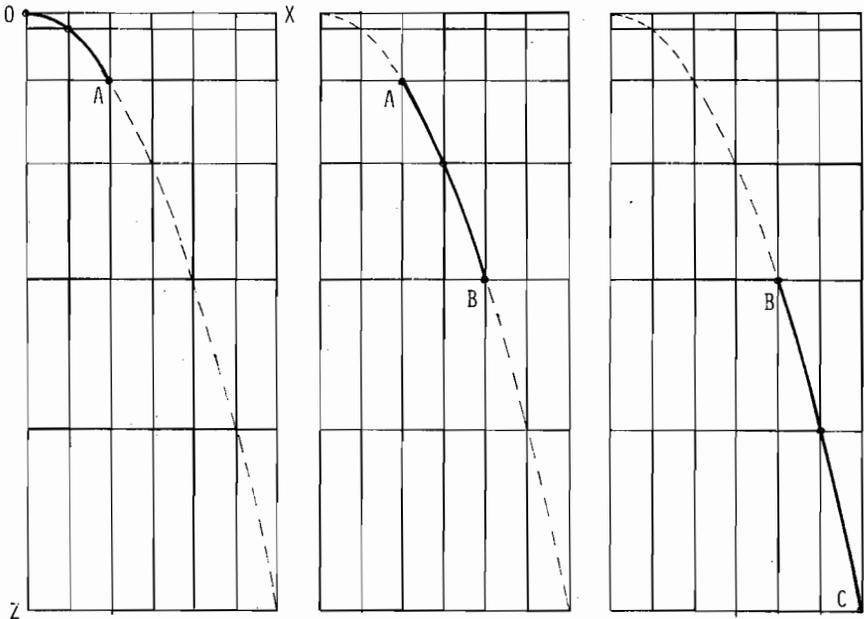


Fig. 1 Chorro impermanente de eje fijo. La figura da una visión lagrangiana, en la que se ve un filamento de líquido alargándose a medida que cae.

corresponden a las que se obtendrían en un registro fotográfico mediante instantáneas tomadas con intervalo  $t$  entre una y otra. Teóricamente, se obtienen segmentos de parábola de longitud creciente. Ellos representan una visión lagrangiana del fenómeno en estudio, pues muestran donde se halla el fluido en cada momento. Se ven además tres partículas que ayudan a visualizar mejor este movimiento. Como se trata de un dado volumen de fluido en realidad, una estimación de las longitudes de estos segmentos nos da una idea de cómo se va reduciendo la sección transversal de este proyectil líquido. Esta reducción puede ser de interés cuando, en un estudio posterior, se consideren las resistencias.

Nótese que la parábola sobre la que corre el filamento de agua se ha obtenido uniendo los puntos de intersección pertinentes de dos familias de rectas, una de verticales a distancias iguales ( $x = V_0 t$ ), y otra de horizontales a distancias que crecen como los números impares ( $z = gt^2/2$ ).

#### GENERACIÓN DE UN CHORRO PARABÓLICO

En este caso, se trata del chorro determinado por el agua que sale de una boquilla con velocidad de salida horizontal que crece linealmente con el tiempo en el intervalo de tiempo  $(0, T_0)$ ; después de  $t = T_0$ , la velocidad queda constante. El agua que sale antes de  $t = T_0$  forma un filamento de forma y longitud variables; este es el chorro impermanente. El agua que sale después de  $t = T_0$ , forma un chorro parabólico permanente.

Asumimos nuevamente que el líquido está representado por un conjunto de  $n$  partículas. Las ecuaciones que dan las componentes de la velocidad de esas partículas, durante el primer período, son

$$v_x = \frac{dx}{dt} = cT$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = g(t - T)$$

para  $0 \leq T \leq T_0$

donde  $c$  es una constante dimensional, y  $T$  es el tiempo de salida del orificio para una dada partícula.

La posición de la partícula en función del tiempo  $t$  estará dada por las coordenadas:

$$x_T = \int_T^t cT dt = cT (t - T)$$

$$z_T = \int_T^t g (t - T) dt = \frac{g}{2} (t - T)^2$$

Eliminando la variable  $t$ , se obtiene:

$$z = \frac{g}{2} \frac{x^2}{c^2 T^2}$$

esta es la forma cartesiana de la ecuación de la trayectoria de la partícula líquida que salió de la boquilla en el instante  $T$ .

Si, en cambio, se elimina el parámetro  $T$ , de las ecuaciones para  $x$ ,  $z$ , se obtiene otra fórmula que en forma gráfica da una familia de curvas que son ejes del chorro variable para dados tiempos  $t$ . La fórmula, en su forma implícita es

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{4xz}{cg} + \frac{4z^2}{g^2} - \frac{2t^2z}{g} = 0$$

Esta ecuación, que es válida para partículas que salieron del orificio en tiempos  $t$  anteriores a  $T_0$ , da una familia de parábolas con eje girado  $45^\circ$  respecto del sistema  $x$ ,  $z$ . El chorro impermanente tiene por eje segmentos de esas parábolas (Fig. 2). Esos segmentos tienen un extremo sobre el eje  $z$ . El otro extremo está por un tiempo en el origen del sistema de coordenadas (donde está el orificio) y luego está sobre la parábola que representa el eje del chorro permanente.

