

UN ANÁLISIS FLEXIONAL NUMÉRICO DE PLACA ELÁSTICA OBLICUA Y DELGADA

EDGAR PINO BARRUETO¹
SERGIO VILLAFANE ROBERTSON²
PATRICIO CENDOYA HERNÁNDEZ³

RESUMEN

Se desarrolla un análisis numérico aproximado de placas oblicuas delgadas, con el modelo de Kirchhoff-Love, para placas de borde empotrado y sobre apoyo simple, con carga repartida y carga concentrada, por diferencias finitas centrales, con malla paralelográfica. Con distintos ángulos de oblicuidad de la placa y variando la razón de lados, se evalúan numéricamente los valores máximos de flechas, momentos de flexión y torsión, como también reacciones de esquinas en el caso de simple apoyo.

Los resultados numéricos obtenidos se llevan a tablas y gráficos que facilitan su uso práctico, y permiten comparar la exactitud del método elegido, con otros procedimientos aproximados. Los programas computacionales que llevaron a los resultados antedichos se confeccionaron ex profeso, pero no se incluyen en el presente trabajo por economía de espacio.

¹Profesor de Facultad de Ingeniería. U. de C.

²Prof. Facultad de Ingeniería U. de C.

³Instructor de Facultad de Ingeniería. Universidad de Concepción.

I. MODELO MATEMÁTICO BÁSICO

Se consideran placas delgadas romboidales de espesor uniforme h , cuyo material homogéneo e isotrópico tiene las constantes elásticas E , ν (módulos de Young y Poisson, respectivamente). En su estado no deformado la placa se supone de caras planas; su plano medio, equidistante de ambas caras, quedará contenido en el plano coordenado horizontal XY . Aplicada la carga distribuida $q_z(x,y)$, paralelamente al eje Z , y en los supuestos de la teoría de Kirschhoff-Love, la flexión consiguiente queda regida por la ecuación diferencial parcial de Lagrange cuando el sistema coordenado XYZ es cartesiano ortogonal:

$$w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = q_z/D \quad (I, 1)$$

donde:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (I, 2)$$

en la rigidez flexional de la placa por unidad de anchura; $w(x,y)$ es el corrimiento vertical del punto (x,y) del plano medio. Las comas antepuestas a los subíndices en el primer miembro de (I,1) indican derivaciones parciales sucesivas de w , tantas veces como lo indica el número de apariciones de la variable de que se trate después de la coma. Esta notación seguirá usándose en adelante.

II. COORDENADAS CARTESIANAS OBLICUAS

En el análisis numérico de placas romboidales es adecuado el uso de coordenadas oblicuas [Ref. 1], como se indica en Figura 1 y ecuaciones (II,1); los ejes oblicuos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ se toman, obviamente, paralelos a los lados de la placa en cuestión.

$$\bar{x} = x - y \operatorname{tg} \gamma \quad (II, 1)$$

$$\bar{y} = y \sec \gamma$$

" γ " se denominará ángulo de oblicuidad; aplicando la regla de la cadena del cálculo diferencial encuéntrase mediante (II,1) que:

$$\begin{aligned} w_{,x} &= w_{,\bar{x}} \cdot \bar{x}_{,x} + w_{,\bar{y}} \cdot \bar{y}_{,x} = w_{,\bar{x}} \cdot 1 + w_{,\bar{y}} \cdot 0 = w_{,\bar{x}} \\ w_{,y} &= w_{,\bar{x}} \cdot \bar{x}_{,y} + w_{,\bar{y}} \cdot \bar{y}_{,y} = w_{,\bar{x}} \cdot (-\operatorname{tg} \gamma) + w_{,\bar{y}} \cdot \sec \gamma \end{aligned}$$

Es decir:

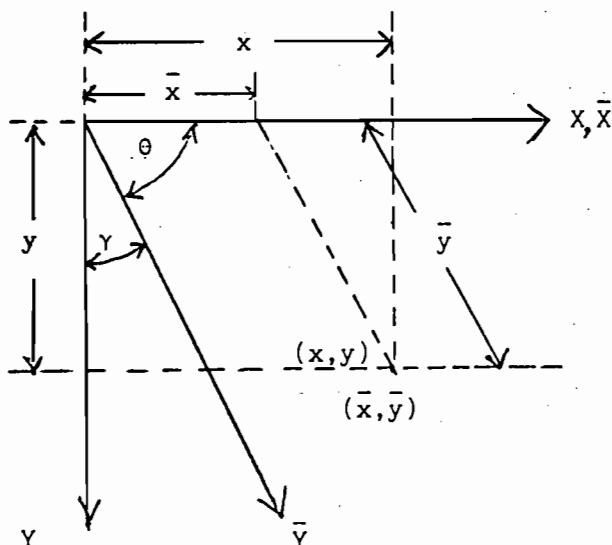


Fig. 1. Sistema de coordenadas.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = (-\operatorname{tg} \gamma) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + (\sec \gamma) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \quad (\text{II},2)$$

Aplicación repetida de (II,2) conduce a:

$$\bar{\nabla}^2 w = w_{,xx} + w_{,yy} = w_{,\bar{x}\bar{x}} + \left[(-\operatorname{tg} \gamma) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + (\sec \gamma) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right] \left[(-\operatorname{tg} \gamma) w_{,\bar{x}} + (\sec \gamma) w_{,\bar{y}} \right]$$

Efectuado derivaciones y reducciones:

$$\bar{\nabla}^2 w = (w_{,\bar{x}\bar{x}} - 2w_{,\bar{x}\bar{y}} \operatorname{sen} \gamma + w_{,\bar{y}\bar{y}}) \sec^2 \gamma \quad (\text{II},3)$$

donde $\bar{\nabla}^2$ denota el laplaciano en coordenadas oblicuas; se ha considerado aquí la invarianza del laplaciano con respecto a transformación de coordenadas. Aplicando dos veces el laplaciano (II,3), y efectuadas las operaciones indicadas, la ecuación (I,1) en coordenadas oblicuas se lee:

$$\bar{\nabla}^4 w = [w_{,\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + 2(1 + 2\operatorname{sen}^2 \gamma) w_{,\bar{x}\bar{x}\bar{y}\bar{y}} - 4(w_{,\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{y}} + w_{,\bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{y}}) \operatorname{sen} \gamma + w_{,\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{y}}] \sec^4 \gamma = \bar{q}_z / D \quad (\text{II},4)$$

Análogamente, los momentos de flexión M_x , M_y y de torsión M_{xy} , por unidad de longitud [Ref. 2]:

$$M_x = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}); M_y = -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx});$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu)w_{,xy}$$

al aplicar (II,2), en coordenadas oblicuas quedan dados por:

$$M_x(\bar{x}, \bar{y}) = -D \{ [1 + (\nu - 1)\sec^2\gamma] w_{,\bar{x}\bar{x}} - 2\nu w_{,\bar{x}\bar{y}} \sec\gamma + \nu w_{,\bar{y}\bar{y}} \} \sec^2\gamma \quad (\text{II},5)$$

$$M_y(\bar{x}, \bar{y}) = -D \{ [\nu + (\nu - 1)\sec^2\gamma] w_{,\bar{x}\bar{x}} - 2w_{,\bar{x}\bar{y}} \sec\gamma + w_{,\bar{y}\bar{y}} \} \sec^2\gamma \quad (\text{II},6)$$

$$M_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = -M_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) = D(1-\nu)(w_{,\bar{x}\bar{y}} - w_{,\bar{x}\bar{x}} \sec\gamma) \sec\gamma \quad (\text{II},7)$$

Los momentos de flexión principales en un punto (x,y) de la superficie media, momentos de flexión máximo y mínimo en tal punto, están dados por:

$$M_1 \equiv M_{\max} = \frac{M_x + M_y}{2} + \left[\left(\frac{M_x - M_y}{2} \right)^2 + M_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (\text{II},8)$$

$$M_2 \equiv M_{\min} = \frac{M_x + M_y}{2} - \left[\left(\frac{M_x - M_y}{2} \right)^2 + M_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

Para expresarlos en coordenadas oblicuas basta introducir en (II,8) las expresiones (II,5), (II,6) y (II,7).

