Estudios en honor de
Francisco Javier Domínguez
AUCh, 5ª Serie. Nº 8 (1985): 55-70

LA TEORIA NEWTONIANA DEL DESAGÜE DE ORIFICIOS Y SU INFLUENCIA

ENZO LEVI
Universidad Nacional de México. México

LA CATARATA

En el segundo libro de sus célebres *Principia*, editados en Londres en 1686, Isaac Newton anota: "Está comprobado experimentalmente que la cantidad de agua que sale en un tiempo determinado por un orificio circular practicado en el fondo de un tanque es igual a la cantidad que, escurriendo libremente con la misma velocidad, pasaría en el mismo tiempo a través de otro orificio circular, cuyo diámetro esté en la razón de 21 a 25 con el diámetro del anterior. Por tanto el agua corriente, al cruzar el primer orificio, tiene una velocidad hacia abajo poco más o menos igual a la que adquiriría un cuerpo pesado al caer de una altura equivalente a la mitad de la del agua estancada en el tanque"[1]. O sea, al parecer Newton u otra persona había medido el gasto por el orificio circular practicado en el fondo de un tanque bajo cierto tirante de agua, y luego había medido el diámetro de otro orificio por el cual pasaba el mismo gasto de agua, pero cayendo libremente desde la misma altura; evidentemente con el objeto de comprobar la hipótesis de Torricelli de que la verdad adquirida en las dos condiciones es la misma. Pero si eso hubiese sido cierto, los dos diámetros hubieran tenido que ser iguales, mientras que por el contrario resultaron en proporción de 25 a 21. Por supuesto, el segundo experi-

[1] NEWTON, p. 339

mento es sumamente difícil de ejecutar con precisión; pero no hay motivo de dudar de la afirmación de Newton: de alguna manera lo habrá realizado. Ahora, si los diámetros de los dos orificios están en la razón 25:21, las secciones están en la razón $25^2:21^2=1.41=\sqrt{2}$. Siendo los gastos iguales, las velocidades, al cruzar los orificios estarían luego en la razón $1:\sqrt{2}$. Por tanto para obtener la segunda velocidad en el orificio del tanque simplemente subiendo el nivel de agua en éste, se hubiera necesitado duplicar el tirante; lo que es exactamente lo que Newton afirma al decir que la misma velocidad que resulta en el desagüe del tanque se obtendría con una caída libre de altura equivalente a la mitad de la carga en el tanque mismo.

Buen matemático, Newton quiso naturalmente comprobar el resultado, como decía Varignon, "con una demostración exacta y geométrica". En la demostración, Newton se proponía comparar las cantidades de movimiento del agua al salir del tanque y al caer en el vacío (en ese entonces ya nadie se hacía escrúpulo en imaginar la existencia de espacios totalmente vacíos); pero cometió un error. No he podido consultar la primera edición de los *Principia*; pero parece que, mientras la velocidad acelerada de salida del chorro de desagüe la transformó en uniforme, asociándola por el primer teorema de Galileo con un recorrido doble del tirante, no hizo lo mismo para la velocidad, igualmente acelerada, del chorro en caída libre[2]; y así es natural que le volviera a salir la razón $1:\sqrt{2}$. Que más tarde se haya dado cuenta de la equivocación resulta del hecho que en la segunda edición, de 1713, la demostración fue suprimida. No sólo, sino que allí, Newton aceptó como válida la hipótesis de Torricelli, materializándola con la introducción de la que llamó catarata.

"Catarata" sería una columna de agua en caída libre, cuya forma el mismo Torricelli había determinado al considerar la variación de los diámetros de sus secciones horizontales con la profundidad, en el chorro de desagüe. Ahora bien, a Newton se le ocurrió imaginar a la catarata prolongada por arriba del orificio, dentro del agua contenida en el tanque. Siendo que, como había demostrado Torricelli, los diámetros de sus secciones horizontales varían en razón inversa de la raíz cuarta de sus profundidades con respecto a la superficie libre, en correspondencia a esta superficie, siendo la profundidad cero, el diámetro resultaría infinitamente grande. Esto origina una dificultad que Newton intentó salvar con el artificio del hielo.