Las ecuaciones paramétricas del chorro permanente son:

$$\begin{aligned} x &= cT_0(t - T) && \text{para} \\ z &= \frac{g}{2}(t - T)^2 && \begin{aligned} t &\leq T_0 \\ T &\leq T_0^x \end{aligned} \end{aligned}$$

La ecuación cartesiana es

$$z = \frac{g}{2} \frac{x^2}{2c^2 T_0^2}$$

Nótese los números en la Fig. 2. Si uno sigue un número dado, está mirando el eje del chorro para el instante  $t$  dado por ese número, en un cierto sistema de unidades. Si uno sigue alguna sucesión de números, se está mirando una trayectoria. Para no complicar la figura, el primer número de la sucesión no ha sido escrito en la figura, aunque es importante, pues es el número que corresponde al tiempo de salida. Por ejemplo, la parábola marcada por 3, 4, 5, 6, 7 comienza con 2; es decir, esta es la parábola para la partícula que sale para  $T = 2$ .

En realidad se habría podido mostrar cómo hacer estas ecuaciones

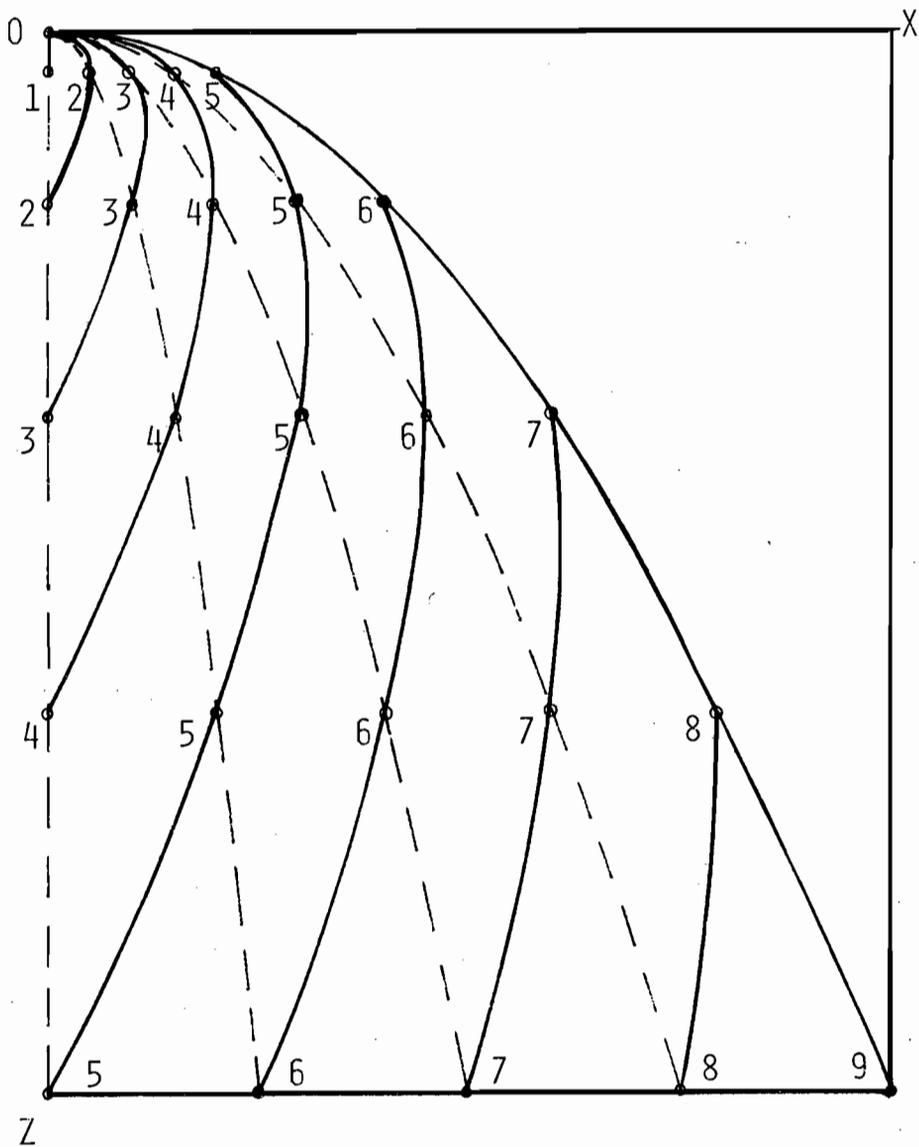


Fig. 2 Trayectorias y ejes del chorro impermanente en el caso de la generación de un chorro parabólico. (Un esquema semejante a esta figura ha sido publicado por E.O. Macagno (3) sin análisis)

adimensionales, y los gráficos lo son. Pero todo el análisis es simple, y parece una complicación inútil el explicar cómo hacer adimensional el tratamiento de este tema.