En cuanto a las ecuaciones de membrana del método de Marcus, a usarse más adelante en placas oblicuas simplemente apoyadas [Ref. 2]:

$$\nabla^2 S = -q_z; \nabla^2 w = -\frac{S}{D} \quad (\text{II},9)$$

donde:

$$S = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} \quad (\text{II},10)$$

su formulación en coordenadas oblicuas fluye de introducir en (II,9) y (II,10), los resultados (II,3), (II,5) y (II,6), obteniéndose:

$$\bar{\nabla}^2 S \equiv (S_{,\bar{x}\bar{x}} - 2S_{,\bar{x}\bar{y}} \sec\gamma + S_{,\bar{y}\bar{y}}) \sec^2\gamma = -q_z(\bar{x}, \bar{y}) \quad (\text{II},11)$$

$$\bar{\nabla}^2 w \equiv (w_{,\bar{x}\bar{x}} - 2w_{,\bar{x}\bar{y}} \sec\gamma + w_{,\bar{y}\bar{y}}) \sec^2\gamma = -S(\bar{x}, \bar{y})/D \quad (\text{II},12)$$

$$\text{con } S(\bar{x}, \bar{y}) = -D(w_{,\bar{x}\bar{x}} - 2w_{,\bar{x}\bar{y}} \sec\gamma + w_{,\bar{y}\bar{y}}) \sec\gamma \quad (\text{II},13)$$

III. REACCIONES REPARTIDAS DE BORDE Y REACCIONES DE ESQUINA

Sea $\mathcal{R}$ la región del plano XY ocupada por la superficie media de la placa en su estado no deformado; $\partial\mathcal{R}$ denotará su borde o contorno. Si sobre la

curva plana $\partial\mathcal{R}$, n, t denotan la dirección normal y tangencial, respectivamente, la reacción distribuida V_n a lo largo del contorno, evaluada por unidad de longitud, se expresa por [Ref. 3]:

$$V_n = -D(\nabla^2 w)_{,n} - M_{nt,s} \quad (\text{III},1)$$

en que M_{nt} es el momento torsor a lo largo de $\partial\mathcal{R}$, por unidad de longitud, s es la longitud de arco evaluada sobre $\partial\mathcal{R}$ a partir de cualquier punto convencionalmente elegido; además [Ref. 2]:

$$M_{nt} = (1 - \nu)Dw_{,nt} \quad (\text{III},2)$$

La fórmula (III,1) debe llevarse a coordenadas oblicuas. En el presente estudio $\mathcal{R}$ es la región plana romboidal ocupada por la placa en el plano XY , $\partial\mathcal{R}$ es el romboide que la encierra, como se muestra en Fig. 2:

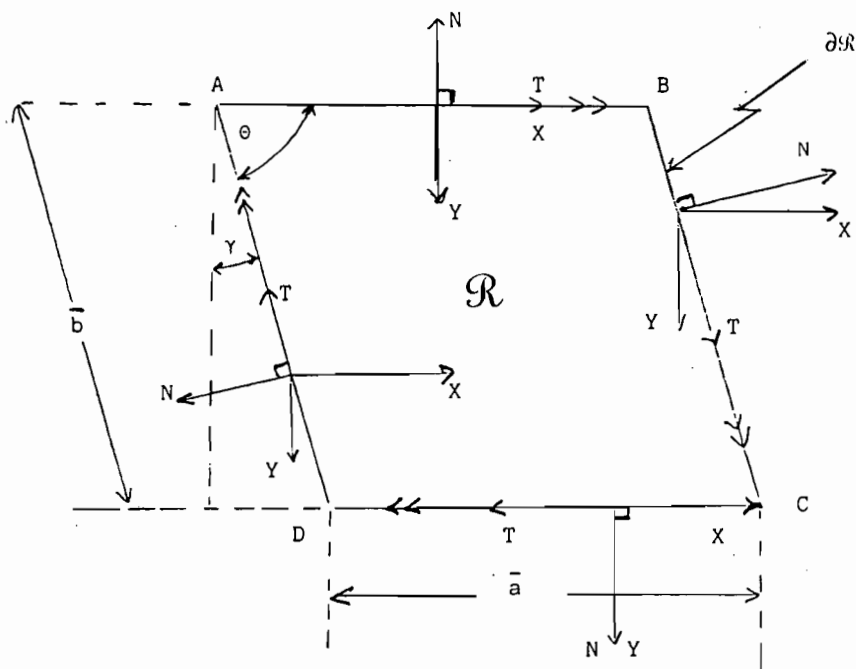


Fig. 2. Muestra el sentido positivo de circulación elegida sobre $\partial\mathcal{R}$ (sentido horario), indicado por $\rightarrow$

También se exhiben cuatro posibilidades de elección del sistema coordenado ortogonal X,Y ; cada una consiste en elegir como origen un punto cualquiera de uno de los cuatro lados del borde $\mathcal{R}$, manteniendo fija la orientación de los ejes X,Y . Elegido el origen, se considera a partir de él un sistema ortogonal N,T , en que el eje N es normal al borde, orientado positivamente hacia el exterior de $\mathcal{R}$, mientras que el eje tangencial T se orienta en el sentido positivo de circulación a lo largo del contorno.

Para un punto cualquiera del plano que contiene a $\mathcal{R}$, las relaciones entre sus coordenadas (x,y) y (n,t) se deducen por simple geometría, en cada caso. Son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Origen sobre lado BC: } x &= n \cos \gamma + t \sin \gamma \\ (\text{rotación en ángulo } \gamma) \quad y &= t \cos \gamma - n \sin \gamma \end{aligned} \quad (\text{III},3)$$

$$\text{Origen sobre lado CD: } x = -t, \quad y = n \quad (\text{III},4)$$

Origen sobre lado DA: relaciones (III,3) con signos opuestos

Origen sobre lado AB: relaciones (III,4) con signos opuestos

Si cada una de estas posibilidades se lleva a las fórmulas de transformación (II,1) se encuentran, respectivamente, los siguientes resultados:

$$\bar{x} = n \sec \gamma \quad ; \quad \bar{y} = t - n \tan \gamma \quad (\text{III},5)$$

$$\bar{x} = -(t + n \tan \gamma) \quad ; \quad \bar{y} = n \sec \gamma \quad (\text{III},6)$$

$$\bar{x} = -n \sec \gamma \quad ; \quad \bar{y} = -t + n \tan \gamma \quad (\text{III},7)$$

$$\bar{x} = t + n \tan \gamma \quad ; \quad \bar{y} = -n \sec \gamma \quad (\text{III},8)$$

Por regla de cadena:

$$w_{,n} = w_{,\bar{x}} \cdot \bar{x}_{,n} + w_{,\bar{y}} \cdot \bar{y}_{,n} \quad ; \quad w_{,t} = w_{,\bar{x}} \cdot \bar{x}_{,t} + w_{,\bar{y}} \cdot \bar{y}_{,t} \quad (\text{III},9)$$

Luego:

$$\text{Usando (III,5) en (III,9): } \begin{cases} w_{,n} = (\sec \gamma) w_{,\bar{x}} - (\tan \gamma) w_{,\bar{y}} \\ w_{,t} = w_{,\bar{y}} \end{cases} \quad (\text{III},10)$$

$$\text{Usando (III,6) en (III,9): } \begin{cases} w_{,n} = (-\tan \gamma) w_{,\bar{x}} + (\sec \gamma) w_{,\bar{y}} \\ w_{,t} = -w_{,\bar{x}} \end{cases} \quad (\text{III},11)$$

Reiterando cuidadosamente (III,10) y (III,11), resulta después de reducciones simples,

$$\text{en caso (III,5):} \begin{cases} w_{,nn} = (w_{,\bar{x}\bar{x}} - 2w_{,\bar{x}\bar{y}} \operatorname{sen} \gamma + w_{,\bar{y}\bar{y}} \operatorname{sen}^2 \gamma) \sec^2 \gamma \\ w_{,tt} = w_{,\bar{y}\bar{y}} \\ w_{,nt} = w_{,\bar{x}\bar{y}} \sec \gamma - w_{,\bar{y}\bar{y}} \operatorname{tg} \gamma \end{cases} \quad (\text{III,12})$$

$$\text{en caso (III,6):} \begin{cases} w_{,nn} = (w_{,\bar{x}\bar{x}} \operatorname{sen}^2 \gamma - 2w_{,\bar{x}\bar{y}} \operatorname{sen} \gamma + w_{,\bar{y}\bar{y}}) \sec^2 \gamma \\ w_{,tt} = w_{,\bar{x}\bar{x}} \\ w_{,nt} = w_{,\bar{x}\bar{x}} \operatorname{tg} \gamma - w_{,\bar{x}\bar{y}} \sec \gamma \end{cases} \quad (\text{III,13})$$

Observación: En casos (III,7), (III,8), las primeras derivadas $w_{,n}$ y $w_{,t}$ resultan, respectivamente, iguales a las (III,10) y (III,11), pero con signos cambiados. Empero, las segundas derivadas $w_{,nn}$, $w_{,tt}$, $w_{,nt}$ son iguales a las (III,12) y (III,13), respectivamente, pues los cambios de signo se cancelan al aplicarlos dos veces consecutivas.

De (III,12), (III,13) y de la *observación*, se sigue que en los cuatro casos considerados en Fig. 2, en cuanto a elección de los sistemas {X, Y}, {N, T}, el laplaciano $w_{,nn} + w_{,tt}$ resulta igual al $\bar{\nabla}^2$ dado por ecuación (II,3). Por otra parte, si la longitud de arco s se mide a partir de uno de los vértices del romboide ∂R , por ejemplo A, es claro que (nótese que s es esencialmente no negativo):

$$\begin{aligned} \text{sobre AB: } s &= \bar{x} \\ \text{sobre BC: } s &= \bar{a} + \bar{y} \\ \text{sobre CD: } s &= \bar{a} + \bar{b} - \bar{x} \\ \text{sobre DA: } s &= 2\bar{a} + \bar{b} - \bar{y} \end{aligned} \quad (\text{III,14})$$

