

Estudios en honor de
Francisco Javier Domínguez
AUCH, 5ª Serie, N° 8 (1985): 211-223

LEY DE FRICCIÓN Y ECUACION UNIDIMENSIONAL DE MOVIMIENTO PARA FLUJO LAMINAR IMPERMANENTE EN DUCTOS ANULARES

MARIO LETELIER S. y EMILIO BORNAND C.
Universidad de Santiago de Chile

I. INTRODUCCIÓN

Un método conveniente y ampliamente utilizado en el análisis de flujo en tuberías es el método unidimensional. En éste la variable independiente es la velocidad media espacial que, en este caso, reemplaza a la velocidad local en las ecuaciones de movimiento. El procedimiento simplifica notablemente ciertos cálculos, pero, por otra parte, exige modelar adecuadamente la fuerza de corte en las paredes del ducto, la cual interviene en la ecuación de cantidad de movimiento.

Cuando el estudio se circunscribe a flujo estacionario en tuberías, el método unidimensional conduce a la familiar ecuación de D'Arcy-Weisbach, según la cual la fuerza cortante es expresada en términos de la velocidad media, dimensiones del ducto y de un coeficiente de fricción. Este último responde a fórmulas exactas en algunos casos relativamente simples y, en otros, a fórmulas semiempíricas o está documentado en tablas y gráficos de acuerdo al tipo de flujo (laminar o turbulento), la geometría del ducto y al número de Reynolds. La anterior situación cambia notablemente cuando se considera flujo impermanente en cañerías. El método unidimensional sigue siendo de gran interés pues contribuye siempre a facilitar los cálculos; pero, no es conocida la forma que, en general, dicho método puede adoptar cuando existen transientes.

Sin embargo, en el caso de tuberías circulares y régimen laminar, es

posible establecer a lo menos dos procedimientos [1] [2] unidimensionales, con la característica común que en ambos el concepto de coeficiente de fricción deja de ser un paso necesario en el cálculo, lo que se debe a que el esfuerzo cortante se puede modelar directamente en términos de la velocidad media.

La formulación analítica que se utiliza en [2] para producir un modelo unidimensional de análisis, en flujo laminar impermanente de un fluido Newtoniano, incompresible en tuberías rectas, largas y de sección circular constante, se puede extender, con ciertas restricciones, a un sistema equivalente de sección rectangular [3].

Los tubos de sección anular concéntrica son de interés en intercambiadores de calor y varias otras aplicaciones. La predicción del campo de velocidades en ellos adopta un alto grado de dificultad cuando el flujo es impermanente, aún en los casos más simples de impermanencia, como lo ilustran los ejemplos de flujo acelerado bajo un gradiente constante de presiones [4] [5] y flujo oscilatorio [6]. La extensión del método unidimensional presentado en [2] a secciones anulares concéntricas es posible, constituyendo su desarrollo el objetivo de este trabajo.

Se deducen expresiones para la ley de fricción, es decir, para una relación entre el esfuerzo cortante en las paredes del ducto y la velocidad media, y para la ecuación de cantidad de movimiento. El estudio incluye una aplicación de las ecuaciones deducidas al problema de flujo acelerado bajo un gradiente de presiones constante, en la cual se contrastan su grado de dificultad y la exactitud con las correspondientes predicciones de la solución exacta del problema.

2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Para las restricciones estipuladas en el párrafo anterior, en relación a las características del fluido y ducto considerados, las ecuaciones de conservación de la masa y cantidad de movimiento para flujo impermanente se pueden convenientemente escribir en coordenadas cilíndricas, a saber:

Continuidad

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} = 0 \quad (1)$$

Momentum

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} - \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial u'}{\partial r'} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z'} \quad (2)$$

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial r'}$$

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial \theta'}$$

en donde u' = velocidad axial, z' = coordenada axial, t' = tiempo, r' = coordenada radial, θ' = coordenada tangencial, $P' = p' + \rho gh$ es la presión piezométrica compuesta por la presión p' y la energía potencial por unidad de volumen asociada a una altura h , ρ = densidad, g = aceleración de gravedad y ν = viscosidad cinemática.

Las condiciones de borde son

$$u'(a, t') = 0 \quad (3)$$

$$u'(b, t') = 0 \quad (4)$$

donde a y b son los radios menor y mayor respectivamente de la sección anular concéntrica. La correcta formulación del problema exige una condición inicial, la que será considerada más adelante.