Nótese, finalmente, que la Fig. 2 representa la parte superior de una figura que podría extenderse indefinidamente hacia abajo; por eso algunos ejes de chorro no muestran la parte que termina sobre el eje  $z$ .

#### DESAPARICIÓN DE UN CHORRO

Consideremos el chorro permanente del caso anterior, y supongamos que en un cierto momento comenzamos a reducir linealmente la velocidad de salida del agua por el orificio. Si seguimos hasta que la velocidad se haga cero, y la dejamos en cero, habremos hecho desaparecer el chorro. Si la operación se realiza en un tiempo  $T_0$ , la velocidad de salida de una partícula vendrá dada por sus componentes

$$\begin{aligned}v_x &= c (T_0 - T) \\v_z &= g (t - T)\end{aligned}$$

donde  $T$  indica el instante en que sale la partícula por el orificio. Las coordenadas de tal partícula, en función del tiempo  $t$ , serán:

$$\begin{aligned}x &= c (T_0 - T) (t - T) \\z &= \frac{g}{2} (t - T)^2\end{aligned}$$

Si se elimina el tiempo  $t$  entre estas dos ecuaciones, se obtiene la ecuación cartesiana de la trayectoria

$$z = \frac{gx^2}{2c^2 (T_0 - T)^2}$$

La ecuación del eje del chorro en sus distintas posiciones es

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{4xz}{cg} + \frac{4z^2}{g^2} - (T_0 - t) \frac{2z}{g} = 0$$

Tanto las trayectorias como las curvas que dan el eje variable de este chorro se dan en la Fig. 3. Cuando  $t < T_0$  tales ejes pasan por el origen de coordenadas (donde está el orificio). Al llegar a  $t = T_0$ , el eje toma la forma rectilínea. Para  $t > T_0$ , las curvas no pasan más por el origen

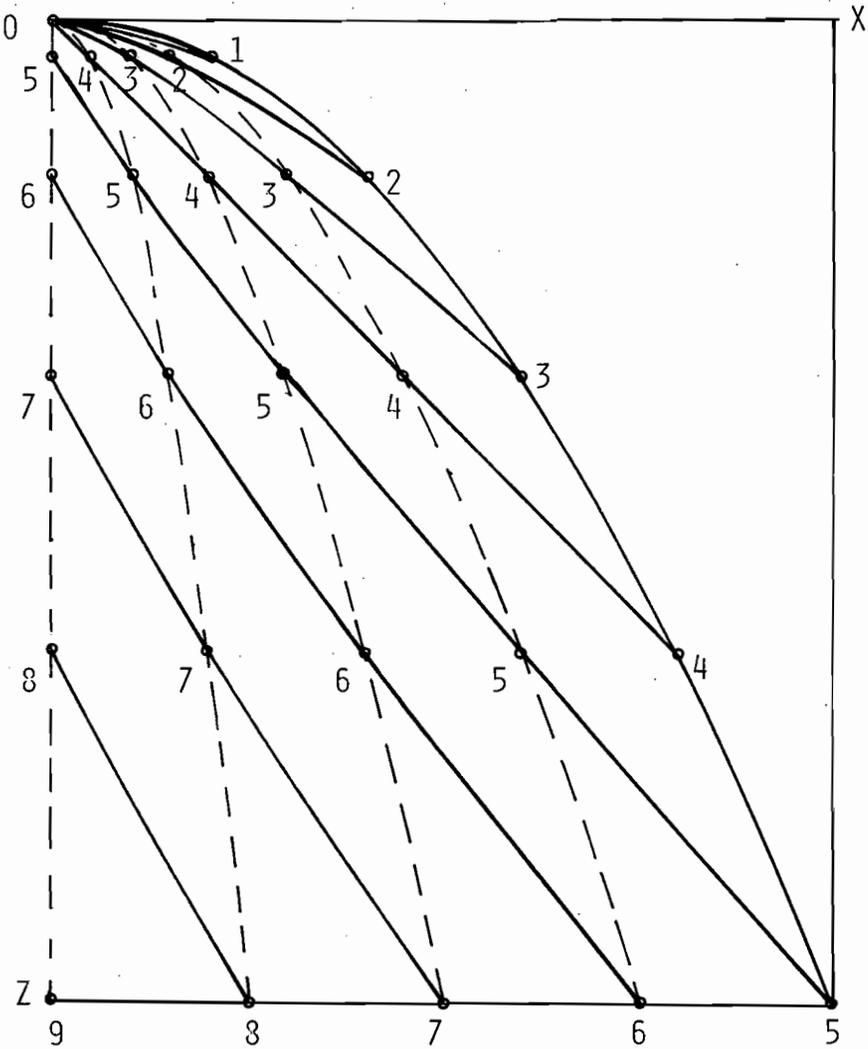


Fig. 3 Trayectorias y ejes del chorro impermanente que se originan al cortar gradualmente la alimentación a un chorro parabólico. (Un esquema semejante ha sido publicado por E.O. Macagno (3) sin análisis)