Entonces sobre los 4 lados, en el orden indicado en (III,14), el operador $\frac{\partial}{\partial s}$ debe reemplazarse, respectivamente, por: $\bar{x}$; $\bar{y}$; $-\bar{x}$; $-\bar{y}$. Si estas conclusiones se usan en (III,1), conjuntamente con: (III,2), primera fórmula (III,10), el hecho ya probado que $\nabla^2 w = w_{,nn} + w_{,tt} = \bar{\nabla}^2 w$ es dado por (II,3) y realizadas las operaciones y reducciones de rigor, encuéntrase que la reacción repartida en el borde, V_n , tiene en coordenadas oblicuas $\bar{x}$, $\bar{y}$, y la expresión:

$$\begin{aligned} V_n(\bar{x}, \bar{y}) = & -D \{ w_{,\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - 3w_{,\bar{x}\bar{x}\bar{y}} \operatorname{sen} \gamma + [(2-\nu) + (1+\nu) \operatorname{sen}^2 \gamma] w_{,\bar{x}\bar{y}\bar{y}} \\ & - [(2-\nu) + (\nu-1) \operatorname{sen}^2 \gamma] w_{,\bar{y}\bar{y}\bar{y}} \operatorname{sen} \gamma \} \sec^3 \gamma \end{aligned} \quad (\text{III,15})$$

en lados del romboide que tienen la dirección del eje Y; para los lados con direcciones $\bar{X}$:

$$V_n(\bar{x}, \bar{y}) = -D\{[(2 - \nu) + (\nu - 1)\sin^2\gamma]w_{,\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \sin\gamma - 3w_{,\bar{x}\bar{y}\bar{y}} \sin\gamma + [(2 - \nu) + (1 + \nu)\sin^2\gamma]w_{,\bar{x}\bar{x}\bar{y}} + w_{,\bar{y}\bar{y}\bar{y}}\} \sec^3\gamma \quad (\text{III}, 16)$$

En placas romboidales simplemente apoyadas interesan las reacciones de esquina. Se usarán aquí las conclusiones contenidas en [Ref. 4]. En dicho estudio se demostró que en una esquina cuyos lados se cortan según ángulo de medida β en una placa sobre apoyos simples en su contorno, la reacción de esquina está dada por:

$$R_{12} = (1 - \cos 2\beta) M_{nt}^{11} + [\frac{1}{2}(M_x - M_y)\cos 2\alpha - M_{xy} \sin 2\alpha] \sin 2\beta \quad (\text{III}, 17)$$

donde:

$$M_{nt}^{11} = \frac{1}{2} (M_x - M_y) \sin 2\alpha + M_{xy} \cos 2\alpha \quad (\text{III}, 18)$$

En estas fórmulas, los lados del borde que se cortan en la esquina considerada se denotan por los números 1 y 2; n, t denotan la dirección normal y tangencial, respectivamente, en el lado 1; α es la medida del ángulo que n forma con el eje X; los ejes X, Y se suponen ortogonales. Es claro que los momentos M_x, M_y, M_{xy} se toman con sus valores en la esquina antedicha.

Para expresar la reacción de esquina R_{12} en coordenadas oblicuas, basta introducir en (III, 17) y (III, 18) los valores de M_x, M_y, M_{xy} en ordenadas oblicuas $\bar{x}, \bar{y}$, dados por Ecs. (II, 5), (II, 6) y (II, 7).

De la Figura 2 se concluye fácilmente que a lo largo de los lados AB, BC, CD, DA los valores que toma α son, respectivamente: $\pi/2, \gamma, 3\pi/2, \pi + \gamma$, midiéndolos positivamente en sentido antihorario, desde la dirección positiva X hasta la dirección positiva N. Tales valores deben usarse en (III, 17) y (III, 18).

Como es sabido y quedó demostrado en [Ref. 3], no se generan reacciones de esquina en placas con borde empotrado.

IV. ANÁLISIS APROXIMADO MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS

En las secciones II y III se han dado los fundamentos del análisis de placas oblicuas, en coordenadas oblicuas, dentro del marco clásico de Kirchhoff-Love. En la presente sección se aplican esos fundamentos al análisis numérico aproximado de tales placas, usando diferencias finitas centrales. Para este efecto, se discretiza el dominio plano $\mathcal{R}$ ocupado por la placa romboidal mediante una malla constituida por segmentos rectos paralelos a sus lados y equidistantes en cada dirección. De esta manera,

los intervalos $[0, \bar{a}]$; $(0, \bar{b}]$ quedan respectivamente subdivididos en $\bar{M}$ y $\bar{N}$ subintervalos (Fig. 3):

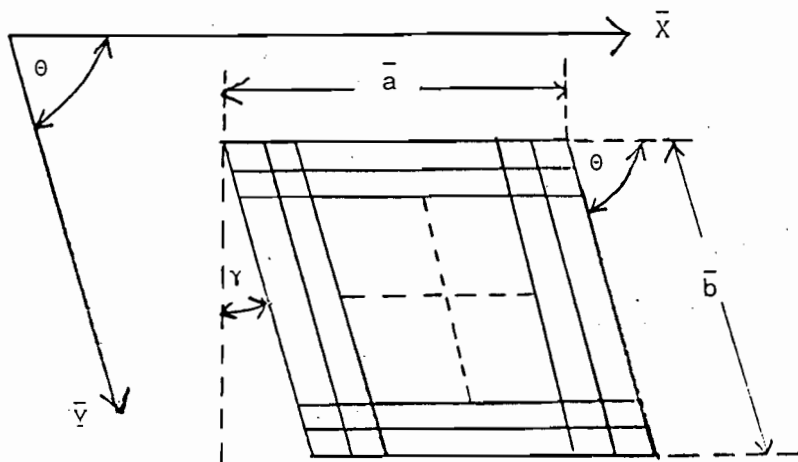


Fig. 3. Malla constituida por segmentos rectos paralelos a sus lados y equidistantes.

Los puntos de división de $[0, \bar{a}]$, $[0, \bar{b}]$ son, respectivamente:

$$0 = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 \dots \dots \dots < \bar{x}_{\bar{M}-1} < \bar{x}_{\bar{M}} = \bar{a} \quad (\text{IV}, 1)$$

$$0 = \bar{y}_0 < \bar{y}_1 < \bar{y}_2 \dots \dots \dots < \bar{y}_{\bar{N}-1} < \bar{y}_{\bar{N}} = \bar{b} \quad (\text{IV}, 2)$$

$$\text{con } \Delta \bar{x} = \bar{x}_{m+1} - \bar{x}_m = \frac{\bar{a}}{\bar{M}} : m = 0, 1, \dots, \bar{M} - 1 \quad (\text{IV}, 3)$$

$$\Delta \bar{y} = \bar{y}_{n+1} - \bar{y}_n = \frac{\bar{b}}{\bar{N}} ; n = 0, 1, \dots, \bar{N} - 1 \quad (\text{IV}, 4)$$

$$\text{Sean: } w_{m,n} = w(\bar{x}_m, \bar{y}_n) \quad (\text{IV } 5)$$

$$\eta = \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{x}} = \frac{\bar{b}/\bar{N}}{\bar{a}/\bar{M}} = \frac{\bar{M}}{\bar{N}\bar{R}}, \text{ con } R = \bar{a}/\bar{b} \quad (\text{IV } 6)$$

Adviértase que: $\theta = \pi/2 - \gamma$

Las siguientes son algunas de las expresiones de las derivadas parciales de w en diferencias finitas centrales en un punto cualquiera $(m,n) \equiv (\bar{x}_m, \bar{y}_n)$ de la malla:

$$w_{,\bar{x}} = \frac{w_{m+1,n} - w_{m-1,n}}{2 \Delta \bar{x}}; \quad w_{,\bar{y}} = \frac{w_{m,n+1} - w_{m,n-1}}{2 \Delta \bar{y}}$$

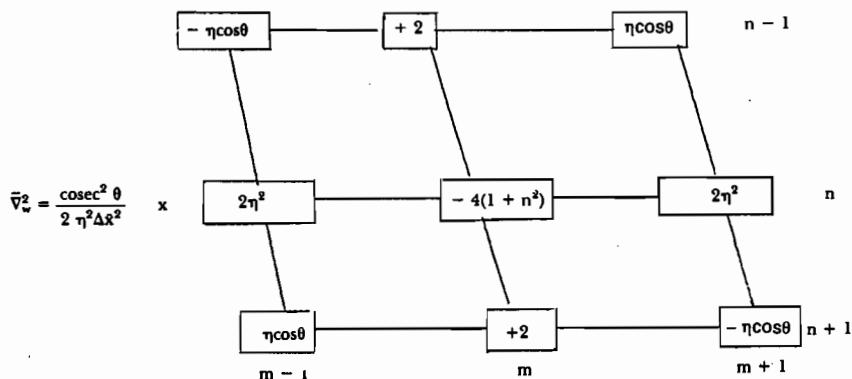
$$w_{,\bar{x}\bar{y}} = \frac{1}{4 \Delta \bar{x} \Delta \bar{y}} (w_{m+1,n+1} - w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1}) \quad (\text{IV},8)$$

$$w_{,\bar{x}\bar{x}} = \frac{1}{(\Delta \bar{x})^2} (w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n})$$

$$w_{,\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{(\Delta \bar{y})^2} (w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1})$$

etc.

Las fórmulas (IV,8) y las relativas a derivadas terceras y cuartas, que por economía de espacio no se reproducirán, son muy familiares en cálculo numérico. En el presente trabajo interesan los resultados que se obtienen al introducirlas en las fórmulas básicas de secciones II y III, que dan los valores de $\bar{\nabla}^2 w$, $\bar{\nabla}^4 w$, momentos, reacciones repartidas de borde y esquina, etc. Estos resultados expresan los valores que las cantidades mencionadas tienen en función de diferencias finitas centrales, en coordenadas oblicuas. Las fórmulas respectivas se visualizan fácilmente mediante esquemas llamados "moléculas gráficas" que han sido confeccionadas para el presente trabajo, excepto la relativa a $\bar{\nabla}^2$, tomada de [Ref. 1]. Tales esquemas se presentan a continuación.