Sea —decía Newton— ACDB un tanque cilíndrico (Fig. 1) en cuyo fondo horizontal CD esté un orificio circular EF. Sea G el centro del

[2] ZENDRINI, p. 27

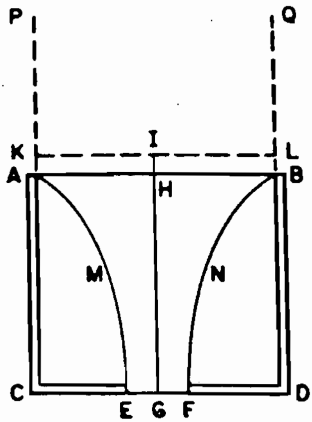

Fig. 1

orificio, GH el eje del tanque. Supóngase el tanque lleno de agua hasta AB, y que encima tenga un cilindro APQB de hielo, de su mismo diámetro y con su mismo eje, que baje continuamente por su propio peso con movimiento uniforme, disolviéndose el hielo en agua en cuanto éste llegue en contacto con la superficie AB. En AB no se tendrá por tanto una velocidad nula, sino la velocidad de descenso del cilindro de hielo, la misma que se supondrá tal que el diámetro de la catarata ABNFEM sea allí precisamente igual al ancho AB. Por debajo, la catarata se irá cerrando, hasta alcanzar en el fondo el ancho EF del orificio, y esto lo hará, como sabemos, reduciendo sus diámetros en proporción inversa de las raíces cuartas de sus profundidades con respecto al nivel KL del plano virtual en que la velocidad de bajada sería nula y el diámetro infinito[3]. Un detalle que Newton no señala, pero que conviene notar, es que, al fijarse el ancho de la catarata en la superficie y en el fondo, queda implícitamente definida también la altura AC.

Newton cree que se produzca una bajada del agua en el tanque y que su movimiento, si bien no sea precisamente el de la catarata, en algo se le parezca. "Imagínese —dice— que toda la cavidad del tanque que rodea el agua que cae ABNFEM (o sea la región AMEC, BNFD) esté llena de hielo, de tal modo que el agua pueda avanzar a través del hielo como por un embudo. Entonces, ya sea que el agua pase muy cerca del hielo sin tocarlo, ya sea que, por la perfecta lisura de la superficie helada, el agua, aun

[3] NEWTON, p. 337

tocándola, deslice sobre ella con toda libertad y sin encontrar la mínima resistencia, de todos modos el agua pasará a través del orificio EF con la misma velocidad de antes, y el peso total de la columna ABNFEM podrá como antes considerarse causa de la expulsión del agua... Supongamos ahora que el hielo contenido en el tanque se disuelva en agua: la descarga, en cuanto a velocidad, quedará la misma que antes. No será menor, porque el hielo ahora disuelto se esforzará en bajar; y tampoco será mayor, porque el hielo transformado en agua no puede descender sin impedir la bajada de una cantidad igual de agua"[4]. Esta última frase pone en claro la renuencia de Newton a suponer una ley de variación de las velocidades de bajada diferente de la de la catarata; efectivamente, hielo derretido y agua podrían muy bien bajar juntos, con tal de que aumenten convenientemente su velocidad de descenso.

Si Newton hubiese experimentado, por ejemplo visualizando el movimiento del agua contenida en el tanque con echar algo de colorante sobre la superficie del agua y siguiendo el recorrido de éste, se habría percatado de que su llegada a la salida es extremadamente lenta, y por nada comparable con la velocidad del chorro. Una caída real de las partículas fluidas desde la superficie hasta el orificio no se produce. Torricelli había evitado esta consideración, con un planteamiento energético de gran porvenir: el chorro posee al salir el mismo ímpetu (o sea la misma energía) que tendría un cuerpo pesado luego de caer de una altura igual al tirante de agua en el tanque. Es decir que cerca del orificio se produce una transformación brusca de energía: la energía de posición del agua quieta se transforma en el chorro en energía cinética; pero el chorro, al concluir su subida y perder así su velocidad, puede recuperar energía de posición y alcanzar el nivel original del agua quieta. Newton evidentemente no aprovechó la idea, y prefirió interpretar el movimiento del chorro como prosecución de uno existente dentro del tanque.