(aunque su prolongación sí lo hace). El punto de las curvas que está sobre el eje z, tiene ordenada

$$z = \frac{g}{2} (t - T_0)^2$$

Es interesante notar que aunque este chorro impermanente se origina por una maniobra que es simétrica de la que originó el anterior, sus curvas son bien diferentes. En la sección sobre aspectos experimentales, se explicará un procedimiento sencillo para producir este chorro impermanente en el laboratorio.

#### CHORRO OSCILANTE EN UN PLANO VERTICAL

Si el orificio se dirige hacia abajo y se lo hace oscilar alrededor de un eje en su plano, mientras se mantiene una velocidad de salida constante en magnitud, se obtiene un chorro impermanente oscilante. El ángulo  $\alpha$  de la normal al plano del orificio se variará entre  $\alpha_0$  y  $-\alpha_0$  con velocidad angular uniforme, de modo que  $\alpha = \omega T$ . Los valores extremos serán entonces  $\alpha T_0$ , y  $-\alpha T_0$ . Resulta conveniente contar el ángulo descrito en forma continua, y por eso se expresa que entre 0 y  $T_0$ , el ángulo  $\alpha$  está dado por  $\alpha = \omega T$ ; entre  $T_0$  y  $3 T_0$ , por  $\alpha = \omega(2T_0 - T)$ ; entre  $3T_0$  y  $5T_0$ , por  $\alpha = \omega(-4T_0 + T)$ ; etc.

La velocidad de salida del líquido tiene magnitud constante, pero como vector es variable y está dada por

$$\vec{V}_0 = V \sin T \vec{i} + V \cos T \vec{k}$$

Para una partícula que comienza su trayectoria en el instante  $T$  (durante el primer medio período), se obtendrán las coordenadas  $x$ ,  $z$  si se integran las componentes de la velocidad:

$$\begin{aligned} v_x &= V \sin \omega T \\ v_z &= V \cos \omega T + g(t - T) \end{aligned}$$

Se obtienen:

$$\begin{aligned} x &= (V \sin \omega T)(t - T) \\ z &= (V \cos \omega T)(t - T) + \frac{g}{2}(t - T)^2 \end{aligned}$$

Una vez que se alcanza el ángulo  $\alpha = \omega T_0$ , se invierte el movimiento, continuando en sentido contrario hasta que se llega a  $\alpha = -\omega T_0$ . Como se dijo más arriba, el ángulo variará ahora de acuerdo con  $\alpha = 2\omega T_0 - \omega T$ . La ecuación que representa el vector velocidad de salida será ahora

$$\vec{V}_0 = V \sin \omega(2T_0 - T) \vec{i} + V \cos \omega(2T_0 - T) \vec{k}$$

válida para  $T_0 \leq T \leq 3T_0$ .

Las coordenadas  $x$ ,  $z$  se obtienen en forma similar a las anteriores, y son

$$x = [V \sin \omega (2T_0 - T)] (t - T)$$

$$y = [V \cos \omega (2T_0 - T)] (t - T) + \frac{g}{2} (t - T)^2$$

y así sucesivamente. Debe notarse que cuando se llega a  $4 T_0$ , el proceso comienza a repetirse.

En la Fig. 4 se han representado con líneas de trazos las trayectorias de algunas partículas. Se trata de las que salen del orificio para ángulos  $\alpha$  de  $0^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $60^\circ$ , etc. Con líneas llenas se han representado las curvas que va formando el eje del chorro. Las curvas para  $t = 1, 2, 3$  se han dibujado a un costado a fin de no tener demasiados cruzamientos de líneas. Luego se ven las curvas para  $t$  desde 4 hasta 12. El lector puede completar las curvas que no han sido trazadas a fin de no tener demasiados cruzamientos de líneas.

Debe notarse que la figura representa fases iniciales de este chorro impermanente. Una vez que ha pasado suficiente tiempo, ya no se ven curvas cortas como las que corresponden a tiempos  $t = 1, 2, 3, 4, 5$ , etc. La figura adquiere, después de un tiempo, un aspecto de completa simetría. Es claro que en cada instante  $t$  se verá una sola línea. Para obtener una figura como la Fig. 4 (o las Figs. 2 y 3) en un experimento, uno tendría que tomar instantáneas todas sobre el mismo cuadro del film.

