Estudios en honor de
Francisco Javier Domínguez
AUCh, 5ª Serie, Nº 8 (1985): 127-138

ENERGETICA DE LOS ESCURRIMIENTOS

VENTURA CERÓN R.
Universidad de Concepción - Chile

1. INTRODUCCIÓN

La expresión para la energía mecánica específica de un flujo de materia en cada posición, se conoce con el nombre de Bernoulli. Y su ley de conservación, y variación a lo largo del escurrimiento como teorema de Bernoulli. En términos clásicos se presenta la deducción del teorema de conservación de Bernoulli en Lamb [1], a partir de las ecuaciones de Euler; la energía específica de presión, como potencial de las presiones aparece en forma explícita en el planteamiento vectorial de Weatherburn [2] de la ecuación de Euler. La energía específica representa el trabajo de las presiones externas y el de expansión de las presiones internas, según el análisis de Prandtl [3] para el efecto de la compresibilidad. F. J. Domínguez [4] realiza la extensión del teorema a toda la corriente, para el escurrimiento incompresible. Clasifica los escurrimientos con superficie libre en río, torrente y crítico según la razón de la velocidad del escurrimiento a la velocidad de la onda superficial. Realiza la discusión de las características del escurrimiento en canales, atendida esta clasificación y la ley del Bernoulli referido al fondo del canal. Las pérdidas de energía mecánica singulares están ligadas al ensanche de la corriente, y su expresión de cálculo, la fórmula de Borda, resulta de considerar la solución simultánea de las ecuaciones de conservación del flujo y de la cantidad de movimiento.

El análisis termodinámico del escurrimiento considera la energía total, y la entropía del flujo de materia. La energía total incluye la energía térmica y la energía mecánica. La relación entre las aproximaciones diferenciales mecánica y termodinámica la realiza Kiefer [5] para concluir en una expresión de incremento de entropía del fluido.

Las expresiones generales de cálculo del escurrimiento compresible, las realiza Shapiro [6] considerando la termodinámica del gas ideal, y se encuentran tabuladas en Keenan [7].

El objetivo de la presentación siguiente es fundar las relaciones energéticas en los teoremas de sistema de partículas, discutir beneficios y límites de cada planteamiento, deducir de aquí la teoría mecánica de la expansión general en toberas para gases y vapores, y aplicar estos resultados al análisis de la regulación de una turbina a vapor.

2. Planteamiento desde la mecánica

El teorema del trabajo o de la energía cinética para un sistema de partículas establece: "la variación de la energía cinética de un sistema de partículas es igual al trabajo de las fuerzas externas e internas en el sistema".

Para la materia que escurre a través de dos secciones el trabajo de las fuerzas externas es el trabajo del peso, y el trabajo de flujo de las presiones en las secciones extremas. El trabajo de las fuerzas internas es el trabajo de expansión de las presiones internas y el trabajo de cizalle interno.

La expresión analítica del teorema para el flujo M kg/s, que escurre entre las secciones 1 y 2, donde las velocidades medias son c_1 y c_2 m/s, las presiones p_1 y p_2 Pa, el volumen específico v_1 y v_2 m^3/kg, las cotas z_1 y z_2 m, es:

$$M\,(\alpha_2 c_2^2/2 - \alpha_1 c_1^2/2) = M\,(p_1 v_1 - p_2 v_2) + M \int_{v_1}^{v_2} p\,dv + Mg\,(z_1 - z_2) - M\,\psi\,W \qquad (2.1)$$

donde α_1 y α_2 son los coeficientes de corrección de la energía cinética en términos de la velocidad media en cada sección, g m/s^2 la aceleración de gravedad y ψ J/kg el trabajo de cizalle específico de las tensiones tangenciales internas entre las secciones extremas. Las tensiones tangenciales trabajan sobre el desplazamiento relativo de las capas de fluido, según indica el gradiente de la distribución de velocidades a través de las secciones.

Para evaluar la integral del trabajo de las presiones internas se requiere conocer la ley barotrópica

$$v = v(p) \qquad m^3/kg \tag{2.2}$$

de la transformación que sufre el fluido entre las secciones 1 y 2.