No hay que creer que Newton fuese el único en suponer una caída efectiva del agua desde la superficie hasta el orificio. También así pensaba su contemporáneo Doménico Guglielmini, que, para interpretar la observación del colega francés Edme Mariotte de que, al destaparse el orificio de repente, las primeras gotas salen con una velocidad muy inferior a la que adquiriría luego el chorro una vez conformado, consideraba que el chorro alcanza su régimen normal sólo en el momento en que el agua que inicialmente estaba en la superficie llega al fondo[5]. Además, la autoridad

[4] Id., p. 338
[5] Guglielmini, Fiumi, pp. 31, 32

de Newton era tanta que muchos siguieron creyendo en la existencia real de esta catarata que para él había sido sólo una hipótesis de trabajo. Así, como veremos más adelante, hacía Jurin en 1722. Todavía allá por 1755 Antonio Lorgna, apreciado hidráulico italiano, coronel del cuerpo militar de ingenieros y miembro de las Academias de Berlín y San Petersburgo, pretendía, con grande escándalo de Venturi, que la contracción que el chorro sufre a poca distancia del orificio no sea otra cosa sino la continuación de la catarata newtoniana[6].

Tal vez define bien el punto de vista de estos partidarios de la catarata el comentario escrito en 1741 por Bernardino Zendrini, matemático de la serenísima república de Venecia: "Siendo que no veo que dicha catarata implique en su naturaleza ningún absurdo, y que más bien por lo contrario observo que suponiéndola se explican muchos fenómenos que se producen en la bajada del agua en depósitos abiertos por un orificio; y que el ojo y la razón la hacen también, por así decir, palpar con la mano (aun no reconociéndola efectivamente dentro del depósito) al observarla en su salida en el estrecharse manifiesto de la vena de agua al descender,... no puedo entender cómo no se pueda o deba aceptar que la vena misma continúe también dentro del depósito así como aparece afuera, formando el embudo, o sea la catarata en disputa"[7].

Tampoco faltaron oposiciones francas a la catarata. El médico Pietro Antonio Michelotti, en su libro *De separatione fluidorum in corpore animali* (De la separación de los fluidos en el cuerpo animal) insistía en que no hay ninguna necesidad de acudir a una explicación tan complicada cuando bastaría con pensar en un efecto de pistón. Considérese, decía él, el depósito de ABCD, con orificio en O, que descargue con la velocidad inducida por el tirante de agua AC (Fig. 2). Supóngase luego que el volumen de agua ABnm se reemplace por un sólido que tenga la misma densidad del agua, dejando de ésta tan sólo la capita muy delgada mnDC; y que el sólido mencionado esté en condiciones de bajar deslizando, sin experimentar fricción con la pared. ¿No seguiría el orificio descargando el mismo gasto que antes?[8].

Pero la objeción más demoledora en contra de la catarata la propuso en 1716 una mente aguda, el principal matemático del momento: Johann Bernoulli. Su argumento era el siguiente: aceptemos con Newton que dentro de la catarata toda pequeña tajada horizontal de agua baje por su

[6] VENTURI, p. 71
[7] ZENDRINI, p. 33
[8] íd., pp. 33, 34

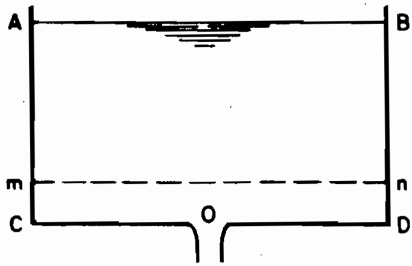

Fig. 2

propio peso. Entonces las tajadas que al bajar quedan en contacto mutuo no tienen que ejercer ninguna fuerza la una sobre la otra, y por consiguiente en todo el interior de la catarata no habrá ninguna presión interna. Supongamos ahora que la pared de la catarata AME, BNF (Fig. 1), sea rígida; si la perforamos y le conectamos por el lado exterior un tubo vertical (piezómetro), nada del agua de la catarata podría entrar en él, debido justamente a la mencionada ausencia de presión. Pero externamente a la pared hay agua estancada, que ejerce una presión estática proporcional a su desnivel con respecto a la superficie libre. La pared ficticia representaría pues la frontera que separa una zona sin presión de otra que sí la tiene; por tanto el agua exterior, empujada por ella, debería precipitarse al interior de la catarata y mezclarse con el agua que en ella escurre. La catarata no podría pues conservar su forma ni un instante[9].