#### CHORRO IMPERMANENTE EN ESPIRAL

Este caso está inspirado en el molinete hidráulico usado para regar jardines. Se ha pensado en un aparato como el que se muestra en la Fig. 5 en un pequeño esquema. Haciendo rotar la pieza superior, el orificio gira sobre sí mismo, al mismo tiempo que lanza el líquido con velocidad de salida constante en magnitud. Despreciando resistencias y otros efectos, como en los casos anteriores, las componentes de la velocidad serán

$$v_x = V \cos \omega T$$

$$v_y = V \sin \omega T$$

$$v_z = \frac{g}{2} (t - T)$$

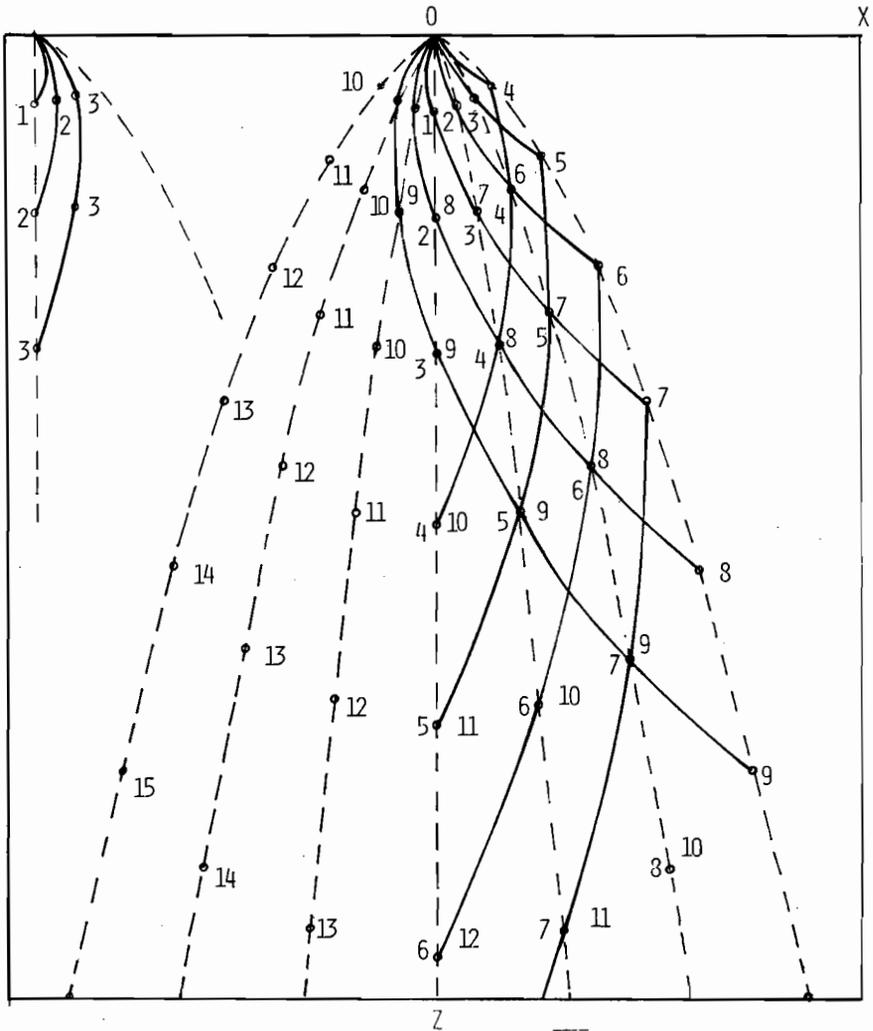


Fig. 4 Chorro oscilante en un plano vertical debido a la oscilación de la boquilla de la cual sale

para una partícula que sale por el orificio en el instante  $T$ . Por integración se obtienen las coordenadas de la partícula para un tiempo  $t$ :