El gradiente de presiones es, en (2), a lo sumo una función del tiempo, lo que permite definir

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z'} = \phi'(t') \quad (5)$$

ϕ' es la función forzante del sistema, la que puede adoptar diferentes estructuras de acuerdo a cada problema.

La ecuación (2) es adimensionalizada a continuación, para lo cual se define

$$u' = u U_o; r' = br; t' = T_o t$$

donde las variables u , r , t son las contrapartes adimensionales de u' , r' , t' . Se obtiene así:

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \phi(t) \quad (6)$$

En esta ecuación $\Omega = b^2/\nu T_o$ es el número de impermanencia y $\phi = (b^2/\nu U_o) \phi'$ es la forma adimensional de ϕ' .

La velocidad media U' es

$$U' = \frac{2}{(b^2 - a^2)} \int_a^b u'r' dr' \quad (7)$$

Su forma adimensional es

$$U = \frac{2}{1 - \lambda^2} \int_\lambda^1 ur dr \quad ; \quad \lambda = a/b \quad (8)$$

La ecuación unidimensional de cantidad de movimiento se puede generar integrando (6) por medio del operador de la ecuación (8).

El resultado es

$$\Omega \frac{dU}{dt} + \frac{2}{1 - \lambda^2} (\lambda\tau_1 + \tau_2) = \phi \quad (9)$$

expresión en la cual τ_1 y τ_2 son los esfuerzos de corte en $r' = a$ y $r' = b$ respectivamente y que, adimensionalmente, quedan definidos por:

$$\tau_1 = - \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_r = \lambda \quad (10)$$

$$\tau_2 = - \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_r = 1 \quad (11)$$

En la ecuación (9) ha desaparecido la dependencia espacial de la velocidad; sin embargo, interviene ahora el esfuerzo cortante, cuya formulación en términos de U es el aspecto crucial de este método de análisis.

3. ECUACIONES UNIDIMENSIONALES

La ecuación (6) admite una solución de la forma

$$u = A_0(1 - r^2) + A_2(1 - r^4) + \dots + (B_0 + B_2r^2 + B_4r^4 + \dots) \ln r \quad (12)$$

si se cumplen las relaciones

$$4A_2 - 4B_2 + \Omega \frac{dA_2}{dt} + \Omega \frac{dB_2}{dt} + \dots = \phi \quad (13)$$

$$A_4 = \frac{\Omega}{4^2} \frac{dA_2}{dt} + \frac{(\frac{1}{2}) \Omega^2}{2^2 \cdot 4^2} \frac{d^2B_0}{dt^2}$$

$$A_6 = \frac{\Omega^2}{2^2 6^2} \frac{d^2 A_2}{dt^2} + \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \Omega^3}{2^2 4^2 6^2} \frac{d^3 B_0}{dt^3} \quad (14)$$

$$B_2 = \frac{\Omega}{2^2} \frac{dB_0}{dt}$$

$$B_4 = \frac{\Omega^2}{2^2 4^2} \frac{d^2 B_0}{dt^2}$$

en las cuales A_n y B_n son funciones solamente del tiempo. Este resultado se puede verificar sustituyendo (12) en (6). La solución (12) satisface, hasta aquí, únicamente la condición de contorno (4). Si las equivalencias dadas por (14) son sustituidas en (12) y (13), se obtiene, respectivamente,

$$u = A(1-r^2) + \frac{\Omega^2}{4^2} \frac{dA}{dt} (1-r^4) + \dots + (B + \frac{\Omega}{2^2} \frac{dB}{dt} r^2 + \dots) \ln r +$$

$$+ \frac{(\frac{1}{2}) \Omega^2}{2^2 4^2} \frac{d^2 B}{dt^2} (1-r^4) + \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \Omega}{2^2 4^2 6^2} \frac{d^3 B}{dt^3} (1-r^6) + \dots \quad (15)$$

$$\phi = 4A + \Omega \frac{dA}{dt} + \frac{\Omega^2}{4^2} \frac{d^2 A}{dt^2} + \dots - \Omega \frac{dB}{dt} + \frac{(\frac{1}{2}) \Omega^3}{2^2 4^2} \frac{d^3 B}{dt^3}$$

$$+ \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \Omega^4}{2^2 4^2 6^2} \frac{d^4 B}{dt^4} \dots \quad (16)$$

donde $A = A_0$, $B = B_0$. Los resultados correspondientes a tuberías circulares se recuperan haciendo $B = 0$ en (15) y (16).