La contracción del chorro

Newton había hallado que el gasto evacuado por un orificio bajo cierta altura de agua es igual al que pasaría por un orificio de diámetro 21/25 del anterior si se tratara de agua que cae libremente de la misma altura. Su primera suposición había sido que la hipótesis de Torricelli fuese falsa, pero luego se dio cuenta que no lo era. ¿De dónde pues provenía esa diferencia de diámetros? Intrigado, Newton se puso a observar más detenidamente el chorro, y vio que éste no conserva el ancho del orificio del cual proviene, sino que a poca distancia sufre una contracción, cuyo diámetro estimó estar al del orificio en la razón de 5:6 o de 5½:6½ aproximadamente (Fig. 3). ¿Podría ese hecho ofrecer la explicación bus-

9 Bernoulli, pp. 441, 442

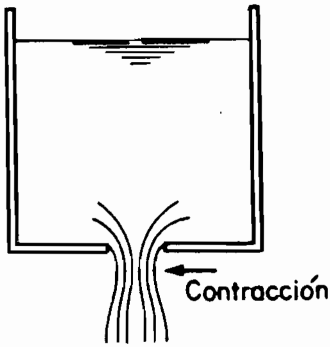

Fig. 3

cada, en el sentido de que en la contracción estuviese el "diámetro verdadero" del chorro? Para explicarnos mejor, podría ser —y esto pensó Newton— que el agua cerca de las orillas del orificio salga en dirección oblicua, convergiendo hacia el eje de la vena fluida. En tales condiciones el gasto a través del orificio resultaría menor que si el escurrimiento fuese paralelo al eje, como en la sección contraída, en la cual el diámetro mínimo asegura una velocidad media máxima, que podría ser la verdadera velocidad del desagüe.

Pero había otra posibilidad: como la sección contraída se encuentra algo por debajo del orificio, para que ésta aparezca el agua tiene que descender un poco; a este descenso puede asociarse una aceleración, la que a su vez podría ser la causa de la contracción. "Conseguí —explica entonces Newton— una placa delgada a la que se había hecho un agujero circular en el centro, siendo su diámetro 5/8 de pulgada. Y para que la corriente de agua no se acelerase al caer y se angostase por la aceleración, fijé la placa no en el fondo, sino a un lado del tanque, forzando así el agua a salir en dirección horizontal. Luego, cuando el depósito estuvo lleno de agua, abrí el orificio para dejarla salir; y el diámetro del chorro, medido con gran esmero a la distancia de media pulgada aproximadamente del agujero, era 21/40 de pulgada. Por tanto, el diámetro del orificio era el diámetro del chorro con buena aproximación como 25:21"[10]. He aquí pues aparecer de nuevo la razón de antes, aunque ahora sea de excluirse todo efecto de aceleración; se puede pues concluir, y así lo hizo Newton,

[10] NEWTON, pp. 338, 339

que, para que la hipótesis de Torricelli se cumpla, hay que tomar como diámetro real del chorro no el del orificio, sino el de la vena contraída.

La velocidad del agua al dejar el orificio es el espacio que ella recorre perpendicularmente al orificio mismo en un segundo; el gasto es el volumen que sale en un segundo, es decir el de un cilindrito que tiene como base el orificio y altura el espacio recorrido al segundo; por tanto el gasto debería ser el producto de la velocidad por el área del orificio, siempre que éste fuese cruzado por el agua en dirección normal. Como esto no sucede en el orificio mismo, sino en la sección contraída, será el área de esta última la que habrá que utilizar. Por tanto, se puede asumir como regla para determinar el gasto descargado la siguiente: calcular la velocidad que adquiriría un grave cayendo desde una altura igual a la del agua quieta sobre el orificio, ésta multiplicarla por el área del orificio, y finalmente multiplicar el producto así obtenido por el "coeficiente de contracción" $21^2{:}25^2=0.706$, que permite pasar del área del orificio a la de la sección contraída. Este coeficiente, cuyo valor numérico ha sido perfeccionado, como sabemos, efectuando mediciones más precisas, ha quedado hasta el día de hoy como una de las "constantes" importantes de la hidráulica práctica.