$$x = (V \cos \omega T) (t - T)$$

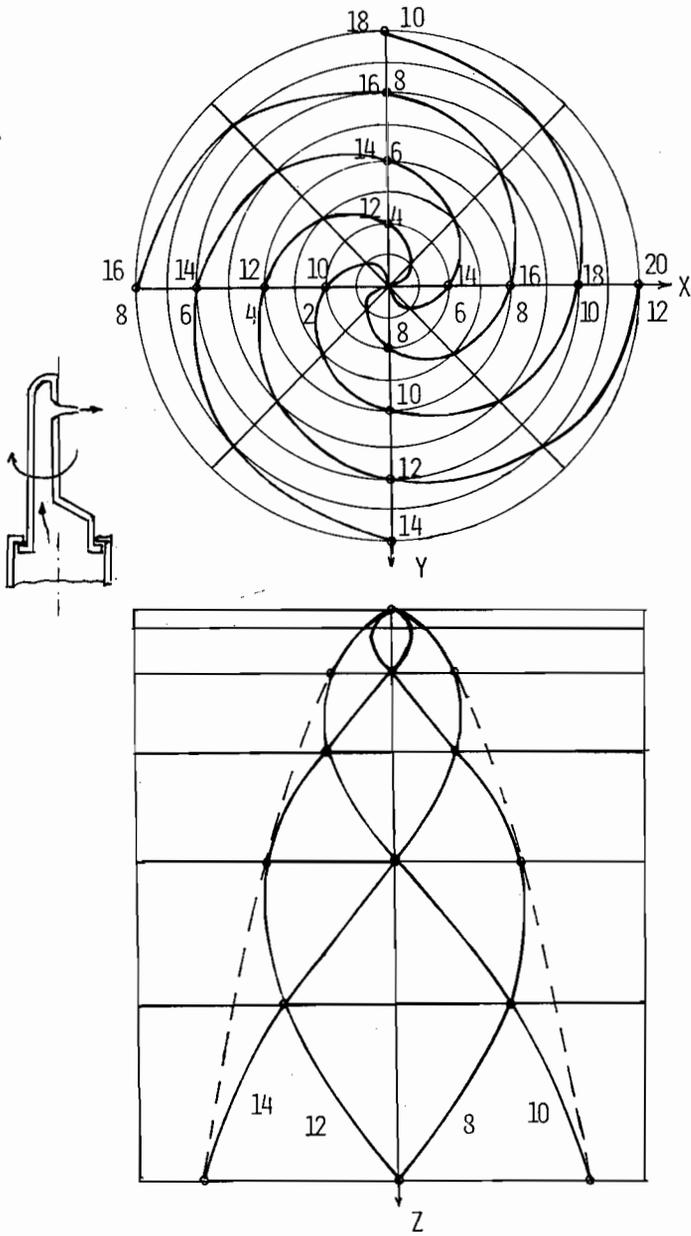


Fig. 5 Chorro impermanente debido a un "molinete" unilateral de radio cero.

$$y = (V \sin \omega T) (t - T)$$

$$z = \frac{g (t - T)^2}{2}$$

Estas ecuaciones son doblemente paramétricas, en  $t$  y en  $T$ . Si calculamos la coordenada polar  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ , obtenemos  $r = V (t - T)$ . En proyección sobre el plano  $x, y$  vemos sobre el radio con coordenada angular  $\theta = \omega T$ , a una partícula que se mueve con movimiento uniforme. Construyendo un sistema de coordenadas polares en la fig. 5 y anotando los tiempos para un cierto número de partículas se pueden trazar muy fácilmente las curvas que dan el eje variable del chorro. Esas curvas son espirales. Para trazar las curvas en su proyección sobre el plano  $x, z$  se ha utilizado una vez más el "papel parabólico". Se necesitan dos proyecciones, pues en este caso los ejes del chorro son curvas en tres dimensiones; se pueden describir como espirales que se desarrollan sobre un paraboloides de revolución.

#### PRIMEROS EXPERIMENTOS

De los casos presentados, el de la desaparición del chorro ofrece posibilidades experimentales muy simples, pues basta usar un recipiente con un orificio lateral y dejarlo vaciarse. Se sabe que entre la altura de agua sobre el orificio,  $h$ , y el tiempo, hay una relación que se establece fácilmente utilizando la ecuación de la conservación de volumen:

$$A \frac{dh}{dt} = Ca\sqrt{2gh}$$

donde  $A$  es la sección transversal del recipiente, que en general es una función de  $h$ , mientras que  $a$  es la sección del orificio. Aunque éste es un problema clásico, fue tratado en forma original por el Profesor Salas Edwards, quien consideró diferentes formas de recipientes, es decir, diferentes  $A = f(h)$ . (4). En el caso de recipiente cilíndrico (o prismático),  $A$  es una constante, y entonces se encuentra por integración de la ecuación de conservación de volumen que  $h$  y  $t$ , el tiempo de vaciado, están relacionados en forma tal que  $h^{1/2}$  es función lineal de  $t$ . Por otro lado, la fórmula de Torricelli nos da la velocidad de salida del líquido por el orificio,  $V$ , como función lineal de  $h^{1/2}$  también; quiere decir que al dejar vaciar el recipiente cilíndrico (Fig. 6) se tendrá una velocidad que disminuye