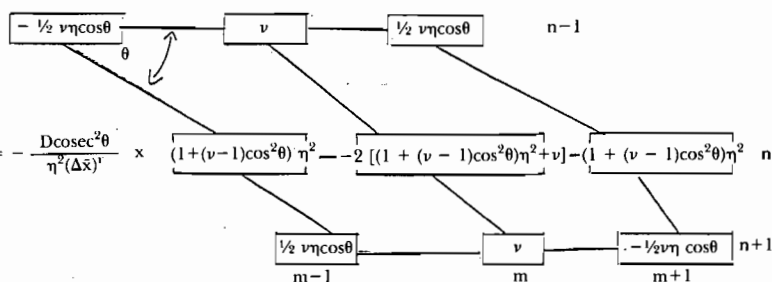


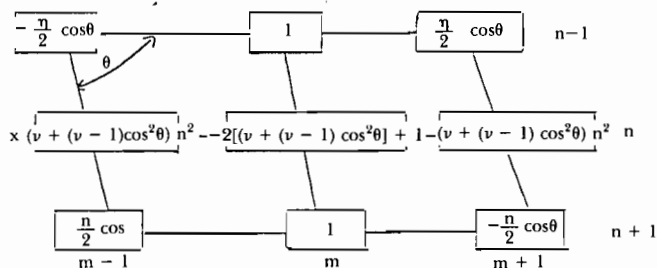
Recorriendo de izquierda a derecha y desde arriba hacia abajo las filas horizontales del esquema, la fórmula que él reproduce es:

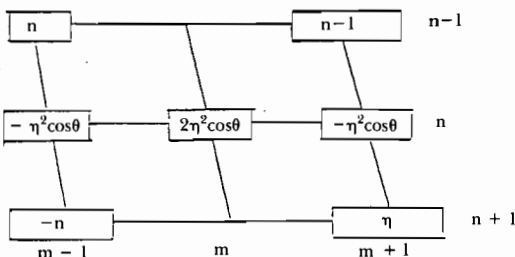
$$\bar{\nabla}^2 w = \frac{\operatorname{cosec}^2 \theta}{2 \eta^2 (\Delta \bar{x})^2} \cdot \left\{ -(\eta \cos \theta) w_{m-1, n-1} + 2 w_{m, n-1} + (\eta \cos \theta) w_{m+1, n-1} \right. \\ \left. + 2 \eta^2 w_{m-1, n} - 4(1 + \eta^2) w_{m, n} + 2 \eta^2 w_{m+1, n} \right. \\ \left. + (\eta \cos \theta) w_{m-1, n+1} + 2 w_{m, n+1} - (\eta \cos \theta) w_{m+1, n+1} \right\}$$

que salvo agrupaciones obvias de términos mediante factores comunes, es la expresión obtenida al introducir en (II, 3) las segundas derivadas contenidas en (IV, 8), usando además (IV, 6) y (IV, 7).

En forma análoga las moléculas siguientes representan gráficamente fórmulas pertinentes desarrolladas en secciones II y III.

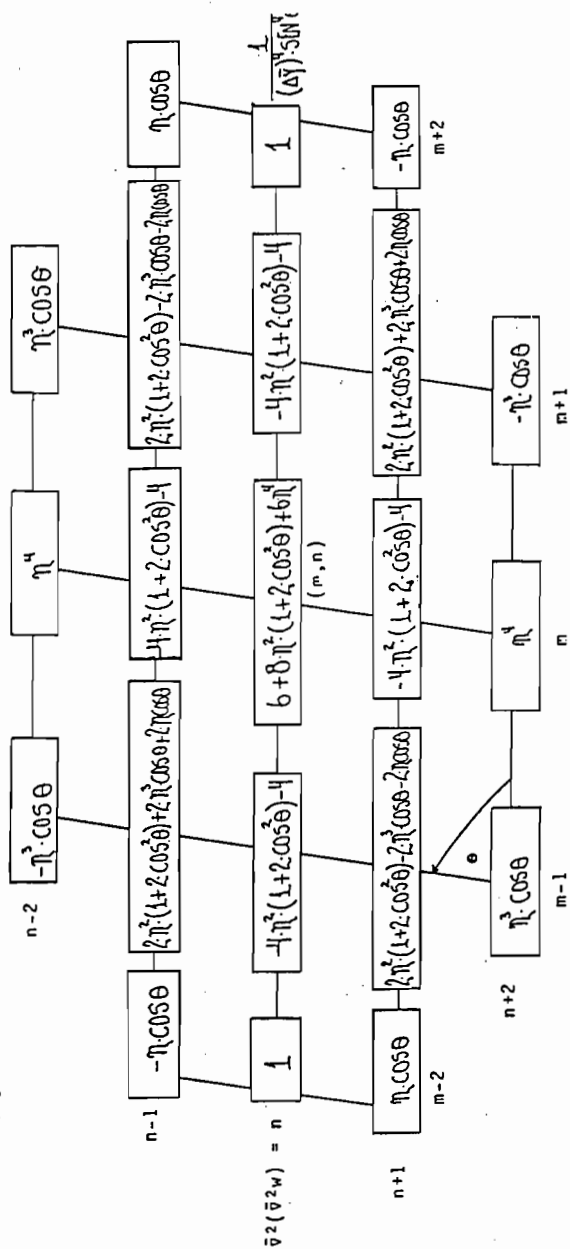
$$M_x(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{D \operatorname{cosec}^2 \theta}{\eta^2 (\Delta \bar{x})^2} \times$$


$$M_y(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{D \operatorname{cosec}^2 \theta}{\eta^2 (\Delta \bar{x})^2} \times$$


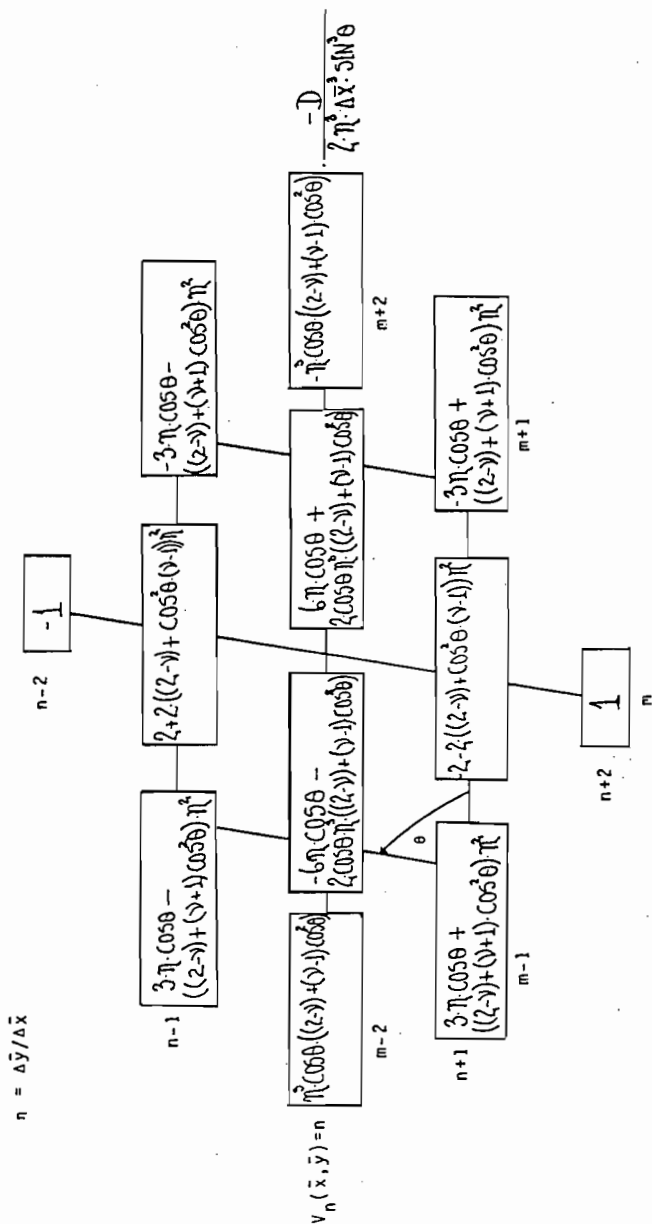
$$M_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{(1 - \nu) D \operatorname{cosec} \theta}{\eta^2 (\Delta \bar{x})^2} \times$$