En lo que sigue es importante el siguiente resultado general [7]: dadas las funciones $X(s)$, $Y(s)$ y $Z(s)$ que se suponen derivables con derivadas continuas hasta orden N (donde N puede ser infinito) y que admiten una representación del tipo

$$X = x_0 Z + x_1 \frac{dZ}{ds} + x_2 \frac{d^2 Z}{ds^2} + \dots \quad (17)$$

$$Y = y_0 Z + y_1 \frac{dZ}{ds} + y_2 \frac{d^2 Z}{ds^2} + \dots$$

donde x_n , y_n no dependen de s , entonces se cumple

$$y_0 X + y_1 \frac{dX}{ds} + y_2 \frac{d^2 X}{ds^2} + \dots = x_0 Y + x_1 \frac{dY}{ds} + x_2 \frac{d^2 Y}{ds^2} + \dots \quad (18)$$

La relación (18) proviene de derivar sucesivamente las ecuaciones (17) y eliminar Z entre ellas.

La condición de borde (3) para $r = \lambda$ permite escribir una ecuación similar a (18), como sigue

$$\epsilon_0 A + \epsilon_1 \frac{dA}{dt} + \epsilon_2 \frac{d^2 A}{dt^2} + \dots = \delta_0 B + \delta_1 \frac{dB}{dt} + \delta_2 \frac{d^2 B}{dt^2} + \dots$$

$$\epsilon_n = \frac{\lambda^{2(n+1)} - 1}{4^2 6^2 \dots 4(n+1)^2 \ln \lambda} \Omega^n \quad (19)$$

$$\delta_n = \frac{\Omega^n}{2^2 4^2 \dots (2n)^2} \left[\lambda^{2n} + \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) (1 - \lambda^{2n})}{\ln \lambda} \right]$$

de donde, de acuerdo a (17) (18), se deduce

$$A = \sum \delta_n \frac{d^n Z}{dt^n}$$

$$B = \sum \epsilon_n \frac{d^n Z}{dt^n} \quad (20)$$

Z es aquí una función del tiempo que hace posible relacionar diversas variables dependientes, sin que sea necesario determinarla en sí para los fines de este trabajo. Al integrar (15) en conformidad a (8) se obtiene una expresión para U en función de A y B. Si A y B se describen a su vez en términos de Z, por medio de (20), se llega a la siguiente fórmula para la velocidad espacial

$$U = \alpha_0 Z + \alpha_1 \Omega \frac{dZ}{dt} + \dots \quad (21)$$

Series similares a (21) se pueden generar equivalentemente para ϕ y τ , donde

$$\tau = \frac{2}{1 - \lambda^2} (\lambda \tau_1 + \tau_2) \quad (22)$$

Si en (9) se sustituyen las ecuaciones (20), el resultado es

$$\phi = \beta_0 Z + \beta_1 \Omega \frac{dZ}{dt} + \dots \quad (23)$$

Combinando (10), (11), (15) y (22), se tiene

$$\tau = \gamma_0 + \gamma_1 \Omega \frac{dZ}{dt} + \dots \quad (24)$$

Los coeficientes constantes α_n , β_n y γ_n dependen únicamente de λ y, debido a su relativa complejidad algebraica, solamente se explicitarán en forma numérica más adelante.

Varias relaciones de interés provienen de las ecuaciones (20)(17). Una ley de fricción resulta de combinar (21) y (23), cuya estructura es, por lo tanto,

$$\alpha_0 \tau + \alpha_1 \Omega \frac{d\tau}{dt} + \dots = \gamma_0 U + \gamma_1 \Omega \frac{dU}{dt} + \dots \quad (25)$$