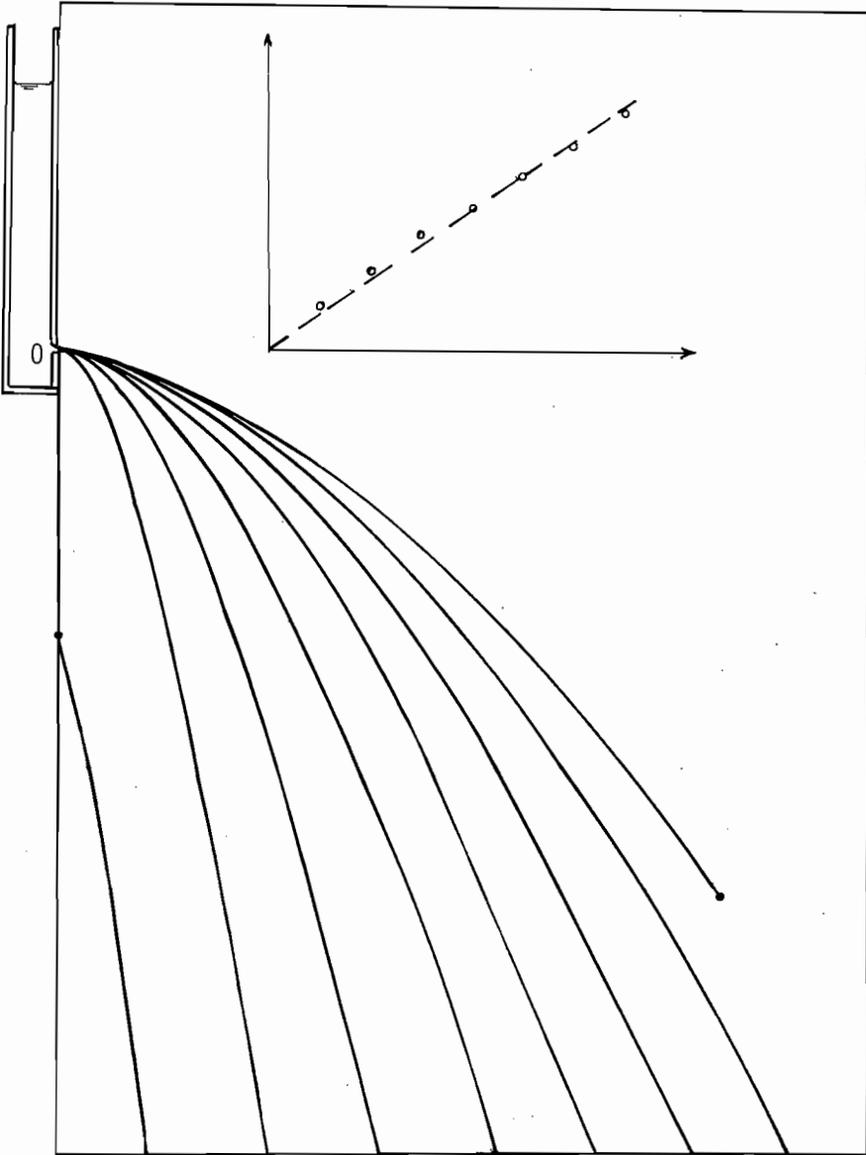


Fig. 6 Resultados experimentales utilizando el chorro impermanente durante el vaciado de un recipiente cilíndrico

linealmente con el tiempo. Estas circunstancias, tan favorables, hicieron que se decidiera comenzar con experimentos para esta clase de chorro.

Los chorros fueron fotografiados a intervalos cortos de tiempo. El resultado de una de las experiencias se da en la Fig. 6 donde se reproducen varias de las curvas fotografiadas. Como se midieron al mismo tiempo las alturas de agua y el tiempo, es posible verificar si la relación lineal entre  $h^{1/2}$  y  $t$  se cumple. Un dibujo incluido en la Fig. 6 muestra que este aspecto se cumple bastante bien, a pesar de los simples medios utilizados.

Si se compara la Fig. 6 con la 3 se verá que hay una analogía entre las dos figuras, pero también se notan en seguida varias discrepancias entre resultados teóricos (basados en grandes simplificaciones) y resultados experimentales. Como la escala elegida para esta serie de experimentos es pequeña, caben esperar los efectos de tensión superficial y también de resistencia. Tanto la observación directa de la vena líquida, como la fotográfica revelan inversión de la vena líquida en su primera parte, antes de que se resuelva en una ristra de gotas. (Ver fotografías en la Fig. 7). Parece evidente que la inversión es tan fuerte al salir el agua del orificio que el líquido se inclina bastante adquiriendo una componente vertical de la velocidad. Una serie inicial de cálculos muestran que será posible mejorar la correspondencia entre resultados teóricos y experimentales, si se introduce la resistencia al movimiento y una componente vertical de la velocidad inicial.