El enigma de la columna doble

La proposición 36 del segundo libro de los *Principia* newtonianos plantea el siguiente problema: hallar el movimiento del agua que sale de un tanque cilíndrico por un orificio practicado en el fondo; y es justamente el análisis de esta cuestión que llevó a Newton a introducir la hipótesis de la catarata. A esta proposición sigue una serie de diez corolarios, el segundo de los cuales reza así: *la fuerza con la cual puede producirse todo el movimiento del agua saliente es igual al peso de una columna cilíndrica de agua cuya base sea el orificio EF y cuya altura sea 2GI* (Fig. 1). A lo que sigue la escueta explicación: "porque el agua descargada, en el tiempo que se hace igual a dicha columna, al caer por su propio peso por la altura GI puede adquirir una velocidad igual a aquella con que está saliendo"[11]. Evidentemente Sir Isaac, apoyándose en el primer teorema de Galileo, aceptaba que, en el tiempo requerido por un grave que cae libremente para recorrer la altura del agua en el tanque, el chorro que sale del orificio sin acelerarse adquiere una longitud que es dos veces dicha altura, formando así la

[11] Newton, p. 342

doble columna cilíndrica mencionada; y por otro lado consideraba que la fuerza aplicada es igual al cambio de cantidad de movimiento producido por ella (segundo axioma de los *Principia*), cambio que, al destaparse el orificio, resulta ser igual al producto de la velocidad de salida por la masa de la doble columna.

Sin embargo, quienes leían el segundo corolario quedaban perplejos: ¿de dónde podía provenir tanta fuerza si sobre el orificio sólo gravita una columna de altura GI? Además, las mediciones producían resultados en desacuerdo con el corolario mencionado. Guglielmini, ensayando con un tirante de 3.9 pies sobre un orificio cuadrado de un cuarto de onza de lado (siendo la onza la doceava parte del pie), halló que el agua salida en un minuto, conformada en un prisma con el orificio como base, alcanzaría 427.7 pies de altura (lo que nosotros expresaríamos diciendo que la velocidad de salida era 427.7 pies por minuto); mientras que la velocidad calculada de acuerdo con el principio de Torricelli resultaba 815.3 pies por minuto. Lo que se interpretaba en el sentido de que, si esta velocidad teórica se debe a la presencia de una fuerza igual al peso de una columna doble, la velocidad real apuntaría más bien al de la columna simple[12]. Tampoco faltó quien interpretase mal lo escrito por Newton, afirmando que la velocidad con que el agua abandona el tanque es igual a la que adquiriría un grave al caer de una altura doble del tirante, y no de una igual al tirante como Torricelli había afirmado[13], lo que aumentó la confusión.

En defensa de Newton acudió Jacob Jurin, publicando en las *Transactions* de la Sociedad Real de Londres de 1722 un trabajo en que demostraba que el volumen de la doble columna cilíndrica es exactamente igual al de la catarata. Con notación moderna, su demostración es esencialmente la que sigue: Sea a (Fig. 4) el radio del orificio EF, b el tirante de agua sobre él. El área de una sección CD cualquiera de la catarata es πx^2, la velocidad en ella proporcional a $\sqrt{y}$. Por tanto, la condición de que el gasto se mantenga el mismo a través de todas las secciones implica que en la catarata sea

$$\pi^2 x^4 y = \text{const}$$

Diferenciando y dividiendo entre πx^2, queda

$$\pi x^2 dy = -4\pi xy dx$$

[12] Guglielmini, Mis, p. 336

[13] Zendrini, p. 33

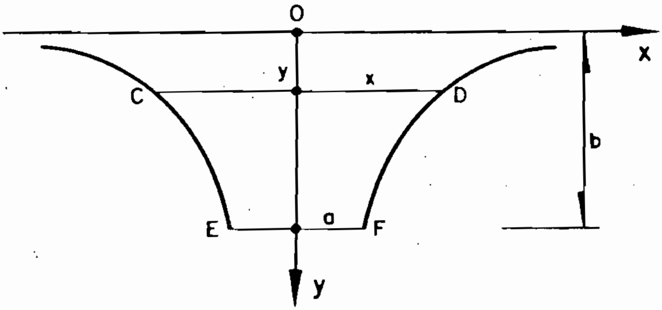

Fig. 4

por lo que el volumen de la catarata resulta

$$\int_0^b \pi x^2 dy = 4\pi \left[\frac{x^2}{2}\, y\right]_0^b = 2\pi a^2 b$$

que es el volumen de la doble columna. De aquí se concluía que el corolario newtoniano implica que la fuerza que produce el desagüe es el peso de toda la catarata[14].