La ecuación (25) es una ley implícita para τ , lo cual pudiera aparecer como una limitación del presente método. Dos alcances permiten reducir la complejidad del problema. En primer lugar, (25) admite una solución particular del tipo

$$\tau = a_0 U + a_1 \Omega \frac{dU}{dt} + a_2 \Omega^2 \frac{d^2 U}{dt^2} \quad (26)$$

cuyos coeficientes a_n se obtienen por sustitución de (26) en (25), al igualar a cero todas las potencias de Ω . Esto conduce a una ley de fricción explícita, pero de aplicación más restringida que (25). En efecto, (25) es altamente convergente para tipos usuales de funciones del tiempo (τ y U), en tanto (26) es de convergencia más limitada. Por otra parte, se encuentra que la ley de fricción no es un paso estrictamente necesario en el desarrollo de una ecuación de momentum unidimensional. Para notar esto, basta considerar la relación que se puede generar directamente entre U y ϕ vía ecuaciones (21) y (23), la que constituye la deseada ecuación de movimiento, y que adopta la forma

$$\beta_0 U + \beta_1 \Omega \frac{dU}{dt} + \dots = \alpha_0 \phi + \alpha_1 \Omega \frac{d\phi}{dt} + \dots \quad (27)$$

Una tercera relación general es posible, si se combinan ϕ y τ a través de (23) y (24). Similarmente, varias expresiones del tipo (26) pueden encontrarse, en particular una forma de la ecuación de cantidad de movimiento, es decir,

$$b_0 U + b_1 \Omega \frac{dU}{dt} + \dots = \phi \quad (28)$$

Para el caso especial en que $\lambda = 1/2$, las expresiones anteriores toman las siguientes formas numéricas:

$$U = 0,0840 Z + 0,001405 \Omega \frac{dZ}{dt} + 0,9417 \times 10^{-5} \Omega^2 \frac{d^2Z}{dt^2} + \dots \quad (29)$$

$$\tau = 2Z + 0,0420 \Omega \frac{dZ}{dt} + 0,3513 \times 10^{-5} \Omega^2 \frac{d^2Z}{dt^2} + \dots \quad (30)$$

$$\phi = 4Z + 0,1680 \Omega \frac{dZ}{dt} + 0,002107 \Omega^2 \frac{d^2Z}{dt^2} + \dots \quad (31)$$

$$\tau = 23,80 U + 0,10 \Omega \frac{dU}{dt} - 0,1905 \times 10^{-3} \Omega^2 \frac{d^2U}{dt^2} + - \dots \quad (32)$$

$$47,625 U + 1,20 \Omega \frac{dU}{dt} - 0,3809 \times 10^{-3} \Omega^2 \frac{d^2U}{dt^2} + - \dots = \phi \quad (33)$$

4. FLUJO ACELERADO BAJO UN GRADIENTE DE PRESIONES CONSTANTE

Se estudiará la aplicación de las ecuaciones unidimensionales anteriormente deducidas al problema de establecimiento en el tiempo de flujo laminar en un ducto anular bajo la acción de un gradiente de presiones constante en el tiempo.

Un modelo físico aproximado del problema se ilustra en el diagrama de definición de la figura 1 a. Un ducto se encuentra en un extremo conectado a un estanque de carga constante, en tanto su extremo libre descarga a la atmósfera.

Se supone que para $t < 0$ el extremo libre se encuentra cerrado, de modo que el fluido en el interior del tubo está en reposo. Para $t = 0$ se abre súbitamente dicho extremo, permitiéndose así que el líquido se acelere hasta alcanzar la velocidad de régimen permanente definida por la altura de carga H_o , las dimensiones del ducto y las propiedades del fluido.

La velocidad de régimen permanente, en notación adimensional, es

$$U_{\infty} = \frac{\phi}{8} \left[1 + \lambda^2 + \frac{1 - \lambda^2}{\ln \lambda} \right]$$

Si se elige $\lambda = 1/2$, entonces $U_{\infty} = \phi/47,625$. Es conveniente hacer $U_o = U_{\infty}$, es decir, utilizar U_o como valor de referencia para la velocidad. De acuerdo a esto,

$$U_o = \frac{gH_o b^2}{47,625 \nu L} \quad ; \quad \Omega = \sqrt{\frac{2bU_o}{\nu}} \quad (34)$$