La suma de los tres primeros términos del segundo miembro, considerados por unidad de flujo, corresponden a la diferencia de la energía específica de presión definida por:

$$P_1 - P_2 = -\int_{p_1}^{p_2} v\,dp \quad J/kg \tag{2.3}$$

con lo cual (2.1) se escribe:

$$M\,(\alpha_2 c_2^2/2 - \alpha_1 c_1^2/2) = M\,[(P_1 - P_2) + g\,(z_1 - z_2) - \psi] \tag{2.4}$$

Reduciendo los términos correspondientes a cada sección se define la energía mecánica específica:

$$e = \alpha\, c^2/2 + P + gz \tag{2.5}$$

y el teorema del trabajo ec. (2.4) toma la forma del teorema de Bernoulli:

$$e_2 = e_1 - \psi \quad J/kg \tag{2.6}$$

La caída de la energía mecánica específica, corresponde a la potencia por unidad de flujo que desarrollan las tensiones tangenciales internas.

3. Planteamiento desde la termodinámica

El análisis termodinámico de la corriente considera el sistema de ecuaciones constituido por la aplicación de los principios de: conservación de energía total, generación de entropía, entalpía como función de estado y entropía como función de estado.

La energía específica total del flujo de materia M kg/s, que escurre a través de una sección, está compuesta de las energías térmica o entalpía h J/kg, cinética $\alpha\, c^2/2$ J/kg, y potencial gz J/kg. Si Q W es el flujo de calor que se transfiere desde una fuente térmica al escurrimiento entre dos secciones extremas 1 y 2 se verifica:

$$Q + M\,(h_1 + \alpha_1 c_1^2/2 + gz_1) = M\,(h_2 + \alpha_2 c_2^2/2 + gz_2) \quad W \tag{3.1}$$

El flujo M kg/s que escurre a través de una sección tiene allí una entropía específica s J/kgK. La velocidad de generación de entropía S' W/K, en el universo constituido por la corriente entre las secciones 1 y 2, y la fuente térmica a la temperatura T K desde donde se transfiere el flujo de calor Q W, verifica la ecuación.

$$Ms_1 + Q/T + S' = Ms_2 \qquad W/K \tag{3.2}$$

Los valores específicos de la entalpía y de la entropía en cada sección son sólo funciones de la presión p Pa y el volumen específico v m^3/kg en esa sección.

$$h = h(p, v) \qquad J/kg \tag{3.3}$$
$$s = s(p, v) \qquad J/kgK \tag{3.4}$$

4. Relaciones entre los planteamientos

El teorema de trabajo 2.4 y el principio de conservación de la energía 3.1, tienen en común los términos correspondientes a la energía cinética y a la energía potencial. Eliminando estos términos entre ambas ecuaciones resulta:

$$M(P_2 - P_1) + M\,\psi = M(h_2 - h_1) - Q \qquad W \tag{4.1}$$

Dividiendo por el flujo de materia M kg/s y designando el calor transferido por unidad de flujo por:

$$q = Q/M \qquad J/kg \tag{4.2}$$

se obtiene:

$$P_2 - P_1 + \psi + q = h_2 - h_1 \qquad J/kg \tag{4.3}$$

La entalpía se incrementa por el incremento de energía específica o trabajo técnico que se transfiere al fluido, el trabajo de cizalle interno de la corriente entre las secciones consideradas, y el calor que se transfiere al escurrimiento. En general, este incremento de entalpía se manifiesta por un incremento de temperatura del fluido.

La ecuación diferencial para las transformaciones reversibles

$$dh = T\,ds + v\,dp \qquad J/kg \tag{4.4}$$

integrada a través de la transformación que sufre el fluido al escurrir entre las secciones 1 y 2 conduce a:

$$h_2 - h_1 = \int_{s_1}^{s_2} T\,ds + P_2 - P_1 \qquad J/kg \tag{4.5}$$

De (4.5) y (4.3) se obtiene:

$$\psi + q = \int_{s_1}^{s_2} T\,ds \qquad J/kg \tag{4.6}$$

Definiendo la temperatura media entrópica, en la ley de transformación del fluido entre las secciones 1 y 2; por T_{12}:

$$T_{12}\,(s_2 - s_1) = \int_{s_1}^{s_2} T\,ds \qquad J/kg \tag{4.7}$$

se obtiene:

$$\psi + q = T_{12}\,(s_2 - s_1) \qquad J/kg \tag{4.8}$$

El incremento de entropía del escurrimiento es producido por las razones del trabajo de cizalle interno y del calor recibido, a la temperatura media a la cual se realiza la transformación.

La expresión para la velocidad de generación de entropía 3.2, considerando 4.8 conduce a:

$$\frac{S'}{M} = \frac{\psi}{T_{12}} + \frac{q}{T_{12}} - \frac{q}{T} \qquad J/kg \tag{4.9}$$

La generación de entropía por unidad de flujo se produce internamente por la razón del trabajo de cizalle interno a la temperatura media a la cual se realiza, y externamente en la transferencia de calor rechazado por la fuente a la temperatura T, al fluido con la temperatura media T_{12}.