Jurin creía haber aclarado definitivamente el asunto; de hecho lo había enredado más. Michelotti, que ya desde antes había iniciado una discusión con él acerca de esa cuestión, no tardó en formular una serie de objeciones. Primero —decía— si lo que empuja al chorro es la catarata, al destaparse el orificio éste debería adquirir instantáneamente toda su velocidad, lo que no concuerda con la experiencia. Además, se ve que de un depósito ancho en el fondo y angosto arriba, en el cual no cabría toda la catarata, el agua sale igual que de uno cilíndrico; luego la catarata no es indispensable para producir el movimiento. Y continuaba con argumentos análogos[15]. Por cierto, vale la pena notar que el dibujo de Newton reproducido en la Fig. 1 hace olvidar que, en su parte superior, la catarata se expande hasta el infinito; así que de hecho ningún depósito podría contenerla en su totalidad.

Las opiniones de Michelotti no satisficieron al conde Jácopo Riccati, ese mismo que había integrado una célebre ecuación diferencial que

[14] íd., p. 35
[15] íd., pp. 36-38

todos los estudiantes de cálculo conocen, de nombre por lo menos. ¿Para qué tanto escándalo con que si existe o no la catarata? —decía él— Si es útil para explicar el fenómeno, aceptémosla simplemente como modelo matemático. El argumento newtoniano se apoya en la hipótesis de que el chorro mantenga la misma velocidad que posee la catarata al salir del orificio: que se compruebe si este hecho se verifica o no en la naturaleza, y luego se discuta. De hecho, la única manera de medir la fuerza que expulsa al chorro es determinando la cantidad de movimiento engendrada por la caída del fluido desde la superficie hasta el orificio; y experiencias como la de Guglielmini arriba mencionada sugieren que el cilindro de agua que sale durante el tiempo que tarda dicha caída, si bien no tiene la altura de dos veces el tirante, por lo menos es seguramente más alto. Por tanto, según Riccati, habría que concluir que, además de la acción vertical de la presión del agua, debe de existir otra oblicua que de alguna manera se le suma[16].

Se encontraba entonces en Venecia un hijo de Johann Bernoulli, de nombre Daniel, proveniente de Basilea, quien había aprendido de su belicoso padre que en cuestiones científicas el que está seguro de su propia opinión debe manifestarla sin temor a nadie, aunque éste sea el propio conde Riccati. Así que, a pesar de no tener más de 24 años, se lanzó de cabeza en la lucha.

Daniel no era de esos que esperan que las cosas se las cuenten los demás. El se construyó su tanque, lo llenó de agua, colocó en ella partículas de cera de España, destapó el orificio y, observando la bajada de las partículas, vio —o creyó ver— que seguían trayectorias similares a las trazadas en la Fig. 5, sin asomo de catarata. "Me parece —escribió más tarde— que el movimiento interno del agua debe considerarse tal como sería si ella fuese arrastrada por tubos infinitamente pequeños colocados uno cerca del otro, de los cuales los centrales bajan casi directamente desde la superficie hacia el orificio, mientras que los demás se encorvan gradualmente cerca del orificio mismo, como muestra la figura; de donde aparece que las partículas individuales bajan con movimiento muy aproximadamente vertical hasta acercarse mucho a la base, para luego dirigir gradualmente su trayectoria hacia el orificio; de tal modo las partículas próximas a la base escurren con movimiento casi horizontal"[17]. Por tanto, no habrían en el depósito movimientos oblicuos, como parecía creer Riccati.