$$\phi = 47,625$$

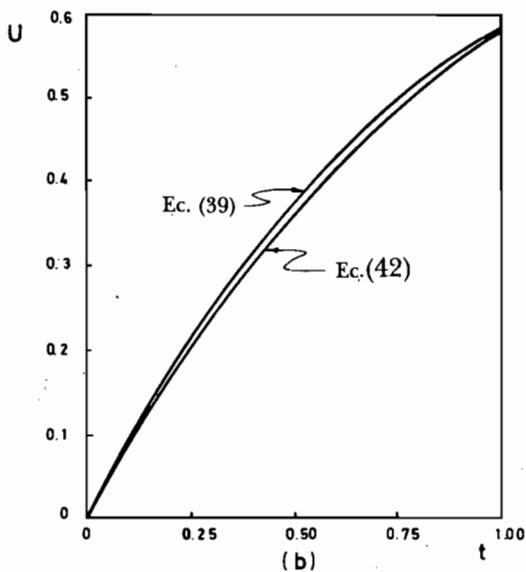
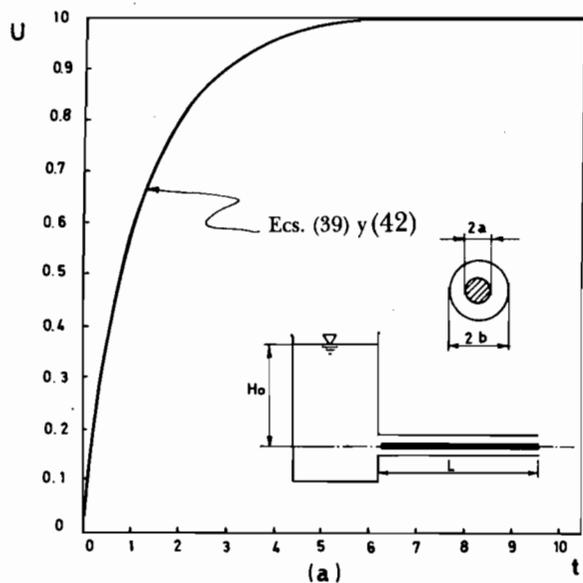


Fig. 1. Comparación de velocidad media espacial exacta (Ec. 39), y velocidad media espacial aproximada (método unidimensional, Ec. 42).

En lo anterior se aprecia que, en este caso, Ω tiene el significado físico del número de Reynolds para el flujo permanente final.

La condición inicial del problema es

$$u(r, 0) = 0 \quad (35)$$

La solución exacta de la ecuación (16), sujeta a las condiciones de borde (3) (4) y a la condición inicial (35), es [4] [5]

$$u = u_s - \sum_{n=1}^{\infty} C_n G_o(c_n r) \exp\left(-\frac{c_n^2}{\Omega} t\right) \quad (36)$$

donde u_s es la velocidad de flujo permanente para $t \rightarrow \infty$, y

$$G_o = J_o(c_n r) + d_n N_o(c_n r) \quad (37)$$

J_o y N_o son las funciones de Bessel de primera y segunda clase, orden cero. Los coeficientes c_n y d_n son las raíces de $G_o(c_n) = 0$ y $G_o(\lambda c_n) = 0$. Los coeficientes C_n quedan definidos por

$$C_n = \frac{2}{c_n^3 [\lambda G_1(\lambda c_n) + G_1(c_n)]} \quad (38)$$

$$G_1 = J_1(c_n r) + d_n N_1(c_n r)$$

Por integración de (36) se obtiene la expresión exacta de la velocidad media,

$$U = 1 - 127 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{c_n} [G_1(c_n) - \lambda G_1(c_n \lambda)] \exp\left(-\frac{c_n^2}{\Omega} t\right) \quad (39)$$

La correspondiente solución unidimensional puede generarse tanto de la ecuación general de movimiento (27) como de su forma restringida (28), las que para este problema, se transforman, respectivamente, en [8]:

$$4U + 0,1680 \Omega \frac{dU}{dt} + 0,002107 \Omega^2 \frac{d^2U}{dt^2} + \dots = 47,625 \quad (40)$$

y

$$47,625 U + 1,20 \Omega \frac{dU}{dt} - 0,3809 \times 10^{-3} \Omega^2 \frac{d^2U}{dt^2} + \dots = 47,625 \quad (41)$$

Ambas ecuaciones dan como solución

$$U = 1 - \exp\left(-\frac{39,01}{\Omega} t\right) \quad (42)$$

La ecuación (42), la solución unidimensional del problema, resulta en forma más simple de la ecuación (41), en la cual unos pocos términos entregan una aproximación adecuada para el argumento de la función exponencial.

Se presentan en la figura 1 gráficos de la solución exacta (39) y aproximada (unidimensional) (42) para $\Omega = \sqrt{2.000} = 44,72$.