5. Beneficios y límites de cada aproximación

La aproximación mecánica al cálculo energético, consta de dos ecuaciones, el teorema de Bernoulli 2.6 y la ley de la transformación 2.2 para calcular la energía específica de presión 2.3. Las relaciones para el cálculo del trabajo de cizalle que proporciona la investigación completa los antecedentes requeridos. En sentido inverso la aplicación del teorema de Bernoulli 2.6 permite determinar experimentalmente el trabajo de cizalle interno.

La aproximación termodinámica consta de cuatro ecuaciones: conservación de la energía 3.1, generación de entropía 3.2, entalpía y entropía como funciones de estado 3.3, 3.4. Las expresiones para estas funciones de estado son en general complicadas, y se encuentran en general tabuladas, con fácil acceso.

La expresión mecánica es sencilla, pero requiere el conocimiento de la ley de la transformación e introduce el término trabajo de cizalle interno, considerando como una pérdida de energía mecánica y cuya determinación requiere los resultados de la investigación.

La aproximación termodinámica requiere la solución de un sistema de cuatro ecuaciones simultáneas, que permite la determinación de otras tantas incógnitas. Proporciona información sobre la eficacia del escurrimiento, a través del valor de la generación de entropía. Para el cálculo no requiere el conocimiento de la ley de la transformación, ni introduce términos internos.

Las relaciones deducidas de ambos planteamientos, permiten establecer la ubicación exacta del trabajo de cizalle en el balance de energías, influencia en el incremento de entalpía 4.3, su influencia en la generación de entropía y los límites reales de su degradación 4.8, 4.9.

El trabajo de cizalle se almacena como energía interna en la entalpía del fluido, donde en general producirá un incremento de temperatura. Y contribuye a la generación de entropía en razón inversa a la temperatura a la cual se realiza, la degradación del trabajo de cizalle es tanto menor cuanto mayor es la temperatura a la cual se realiza.

El teorema del trabajo permite distinguir los términos correspondientes al trabajo de las presiones externas del trabajo de las presiones internas en la energía específica de presión.

6. Teoría mecánica de la expansión en toberas

La tobera es un dispositivo de dimensiones pequeñas destinado a acelerar un fluido desde el reposo hasta una velocidad supersónica.

En general, cuando el fluido se acelera el trabajo de cizalle interno es despreciable: la capa límite se restringe en su desarrollo y disponiendo de contornos bien diseñados no existe separación de la corriente. En estas condiciones la expansión es internamente reversible $\psi = 0$. Atendida las pequeñas dimensiones, y la velocidad apreciable con que se realiza el escurrimiento, el flujo de calor que se pudiera transferir al flujo de materia que se expande es despreciable, y luego el escurrimiento adiabático $Q = O$, $q = 0$. La velocidad de generación de entropía es cero 4.9. El escurrimiento es reversible y según 4.8 $s_1 = s_2$, isentrópico.

La ley de la transformación isentrópica se puede representar por una ley politrópica.

$$p/p_o = (v_o/v)^k \tag{6.1}$$

Con subíndice 0 se indica el estado de reposo o estancamiento desde donde se inicia el escurrimiento insentrópico, k corresponde al exponente politrópico de la expansión isentrópica. Para el aire $k = 1{,}4$, para el vapor en estado sobrecalentado $k = 1{,}3$ y en estado saturado $k = 1{,}1$, en primera aproximación.

La energía específica de presión, para la ley politrópica 6.1, con $k \neq 1$ está dada por la ecuación

$$P - P_o = \frac{k}{k-1}(pv - p_o v_o) \qquad \text{J/kg} \tag{6.2}$$

Con trabajo de cizalle nulo, y esta última expresión para la energía específica de presión, el teorema de Bernoulli 2.6, toma la forma siguiente:

$$\frac{k}{k-1} p_o v_o = \frac{k}{k-1} pv + \frac{c^2}{2} \qquad \text{J/kg} \tag{6.3}$$

Las variaciones graduales de presión se transmiten a lo largo del escurrimiento a través de ondas de diferencia elemental de presión. La velocidad de esta onda en un fluido en reposo es la velocidad del sonido a_s m/s, que, para el fluido en el estado definido por p Pa y v m^3/kg, considerando la ley isentrópica 8.1, está dada por la ecuación:

$$a_s = \sqrt{k\,pv} \qquad \text{m/s} \tag{6.4}$$

En el escurrimiento compresible se distinguen tres regímenes según la razón de la velocidad del escurrimiento c m/s a la velocidad del sonido a_s m/s.