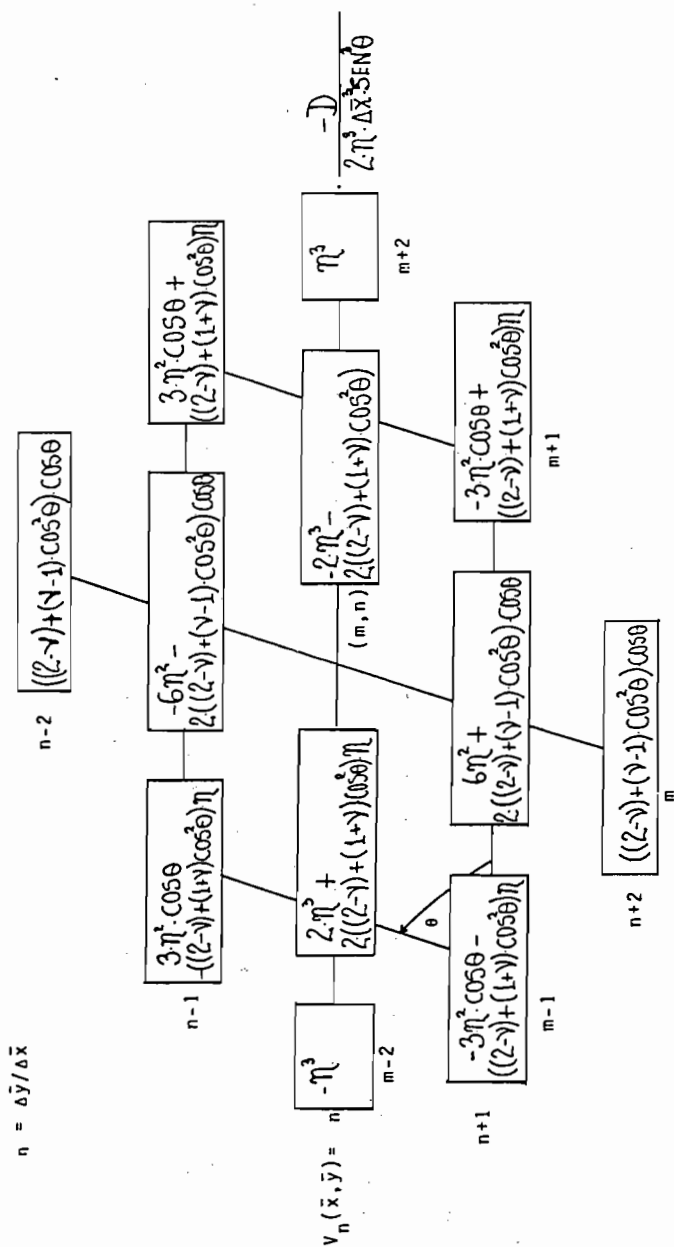
Moléculas gráficas para $M_x(\bar{x}, \bar{y})$, $M_y(\bar{x}, \bar{y})$, $M_{xy}(\bar{x}, \bar{y})$

$$n = \Delta \bar{x} / \Delta \bar{y}$$



Molécula gráfica asociada a $\bar{V}^2(\bar{V}^2 w)$

Molécula gráfica, asociada a $V_n(\bar{x}, \bar{y})$ AB, CD



Molécula gráfica, asociada a $V_n(\bar{x}, \bar{y})$ BC, DA

Las moléculas gráficas presentadas son de suma utilidad en la formulación numérica del método de diferencias finitas, como se explica en sección VI.

V. CONDICIONES DE BORDE

Recuérdese que $\partial\mathcal{R}$ es el borde de la placa, que en el presente estudio se considera empotrado o simplemente apoyado. En una u otra condición de apoyo, si (m,n) es nodo de la malla y $(m,n) \in \partial\mathcal{R}$, debe ser $w_{m,n} = 0$. Por otra parte, es bien sabido que en empotramiento como en simple apoyo, la condición $w_{,n} = 0$ en un caso y $w_{,nn} = 0$ en el otro (N es dirección normal al contorno) debe cumplirse en $(m,n) \in \partial\mathcal{R}$; esto exige, al expresar estas derivadas parciales en diferencias finitas centrales y tomando (m,n) como punto pivote, la existencia de dos puntos nodales de la malla vecinos a (m,n) , simétricamente situados con respecto a él en la dirección N , uno interno a la placa y el otro ficticio (externo), con flechas w de igual magnitud; pero en borde empotrado ambas flechas tienen igual signo, y signos opuestos en el caso de simple apoyo. Debe existir una relación precisa entre el ángulo $\theta = \pi/2 - \gamma$ y la modulación $\eta = \Delta\bar{y}/\Delta\bar{x}$ de la malla para que semejantes puntos nodales sean posibles. Dicha relación surge de Fig. 4:

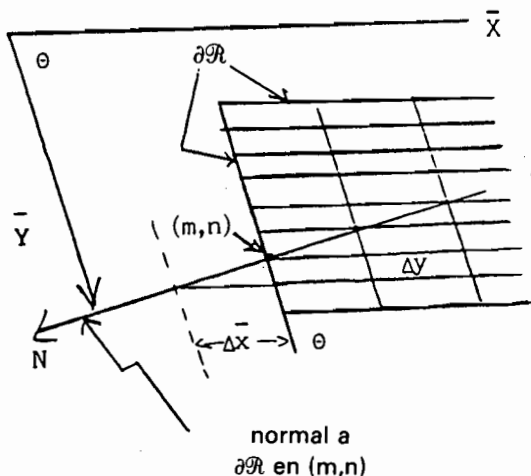


Fig. 4. Relación entre el ángulo θ y la modulación η .

$$\Delta\bar{y} = \Delta\bar{x} \cos\theta$$

(V,1)

$$\therefore \eta = \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{x}} = \cos \theta \quad (V,2)$$

$$\therefore \frac{\bar{b}/\bar{N}}{\bar{a}/\bar{M}} = \cos \theta \text{ ver (IV, 3), (IV, 4)}$$

$$\therefore \bar{N} = \frac{\bar{M}\bar{b}}{\bar{a} \cos \theta} \quad (V,3)$$

$\bar{M}$, $\bar{N}$ están definidos en (IV, 1) y (IV, 2)

Entonces, elegido $\bar{M}$, para $\bar{N}$ se toma el entero más próximo al 2º miembro de (V, 3). Es preciso advertir, sin embargo, que cumplidas las relaciones que llevan a (V, 3) sobre dos lados paralelos de la placa, no se satisfacen necesariamente relaciones análogas en los otros dos lados. En otras palabras, cumplido (V, 1) sobre lados //s al eje $\bar{Y}$, como en Fig. 4, tómesese punto de borde (m, n) sobre un lado // al eje $\bar{X}$ y trácese en este punto la normal a $\partial \mathcal{R}$ (Fig. 5); considérese también otro punto (m-1, n) a la distancia $\Delta \bar{x}$ de (m, n) sobre el contorno; debería idealmente suceder que la paralela por (m-1, n) al eje $\bar{Y}$ corte a la normal en (m, n) sobre un nodo de la malla. Para que esto ocurra, como se deduce de Fig. 5, debe existir entero λ tal que $\Delta \bar{x} = \lambda \Delta \bar{y} \cos \theta = \lambda \Delta \bar{x} \cos^2 \theta$, en virtud de (V, 1). En consecuencia:

$$\lambda = \sec^2 \theta \quad (V,4)$$

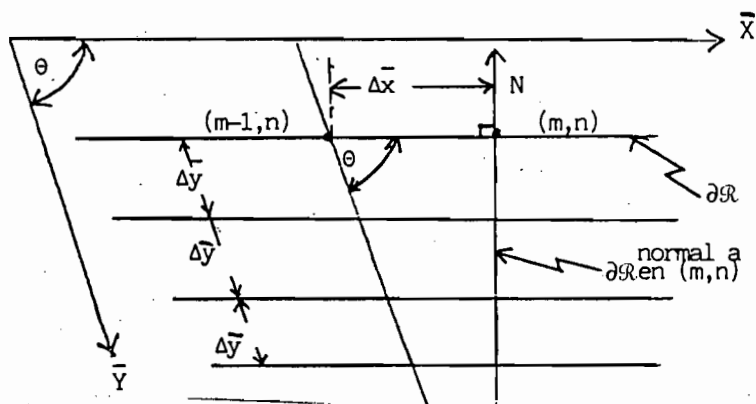


Fig. 5. Malla ideal para la resolución numérica de la placa por diferencias finitas.

En particular, $\lambda = 2$ y $\lambda = 4$ cuando $\theta = \pi/4$ y $\theta = \pi/3$, respectivamente. Se ve con claridad de (V,4) que sólo algunos valores de θ conducen a valor

entero de λ . Una malla oblicua que satisfaga (V,4) con λ entero puede calificarse de "ideal" en cuanto a formulación de las condiciones de contorno por diferencias finitas centrales en una placa romboidal.

Cabe recalcar que formuladas las condiciones de contorno en dos lados //s de la placa oblicua mediante nodos de la malla vecinos al borde, interiores o ficticios, los nodos análogos requeridos en los otros dos lados pueden estar más o menos alejados de $\partial\mathcal{R}$ que los anteriores, conclusión que resulta evidente del análisis precedente. El efecto negativo que esto pueda tener en la precisión de un cálculo numérico concreto se aminora tomando malla suficientemente fina.

En la práctica, si θ es dado, se elige $\bar{M}$ y calculan $\Delta\bar{x}$, $\Delta\bar{y}$ por (IV, 3) y (V, 1), respectivamente. Al aplicar (V, 4) y si λ resulta entero, la malla es "ideal" en el sentido ya definido, y la resolución numérica de la placa por diferencias finitas centrales no ofrece especiales dificultades. Si $\lambda = \sec^2\theta$ no es entero, la determinación de $\Delta\bar{y}$ mediante (V, 1) garantiza la formulación correcta de las condiciones de contorno en los lados paralelos al eje $\bar{Y}$ mediante puntos nodales de la malla. Pero si λ no es entero, se puede aproximar al entero más cercano y escribir las condiciones de borde en lados //s al eje $\bar{X}$ con puntos nodales de la malla, resultantes de dicho valor entero de λ . Obviamente, el error así generado se aminora al refinar la malla, es decir, aumentando el valor de $\bar{N}$.