El error asociado a la solución aproximada es menor que 3% para $t > 0,5$. Para apreciar el significado de este rango de tiempo, en el proceso completo de establecimiento de flujo, se puede calcular el tiempo de establecimiento t_e , definido habitualmente como el tiempo para el cual $U(t_e) = 0,99 U_\infty$. Una expresión suficientemente aproximada para t_e se puede extraer de (42), la que adopta la forma

$$t_e = \frac{\Omega}{39,01} \ln(100) \quad (\lambda = 0,5) \quad (43)$$

que, para $\Omega = 44,72$ da el valor $t_e = 5,279$.

En la figura 1 b se han magnificado las escalas para U y t de modo que sea posible observar el tipo de error que conlleva la solución aproximada (42).

Debe hacerse notar que el fenómeno estudiado es uno donde las limitaciones del método unidimensional se debieran reflejar más significativamente. En efecto, en este problema los transientes iniciales gobiernan todo el proceso, siendo dichos transientes descritos en forma relativamente imprecisa por las ecuaciones en U , donde la única condición inicial posible es $U(0) = 0$, que no es equivalente a la condición real, esto es, $u(r, 0) = 0$. Por otra parte, el valor de Ω elegido es el máximo admisible, aproximadamente, para que el flujo permanezca laminar y, a la vez, es el número que más largo hace el proceso transiente.

En otro tipo de flujos, en particular en aquellos donde no se imponen condiciones iniciales (como por ejemplo, en flujo oscilatorio), las soluciones entregadas por la ecuación (27) tienden a reproducir la solución exacta del problema.

También es preciso agregar que, si bien el uso de ecuaciones unidimensionales como (40) y (41) es extremadamente simple en la obtención de soluciones para U , en comparación al procedimiento convencional que conduce a soluciones del tipo (36) (39), la obtención de los coeficientes numéricos en (40) y (41) no es simple, exigiendo un cierto número de

computaciones detalladas. Sin embargo, dichos coeficientes son universales para un determinado valor de λ , pudiéndose tabular en forma definitiva.

5. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un procedimiento para obtener algunas formas de la ley de fricción (relación entre velocidad media espacial y esfuerzo cortante en las paredes) y ecuación unidimensional de movimiento (relación entre velocidad media espacial y función forzante) para flujo laminar impermanente en ductos anulares. Dichas formas se pueden presentar en forma implícita o explícita. En el primer caso intervienen las variables dependientes y todas las posibles derivadas temporales de éstas; en el segundo caso una variable dependiente es expresada en función de otra variable dependiente y de todas las derivadas temporales de ésta.

El método conduce a resultados en general simples, los que contrastan con la complejidad de las soluciones exactas conocidas. En especial se ha analizado el problema de establecimiento de flujo, bajo la acción de una función forzante constante, problema en el cual ha sido posible obtener resultados de suficiente aproximación con gran economía de cálculo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. ZIELKE, W., *Frequency-Dependent Friction in Transient Pipe Flow*, ASME Journal of Basic Engineering, Vol. 90, N° 1, 1968, pp. 109-115.
2. LETELIER S., M.F. AND LEUTHEUSSER, H.J., *Unified Approach to the Solution of Problems of Unsteady Laminar Flow in Long Pipes*, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, N° 1, 1983, pp. 8-12
3. LETELIER S., M.F. AND CONTRERAS A., H.P., *Modelo para el Esfuerzo Cortante y Ecuación Unidimensional de Movimiento en Flujo Laminar Impermanente en Ductos Rectangulares*, I Jornadas Latinoamericanas de Matemática Aplicada, Santiago, Chile, 1981.
4. MÜLLER, W., *Zum Problem der Anlauf Stromung Liner Flüssigkeit-Kreisquerschnitt*, ZAMM, Vol. 16, 1936, pp. 228-238.
5. YIH, C.S., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1969, pp. 318-320.
6. LIN, S.H., *Friction Factors and Pressure Drop for Sinusoidal Laminar Flow in an Annulus*, AICHE, Vol. 16, N° 4, 1970, pp. 698-699.
7. LETELIER S., M.F., *An Approach to the Analysis of Unsteady Parallel Flow in Circular Pipes*, Tesis para optar al grado de Doctor de Filosofía, Universidad de Toronto, Canadá, 1979.
8. BORNAND C., R.E., *Flujo Laminar Impermanente en Ductos Anulares*, Tesis de Ingeniería Civil Mecánica, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Santiago de Chile, 1981.