Régimen subsónico $c/a_s < 1$, en el cual las ondas de diferencia elemental de presión pueden remontar el escurrimiento. En consecuencia, la presión en la sección considerada está determinada tanto por la presión que existe en las secciones que le anteceden, como las presiones existentes en las secciones que le siguen.

Régimen supersónico $c/a_s > 1$, en el cual las ondas de diferencia elemental de presión no pueden remontar el escurrimiento, y en consecuencia, la presión en la sección considerada está determinada exclusivamente por las condiciones del escurrimiento anterior a ella.

Régimen sónico o crítico $c = a_s$, el cual constituye una barrera para las ondas de diferencia elemental de presión que pudieran remontar el escurrimiento. La sección con escurrimiento crítico aísla las secciones anteriores de las secciones que siguen. Las condiciones del escurrimiento anteriores a la sección con escurrimiento crítico permanecen independientes de las variaciones del escurrimiento en las secciones posteriores.

El problema en el diseño de una tobera consiste en expandir reversiblemente un flujo M kg/s, desde una cámara con velocidad nula y presión p_o Pa, hasta una presión de descarga p_d Pa en régimen supersónico.

El sistema de ecuaciones que rige el escurrimiento a través de las sucesivas secciones A m^2 de la tobera es:

$$M = cA/v \qquad \text{kg/s} \qquad (6.5)$$

$$\frac{k}{k-1} p_o v_o = \frac{k}{k-1} pv + \frac{c^2}{2} \qquad \text{J/kg} \qquad (6.6)$$

$$pv/p_o v_o = (v_o/v)^{k-1} = (p/p_o)^{\frac{k-1}{k}} = a_s^2/a_{so}^2 \qquad (6.7)$$

La primera ecuación corresponde a la de conservación de la materia. La segunda al teorema de Bernoulli. Y la última a diferentes formas de la politrópica con exponente k. Se introduce la velocidad del sonido como característica del escurrimiento isentrópico.

Para discutir la variación de la sección A, con objeto de tener un escurrimiento acelerado $dc > 0$, se diferencian estas ecuaciones para obtener dA en términos dc.

Para acelerar el fluido desde el reposo hasta un régimen supersónico es necesario disponer de una tobera convergente divergente. La parte estrecha de la tobera se denomina garganta. Para las condiciones de diseño la presión cae gradualmente a lo largo del escurrimiento a través de la tobera. El fluido se acelera hasta condiciones sónicas en la garganta, y desde allí, en la parte divergente hasta las condiciones supersónicas en la salida. La solución adimensional del sistema de ecuaciones permite el cálculo expedito de las dimensiones de la tobera.

Para una presión fija en la cámara de admisión p_o, la curva de descarga de una tobera, flujo de materia M kg/s versus presión en la salida p_s es creciente a medida que p_s desciende de p_o, hasta que en la garganta se alcanzan condiciones sónicas. En estas condiciones se alcanza el flujo máximo que puede proporcionar la tobera con las condiciones dadas de entrada. Para valores inferiores de la presión el flujo a través de la tobera sigue siendo el mismo, pues las condiciones antes de la garganta no se pueden modificar, porque en ella se ha establecido el escurrimiento crítico.

7. Análisis de la regulación de una turbina a vapor

La primera etapa de una turbina es de acción, con toberas en régimen crítico en la garganta, las cuales aíslan el generador de vapor del escurrimiento a través de la turbina y proporcionan la posibilidad de regulación del flujo de vapor.

Para condiciones invariables en el generador de vapor, la regulación del flujo de vapor se realiza estrangulando la sección de entrada a la cámara de toberas mediante una válvula. La conservación de la energía 3.1, aplicada al flujo de vapor entre la caldera subíndice c y la cámara de toberas subíndice o, despreciando la transferencia de calor conduce a:

$$h_c = h_o \qquad \text{J/kg} \qquad (7.1)$$

Esta condición se aproxima por la igualdad de las energías de flujo

$$p_c v_c = p_o v_o \qquad \text{J/kg} \qquad (7.2)$$

La solución del sistema de ecuaciones, para el escurrimiento en toberas 6.5 a 6.7, con la condición 7.2, y escurrimiento crítico en la garganta de sección A, conduce a la expresión:

$$M = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{\frac{k}{p_c v_c}}\, A p_o \qquad \text{kg/s} \qquad (7.3)$$

El flujo es una función lineal de la presión en la cámara de toberas, y la sección en la garganta de las toberas.