Además —argumenta Daniel— si se produjera un movimiento oblicuo,

16 íd., pp. 41, 42

17 BERNOULLI, p. 72

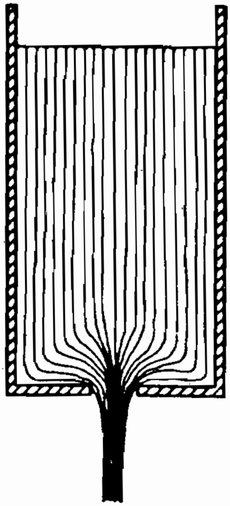

Fig. 5

el gasto descargado tendería más bien a disminuir que a crecer. Por otro lado, supongamos primero que el depósito no tenga fondo, es decir que el orificio tenga el mismo diámetro que el recipiente: entonces cada partícula caería verticalmente sin afectar al movimiento de sus vecinas. Si por el contrario, el orificio fuese sumamente pequeño, resultaría el efecto opuesto, o sea que cada gota tendría que comunicar a la que tiene debajo "toda la fuerza de su gravedad", mientras que la inferior no le cedería nada a la superior. Si finalmente nos hallásemos en el caso intermedio de un orificio cuya sección sea mitad de la del recipiente, el agua bajaría en éste con la mitad de la velocidad con que sale del orificio; por tanto al principio de su movimiento cada gota sólo emplearía la mitad de su gravedad natural, comunicando la otra mitad a la gota que tiene encima. Es decir que el agua saldría con la velocidad que adquiriría cayendo no de la altura AB, sino de la altura AB/2; por tanto, esta velocidad sería la del segundo caso como $(1/\sqrt{2}):1$. Concluía Daniel, proponiendo calcular la fuerza que empuja al agua que sale del orificio por medio de la fórmula $\frac{m-n}{m}P$, donde P es el peso de la columna de agua que está sobre el orificio, n la sección de este último y m la del tanque[18], fórmula verificada en los tres casos arriba mencionados.

[18] Zendrini, pp. 45-47

La polémica continuó por algún tiempo. Sabemos que Riccati pidió a Daniel Bernoulli comprobar sus ideas con base en los experimentos de Guglielmini; lo que Daniel hizo, pero con resultados no decisivos[19]. Como la controversia entre los dos haya concluido por entonces, no lo sabemos. Lo más probable es que, como la mayor parte de semejantes disputas, no haya alcanzado ninguna conclusión; porque con el pasar del tiempo los fenómenos revelan nuevos aspectos y ciertos detalles pobremente entendidos se explican. Cada uno de los contendientes se da cuenta de haber incurrido en algún desacierto, mientras que el adversario un poco de razón la tenía; y ambos resuelven que no vale la pena seguir discutiendo.

El enigma se explica

En el capítulo 13 de su *Hydrodynamica*, Daniel ataca teóricamente el problema del orificio[20]. Sus cálculos no son fáciles de seguir, porque él llama v la energía cinética específica (por unidad de masa) y supone iguales a uno tanto la densidad del fluido, que nosotros acostumbramos llamar ρ, como la aceleración de grave, que solemos denotar con $g=\gamma/\rho$ (si γ es el peso específico del fluido mismo). Vamos a reconstruirlos con notación moderna. Sea ACDB (Fig. 6) un tanque provisto de un tubo de descarga EH de sección unitaria y longitud m. Sea h la carga de agua sobre el orificio. La fuerza actuante sobre el fluido contenido en el tubo, por ser unitaria la sección de éste, es una presión, que indicaremos con p. La masa de agua contenida en el tubo es ρm, y por tanto, si v es la velocidad con que sale, ρmv será su cantidad de movimiento. Igualando el impulso durante un tiempo infinitesimal dt a la correspondiente variación infinitesimal de cantidad de movimiento, resulta que

$$p\,dt = \rho\, d(mv) = \rho\,(m\,dv + v\,dm) \tag{1}$$

Aquí dm representa la longitud del cilindro infinitesimal de agua que abandona el tubo en el tiempo dt, por lo que resulta $dt = dm/v$; expresión que, remplazada en (1), la transforma en

$$\frac{p}{\rho} = mv\,\frac{dv}{dm} + v^2 \tag{2}$$

[19] íd., p. 47
[20] Bernoulli, pp. 317-320

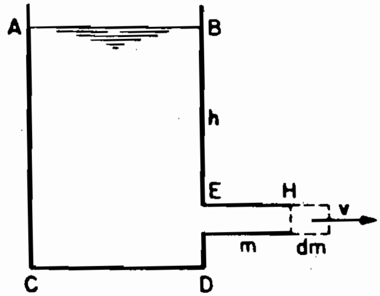

Fig. 6

Apliquemos ahora el teorema de las fuerzas vivas, expresando que la variación del trabajo realizado durante el tiempo dt en la expulsión del fluido es igual a la correspondiente variación de las fuerzas vivas en el tubo. La variación del trabajo es el peso γh de una columna de fluido de sección unitaria multiplicado por el desplazamiento elemental dm, y la fuerza viva en el tubo es $\rho m v^2/2$; por lo que resulta