#### CONCLUSIÓN

Conociendo el gran interés del Profesor Francisco J. Domínguez por los fenómenos hidráulicos, al ser invitada a hacer una contribución en su homenaje, la autora se inspiró en un tema que el ilustre maestro presenta en su libro de hidráulica. Se trata de las venas líquidas de las cuales describe no solamente aspectos técnico-científicos sino algunas de sus bellezas. La autora, en sus viajes por el mundo, no ha dejado de gozar del espectáculo de las fuentes de agua que algunos países exhiben entre sus obras llenas de alegría y buena voluntad. Al notar que en las fuentes se están introduciendo más y más efectos de flujo variable, surgió la inspiración de iniciar un estudio de las venas líquidas impermanentes. He aquí los primeros frutos de un trabajo motivado por la admiración y el afecto por uno de los grandes maestros universitarios de nuestros tiempos.

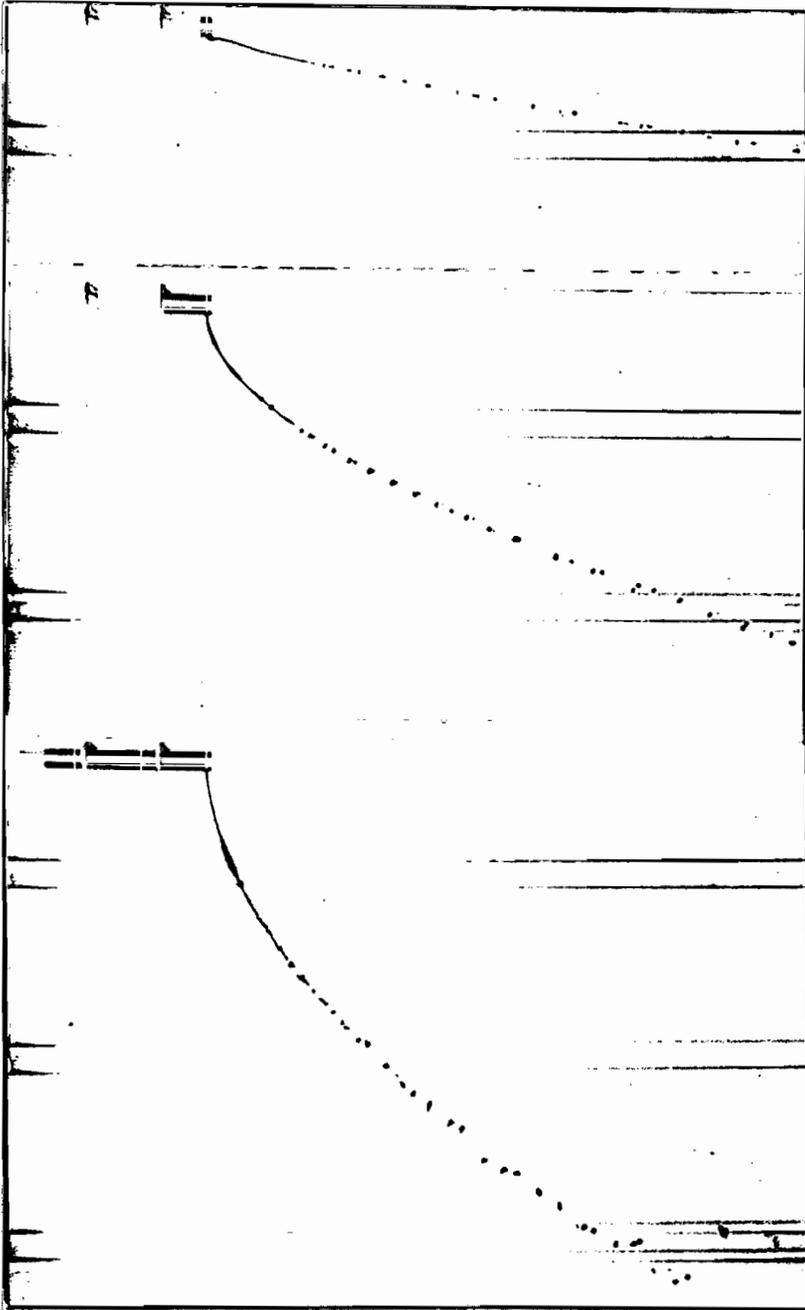


Fig. 7. Estudio experimental de una vena líquida impermanente. Tres instantáneas de un chorro de diámetro pequeño, que se divide en gotas, después de sufrir inversión de la vena. Nótese que en la tercera foto, ya comienza la caída de un extremo sobre el eje vertical.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. DOMÍNGUEZ, F.J. (1945) *Curso de Hidráulica*. Segunda edición ampliada. Santiago, Chile.
2. MACAGNO, E.O. (1985) Leonardo da Vinci: Engineer and Scientist. Berlin Symposium of IAHR. (En prensa).
3. MACAGNO, E.O. (1981) Fluid Mechanics of Gastrointestinal Flow. Capítulo 10 de *Physiology of the Gastrointestinal Tract*, Ed. in chief., L. R. Johnson, Raven Press.
4. SALAS EDWARDS, R. (1918) *Hidráulica General*, Polígrafo. Santiago, Chile.