Para condiciones fijas en la caldera, el flujo de vapor a la turbina se puede regular, primero, reduciendo la presión en la cámara de toberas por estrangulación de la entrada; y segundo, por reducción de la sección, disminuyendo el número de toberas de admisión de vapor a la turbina o regulación por admisión parcial.

La irreversibilidad de la estrangulación se deduce de 3.2.

$$\frac{S'}{M} = s_o - s_c \qquad \text{J/kgK} \tag{7.4}$$

La presión p_o y la entalpía $h_o = h_c$, definen el estado en la cámara de toberas, y por lo tanto:

$$s_o = s_o\,(p_o, h_o) \qquad \text{J/kgK} \tag{7.5}$$

Con lo cual se puede calcular la irreversibilidad en la estrangulación 7.4. Esta irreversibilidad es producida por el trabajo de cizalle ψ, generado en el ensanche del escurrimiento en la salida de la válvula a la cámara de toberas. De 4.9, 4.8 se obtiene:

$$\psi = T_{co}\,(s_o - s_c) \tag{7.6}$$

Donde T_{co} es la temperatura media entrópica a la cual se realiza la expansión.

La energía degradada a es la diferencia de caída isentrópica, hasta la presión de descarga de la turbina.

Si p_d Pa es la presión en la descarga, la entalpía al término de la expansión isentrópica antes y después de la válvula está dada respectivamente por los valores de las funciones:

$$h_{dsc} = h(p_d, s_c) \tag{7.7}$$
$$h_{dso} = h(p_d, s_o) \tag{7.8}$$

Y para la energía degradada resulta así:

$$a = h_c - h_{dsc} - (h_o - h_{dso}) \tag{7.9}$$

Y considerando la igualdad de entalpías para la válvula 7.1

$$a = h_{dsc} - h_{dso} \tag{7.10}$$

De la ecuación diferencial para las transformaciones reversibles 4.4, en la transformación isobárica a la presión de descarga, resulta:

$$h_{dsc} - h_{dso} = \int_{s_o}^{s_c} T ds \tag{7.11}$$

Introduciendo la definición de temperatura media entrópica 4.7, se obtiene:

$$a = T(s_c - s_o) \tag{7.12}$$

Y considerando la expresión, en términos del trabajo de cizalle 7.6:

$$a = T \psi / T_{co} \tag{7.13}$$

La energía degradada en la válvula es función de la razón de la temperatura media en la descarga de la turbina a la temperatura media a la cual se realiza la expansión. El trabajo mecánico de cizalle ψ, se degradará tanto menos cuanto menor sea la razón de temperaturas del vapor en la válvula y en la descarga, T/Tco.

8. Conclusión

El análisis mecánico y termodinámico de la energía de los escurrimientos conduce a resultados complementarios. El trabajo de cizalle interno permite justificar, en la parte que le corresponde, el incremento de entalpía y la irreversibilidad interna de la transformación. El incremento de entropía en una transformación adiabática, permite calcular el trabajo de cizalle conociendo sólo los estados del escurrimiento en las secciones extremas. El teorema de Bernoulli permite la aproximación al cálculo energético requiriendo el conocimiento de la ley de la transformación. La teoría del escurrimiento en toberas, deducida en esta forma mecánica, permite llegar a soluciones aplicables a gases y vapores. Los resultados precedentes se han aplicado a la regulación de una turbina a vapor para establecer la ley de la regulación de flujo, cuantificar la magnitud del trabajo de cizalle y determinar la parte de este trabajo efectivamente degradada.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. H. Lamb, *Hydrodynamics*, Sixth Edition 1932, Dover Publication, New York.
2. C.E. Weatherburn, *Advanced vector analysis*, X Reprinted 1957, G. Bell & Sons, London.
3. L. Prandtl, O. Tietjens, *Fundamentals of hydro & aeromechanics*, 1929, 1934, Dover Publications, New York.
4. F.J. Domínguez, *Hidráulica*, 3ª Edición 1959, Editorial Universitaria, Santiago.
5. Kiefer, Kinney, Stuart, *Principles of engineering thermodynamics*, 1954, John Wiley & Sons, New York.
6. A. Shapiro, *The dynamics and thermidynamics of compressible flow*, Vol. 1, 1953, The Ronald Press Co., New York.
7. J. Keenan, J. Kaye, *Gas tables*, X Printing 1963, John Wiley & Sons, New York.