Si θ está a elección del calculista en el diseño de alguna placa oblicua, una malla "ideal" de trabajo se obtiene eligiendo λ entero, determinándose θ mediante (V,4), etc.

VI. FORMULACIÓN NUMÉRICA DEL MÉTODO

El sistema coordenado oblicuo $\bar{X}\bar{Y}$ aquí adoptado tiene su origen en el centro de la placa, y ejes paralelos a sus lados. La malla se elige en la forma explicada en sección V, "ideal" dentro de lo posible.

Las incógnitas del problema son las flechas $w_{m,n}$ de la superficie media en los nodos internos (m,n) de la malla; en el presente estudio, $w_{m,n} = 0$ si $(m,n) \in \partial\mathcal{R}$, ya que son objetos de análisis sólo placas empotradas o simplemente apoyadas en todo el contorno $\partial\mathcal{R}$. Entonces, de acuerdo con (IV, 1) y (IV, 2), el número de incógnitas en $(\bar{M} - 1) \cdot (\bar{N} - 1)$, necesitándose, el mismo número de ecuaciones en la determinación de dichas incógnitas. Para estudiar cómo se obtienen tales ecuaciones es adecuado separar los casos de borde empotrado y apoyo simple.

Borde empotrado: en cada nodo interior (m,n) se escribe la expresión discretizada $\bar{\nabla}^4 w_{m,n} = q_z(m,n)/D$, utilizando la molécula gráfica de $\bar{\nabla}^4$

exhibida en sección IV; la expresión resultante es entonces una ecuación de primer grado con respecto a $w_{m,n}$ y flechas de nodos vecinos (m,n) . Aplicando este proceso a todos los nodos internos, se obtienen las $(M-1) \cdot (N-1)$ ecuaciones necesarias; dado el tamaño de la molécula de ∇^4 , cuando opera en nodos vecinos al borde ∂R es menester considerar nodos ficticios externos, en la forma explicada en sección V al tratar las condiciones de borde empotrado en diferencias finitas.

Si la carga no es repartida sino concentrada y vertical P , la malla se elige de manera que P actúe en uno de sus nodos, o muy cercana a uno de ellos, en cuya vecindad se considera uniformemente repartida en la pequeña área $\Delta \bar{x} \Delta \bar{y} \text{sen } \theta = (\Delta \bar{x})^2 \cos \theta \text{sen } \theta$, en virtud de $(V, 1)$, que es el área de las celdas de la malla. Para carga concentrada se tiene entonces $\bar{\nabla}^4 w = 0$ en todos los nodos internos, excepto en aquél en que se aplica P , donde $\bar{\nabla}^4 w_{m,n} = 2P/(\Delta \bar{x})^2 \text{sen } 2\theta$. De nuevo se tienen, pues, las $(M-1) \cdot (N-1)$ ecuaciones necesarias, conclusión independiente del nodo en que se aplique P . Es claro que si la carga actuante, repartida o concentrada, es simétrica con respecto al centro, nodos simétricos con respecto a dicho punto tienen la misma flecha w , lo que disminuye apreciablemente el tamaño del sistema de ecuaciones resultantes, pues basta considerar un cuadrante de la placa.

Borde sobre apoyo simple: en placas romboidales simplemente apoyadas es aplicable el método de Marcus de analogía de membrana [Ref. 3]; en verdad permite una muy eficiente solución numérica por diferencias finitas del problema de flexión de placas oblicuas. De acuerdo con la teoría básica explicada al final de sección II, el método consiste en integrar numéricamente y en forma sucesiva, las ecuaciones diferenciales parciales de 2º orden (II, 11), (II, 12), mediante diferencias finitas centrales, bajo las condiciones de contorno $S_{m,n}(\bar{x}_m, \bar{y}_n) = 0$ para (II, 11) y $w_{m,n} = 0$ para (II, 12), donde (m,n) es nodo de la malla perteneciente a ∂R . Debe, en consecuencia, escribirse en cada nodo interno (m,n) de la malla la ecuación $\bar{\nabla}^2 S_{m,n} = -qz(m,n)$, utilizando esta vez la molécula gráfica de $\bar{\nabla}^2$ suministrada en sección IV. Así se llega a un sistema lineal de $(M-1) \cdot (N-1)$ ecuaciones algebraicas en las $(M-1) \cdot (N-1)$ incógnitas $S_{m,n}$; calculados los $S_{m,n}$, sus valores se llevan a $\bar{\nabla}^2 w_{m,n} = -S_{m,n}/D$, obteniéndose de nuevo un sistema lineal de $(M-1) \cdot (N-1)$ ecuaciones algebraicas en las incógnitas $w_{m,n}$. Cabe recalcar que el procedimiento de Marcus no exige consideración de nodos físicos externos al aplicar el operador $\bar{\nabla}^2$ discretizado en nodos internos vecinos al borde, ya que las expresiones de las 2ªs derivadas en diferencias finitas centrales no comprometen nodos más allá del borde ∂R .

Los dos sistemas de ecuaciones a que conduce el método de Marcus, ya de suyo simples, disminuyen también de tamaño cuando las cargas son simétricas con respecto al origen, ya que como en el caso empotrado, basta analizar sólo un cuadrante de la placa en semejante situación.

Resumiendo, cualquiera sea el modo de apoyo de la placa en su contorno, una vez resueltos los sistemas de ecuaciones pertinentes, los valores $w_{m,n}$ calculados se llevan a las moléculas gráficas que dan $M_x(\bar{x}, \bar{y})$, $M_y(\bar{x}, \bar{y})$, $M_{xy}(\bar{x}, \bar{y})$ y las reacciones repartidas de borde $V_n(\bar{x}, \bar{y})$, realizado lo cual los momentos máximos $M_1(\bar{x}, \bar{y})$ y las reacciones de esquina R_{12} se determinan mediante las fórmulas (II, 8) y (III, 17), respectivamente.

VII. RESULTADOS NUMÉRICOS; PROGRAMAS COMPUTACIONALES

Los procesos numéricos descritos en sección VI han sugerido la confección de dos programas computacionales, uno para placas oblicuas empotradas y el otro para el caso de borde simplemente apoyado, los que no se incluyen en la presente exposición en obsequio del ahorro de espacio; están a disposición de cualquier usuario eventual. Estos programas permiten el cálculo de las cantidades mencionadas al final de sección VI y mediante ellos se han confeccionado las tablas y gráficos presentados a continuación, que permiten apreciar la variación de las cantidades adimensionales w_q , w_p , m_x , m_y , m_1 , m_{xy} , r_{ij} definidas por:

$$w_c = \frac{w_q}{100} \frac{q \bar{a}^4}{D} \quad (w_c = \text{flecha en el centro}) \text{ con carga repartida uniforme } q.$$

$$w_c = \frac{w_p}{100} \frac{P \bar{a}^2}{D} \quad (\text{id. con carga concentrada } P \text{ en el centro})$$

$$M_x = m_x \cdot q \cdot \bar{a}^2$$

$$M_y = m_y \cdot q \cdot \bar{a}^2$$

$$M_1 = m_1 \cdot q \bar{a}^2 \quad (\text{momento central máximo})$$

$$M_{xy} = m_{xy} \cdot q \cdot \bar{a}^2$$

$$R_{ij} = r_{ij} \cdot q \cdot \bar{a}^2 \quad (\text{reacción de esquina})$$

Además: $R = \bar{a}/\bar{b}$ (ver IV, 6)

Resultados numéricos en placas simplemente apoyadas ($R=1$, $\nu = 0,30$)

1. Carga uniformemente distribuida.

En el centro;

$$w_c = w_q \cdot 10^{-2} \cdot q \cdot \frac{(\bar{a})^4}{D}$$

$$M_x = m_x \cdot q \cdot \bar{a}^2 ; M_y = m_y \cdot q \cdot \bar{a}^2$$

TABLA 1

θ	w_q presente	ref. [5]	m_x presente	ref. [5]	m_y presente	ref. [5]	Error $\epsilon_w\%$
90°	0,406	0,406	0,0478	0,0479	0,0478	0,0479	0
75°	0,361	0,363	0,0440	0,0446	0,0457	0,0460	1
60°	0,254	0,255	0,0352	0,0354	0,0401	0,0400	1
45°	0,126	0,127	0,0220	0,0224	0,0306	0,0300	1
30°	0,0359	0,0353	0,0097	0,0134	0,0183	0,0170	2

2. Carga puntual central.

$$w_c = w_q \cdot 10^{-2} \cdot q \cdot \frac{(\bar{a})^2}{D}$$

TABLA 2

θ	w_p presente	ref. [5]	Error $\epsilon_p\%$
90°	1,172	1,159	1
75°	1,083	1,091	1
60°	0,906	0,890	2
45°	0,581	0,612	5

Resultados numéricos en placas empotradas.