$$\gamma h dm = \rho d(m \frac{v^2}{2}) = \rho(\frac{v^2}{2} dm + m v dv)$$

de donde se obtiene

$$mv \frac{dv}{dm} = gh - \frac{v^2}{2}$$

que, remplaza en (2), da finalmente

$$\frac{p}{\rho} = gh + \frac{v^2}{2} \qquad (3)$$

De aquí Daniel saca las siguientes conclusiones:

a) El hecho de que el parámetro m haya desaparecido de la ecuación final (3) sugiere que la longitud del tubo "no contribuye en nada a la fuerza repelente sostenida por el recipiente". Sin embargo dicha longitud afecta a los incrementos de velocidad, porque entre más largo sea el tubo, más lentamente se acelera el agua. Si el tubo fuese de longitud infinita, se requeriría un tiempo infinito para que el fluido adquiera una velocidad apreciable.

b) La fórmula (3) es válida siempre que se suponga el paso de un "flujo libre" por el tubo. Si el escurrimiento se retrasa por obstáculos externos, como prolongar el tubo mismo o cerrar frecuentemente su orificio, también la fuerza repelente se reduce.

c) La fórmula (3) permite explicar el famoso corolario 2 de la proposición 36 de Newton.

Con referencia a este último punto, Daniel confiesa que a la idea de la doble columna "yo y algunos otros nos habíamos opuesto mientras que otros la confirmaban. Pero ahora, luego de haber pensado en esta teoría del movimiento del agua, me parece que la disputa debe conciliarse como sigue: cuando el agua ha alcanzado un movimiento uniforme, la que seguramente es la suposición de Newton, entonces esa fuerza se define correctamente por la altura 2GI (Fig. 1); pero al principio del escurrimiento, cuando la velocidad es todavía cero, la fuerza corresponde a la altura simple GI. A medida que la velocidad crece, la fuerza que induce el agua a salir crece simultáneamente, para alcanzar finalmente la magnitud asignada por Newton... También el célebre Riccati, con el cual tuve una discusión acerca de este argumento, cuando se le preguntó *de dónde podía provenir esa fuerza correspondiente al doble de la altura del agua, mientras que es manifiesto que, con orificio cerrado, el elemento de volumen adyacente a éste recibe la presión de la fuerza correspondiente a la altura simple*, contestó que *hay que hacer distinción entre el estado de reposo y el de movimiento*"[21].

Actualmente este resultado lo expresamos como sigue. La energía específica p/ρ relacionada con la presión que actúa sobre el orificio se compone de dos partes: una potencial, correspondiente al tirante de agua, y otra de carácter cinético, que depende de la velocidad de salida. Una vez establecido el régimen de desagüe, disponemos, de acuerdo con la ecuación (3), de ambas: la gh, proveniente de la columna líquida sobre el orificio, y la $v^2/2$ que puede, transformándose en potencial, volver a crear otra columna equivalente.

[21] Íd., pp. 319, 320

BIBLIOGRAFIA

BERNOULLI, DANIEL, *Hydrodynamics;* BERNOULLI, JOHANN, *Hydraulics,* Dover, New York, 1968.

GUGLIELMINI, DOMENICO, *Della natura de' fiumi,* 2ª ed., Bologna, 1739.

GUGLIELMINI, DOMENICO, *Misura delle acque correnti,* en: *Raccolta d' autori che trattano del moto dell'acque,* 2ª ed., Firenze, 1765, Vol. I.

NEWTON, ISAAC, *Mathematical principles of natural philosophy,* University of California Press, Berkeley, Cal., 1962, Vol. I.

VENTURI, JEAN BAPTISTE, *Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides,* Paris, 1797.

ZENDRINI, BERNARDINO, *Leggi e fenomeni, regolazioni ed usi delle acque correnti,* en *Raccolta d'autori che trattano del moto dell' acque,* Firenze, 1765, Vol. VIII.