1. Carga uniformemente distribuida.

Deformación central;

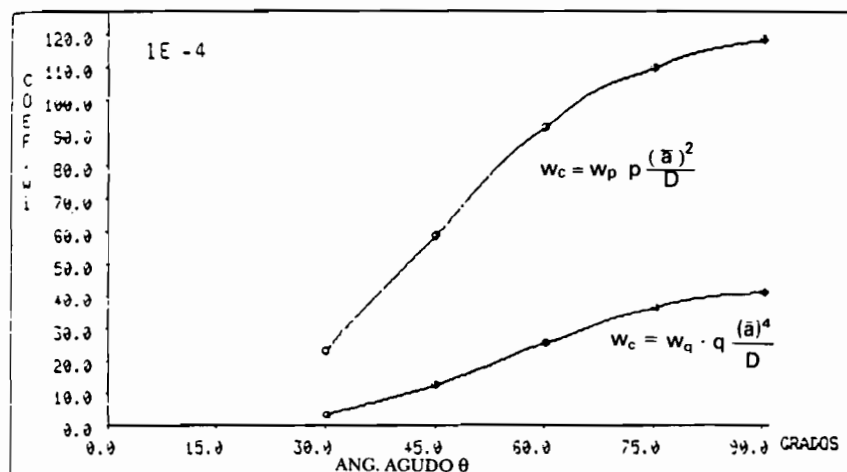
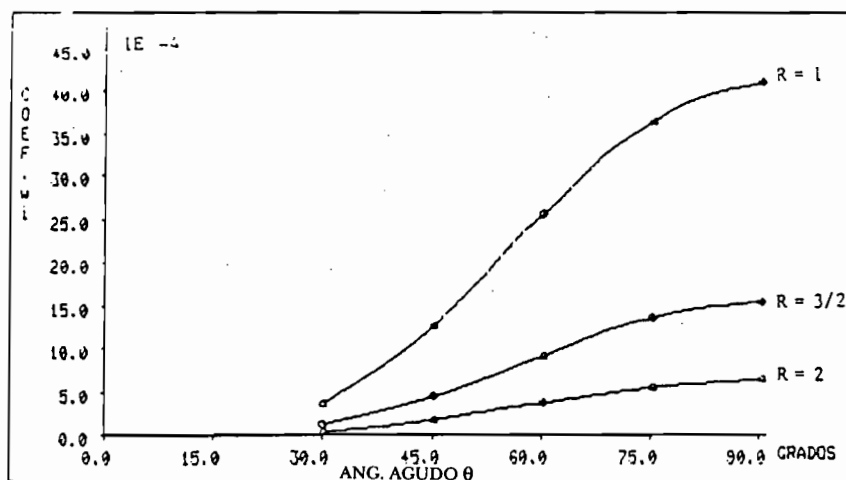
$$w_c = w_q \cdot 10^{-2} \cdot q \cdot \frac{(\bar{a})^2}{D}$$

TABLA 3. R = 1

θ	w_q presente	ref. [6]	Error $\epsilon_w\%$
75°	1,854	1,797	3
60°	1,251	1,219	3
45°	0,584	0,549	6

TABLA 4. $R = 2/3$

θ	w_q presente	ref. [6]	Error $\epsilon_w\%$
75°	3,254	3,123	4
60°	2,157	2,096	3
45°	0,985	0,951	3

Gráfico 1. Comparación de coeficientes de deflexión para placa simplemente apoyada. Carga puntual central y uniformemente distribuida. $R = 1$.Gráfico 2. Variación de coeficientes w_q para placas simplemente apoyadas.

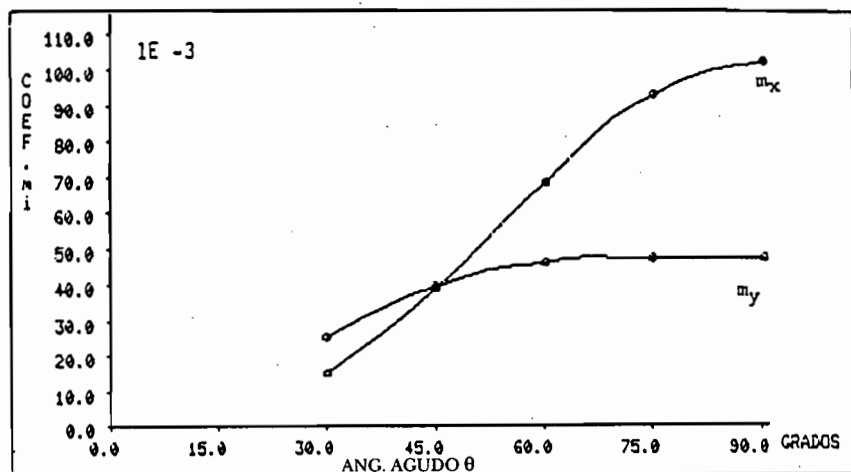


Gráfico 3. Variación de coeficientes m_x , m_y , en el centro de placas simplemente apoyadas bajo carga uniformemente distribuida. $R = 1/2$.

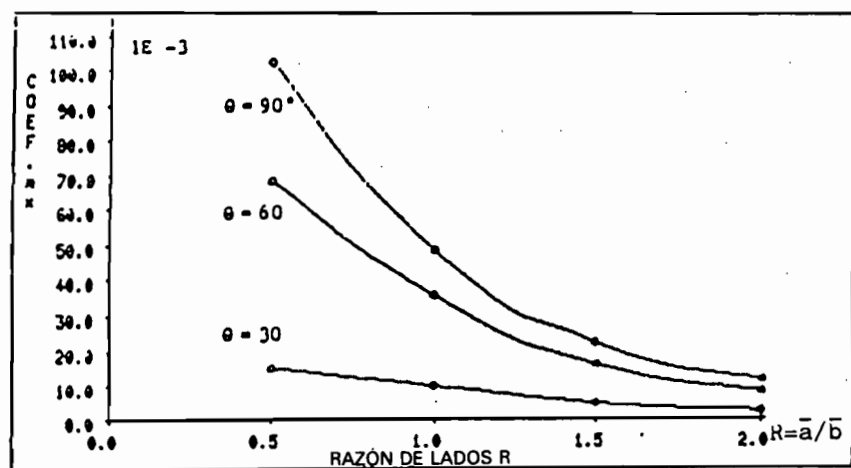


Gráfico 4. Variación de coeficiente m_x en el centro de una placa simplemente apoyada, bajo carga uniformemente distribuida. $\nu = 0,30$.

Los gráficos 1, 2, 3, 7, 8 y 9, en que la abscisa es el valor θ° del ángulo agudo de la placa, contienen curvas para valores distintos del parámetro $R = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$; $\bar{a} \leq \bar{b}$; en cambio, en los gráficos 4, 5 y 6 la abscisa es R y el parámetro es 0° .

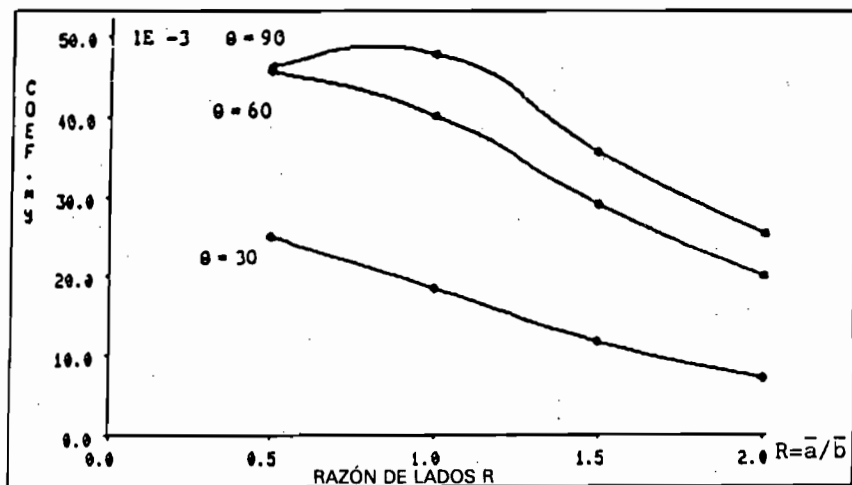


Gráfico 5. Variación de coeficiente m_y en el centro de la placa simplemente apoyada, bajo carga uniformemente distribuida. $\nu = 0,30$.

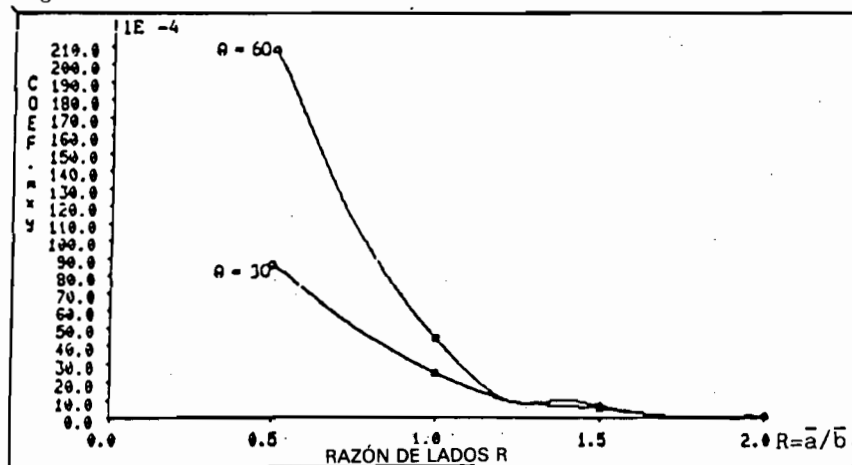


Gráfico 6. Variación de coeficiente m_{xy} en el centro de la placa simplemente apoyada, bajo carga uniformemente distribuida. $\nu = 0,30$.

Todas las tablas y gráficos se han construido para $\nu = 0,3$.

VIII. CONCLUSIONES Y EJEMPLO

Lo que tablas y gráficos expresan puede resumirse en las siguientes conclusiones:

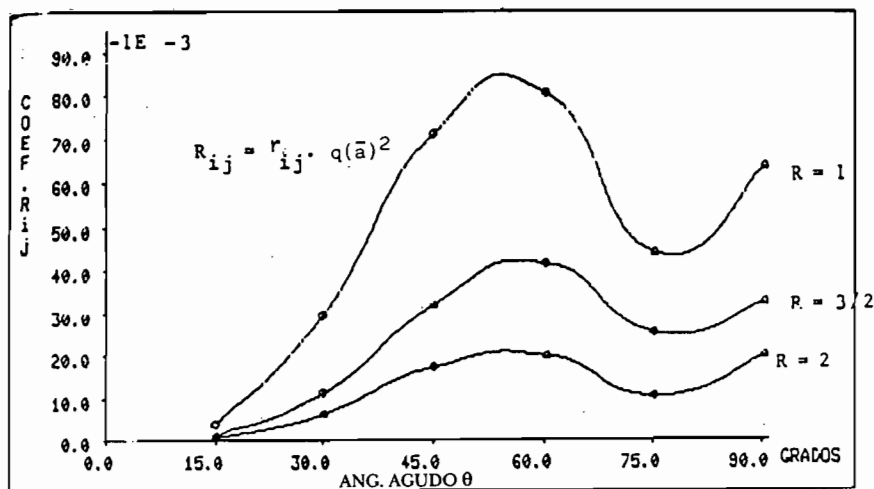


Gráfico 7. Coeficiente r_{ij} , para la reacción de esquina en placas simplemente apoyadas bajo carga uniformemente distribuida. $\nu = 0,30$.

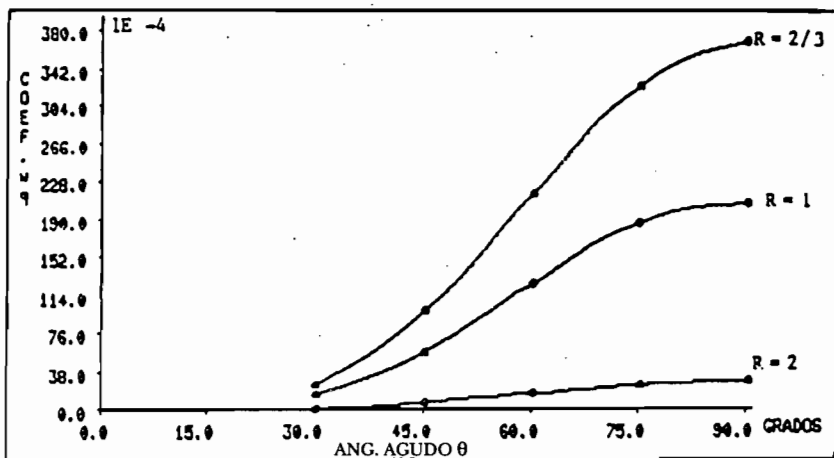


Gráfico 8. Variación de coeficiente w_q , para placas empotradas, bajo carga uniformemente distribuida.

1. La deflexión central w_c de una placa oblicua disminuye en la medida que aumenta su oblicuidad, a causa del aumento de rigidez que se produce en las esquinas obtusas al crecer γ (ver gráficos 1 y 2);
2. Para un ángulo de oblicuidad γ dado, w_c se incrementa cuando decrece la razón $R = \bar{a}/\bar{b}$ de lados y viceversa (íd. 2).

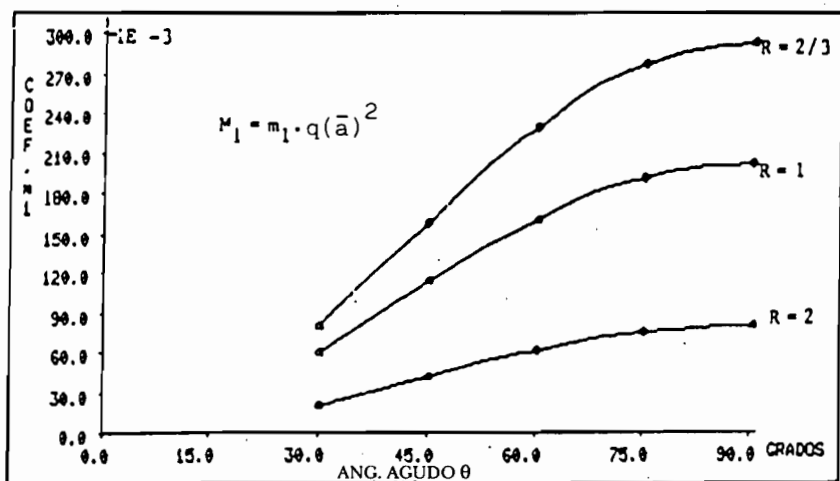


Gráfico 9. Variación del coef. de máximo momento principal en el centro de placas empotradas, uniformemente cargadas. $\nu = 0,30$.

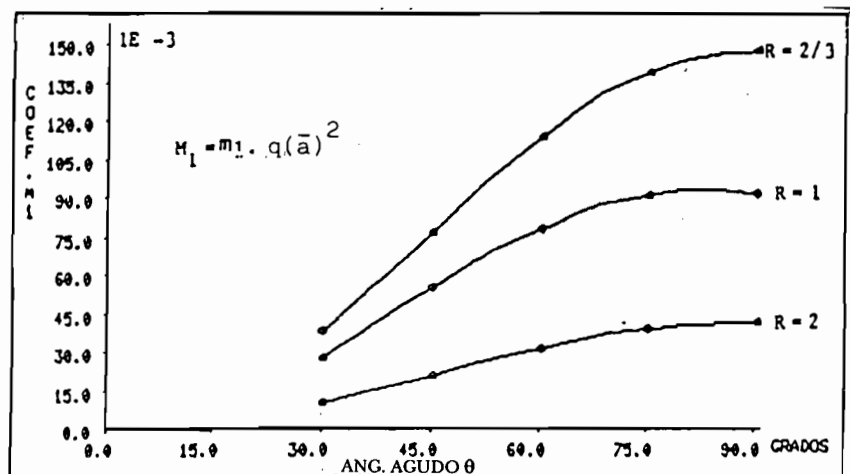


Gráfico 10. Variación del coef. de máximo momento principal en el apoyo de placas empotradas, uniformemente cargadas. $\nu = 0,30$.

- En el centro de la placa oblicua los momentos de flexión no son principales (el momento de torsión no es nulo allí) contrariamente a lo que sucede en una placa rectangular; los momentos de torsión en el centro crecen con la oblicuidad de la placa, mientras que los momentos flectores disminuyen (ver gráficos 4, 5, 6);

4. Para distintas razones R de lados y en la medida que la oblicuidad de la placa crece, las curvas de coeficientes m_x , m_y de momentos flectores tienden a cortarse si el ángulo de oblicuidad es cercano a 45° , más allá del cual el coeficiente de momento flector en la dirección del lado más corto deja de ser el mayor (ver gráfico 8);
5. En el caso de placas oblicuas empotradas el momento principal mayor se produce en el borde sobre el lado más largo, desplazándose hacia la esquina obtusa cuando aumenta el ángulo de oblicuidad γ (íd. 8);
6. La reacción concentrada de esquina, inherente a las placas simplemente apoyadas, tiende a levantar las cuatro esquinas para ángulos de oblicuidad, situados entre 0° y 45° ; el valor máximo de esta reacción se da para $30^\circ < \gamma < 45^\circ$ (ver gráfico 7);
7. En placas muy oblicuas ($50^\circ < \gamma < 75^\circ$), la reacción concentrada de esquina disminuye en las esquinas agudas debido a que las esquinas obtusas toman más carga merced a su mayor rigidez (ver gráfico 7).

La teoría y programas computacionales desarrollados en la presente investigación se han aplicado en la verificación de una losa oblicua real; se trata del puente San Bernardo en la 8ª Región, que esencialmente consiste en una losa oblicua simplemente apoyada, con $\gamma = 45^\circ$, $\bar{a} = 2,2$ m, $\bar{b} = 15$ m y espesor $h = 20$ cm.

Aplicando la normativa vigente para este tipo de construcciones y con arreglo a la teoría y resultados computacionales ya expuestos en este trabajo, se llega a un espesor necesario de 22 cm, pero con armadura más económica que en la obra real. Estas diferencias pueden explicarse así: (i) el momento torsional que se genera en losas oblicuas, que tanto afecta a las reacciones de esquina como a la orientación y valor de los momentos principales, debe ser considerado en el diseño, ya sea aumentando el espesor, o las armaduras, según convenga por razones económicas o de otra índole; (ii) la posición con respecto al sistema coordenado ortogonal XY (ver Fig. 1), de la armadura principal en tracción, depende del ángulo de oblicuidad γ de la losa (ver gráfico 3), lo que debe ser considerado, en razón de la importancia de esta armadura.

REFERENCIAS

1. SZILARD, R.. *Theory and Analysis of Plates, Classical and Numerical Methods*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, pp. 28-29, pp. 159-184, pp. 361-365.

2. TIMOSHENKO, S.P. and S. WOINOWSKY-KRIEGER. *Theory of Plates and Shells*. Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1959, pp. 79-89, pp. 318-320, pp. 357-359.
3. PINO, E. *Sobre condiciones de contorno en placas*. XXI Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural, Anais. Vol. 11, Rio de Janeiro, Brasil, Maio 1981.
4. PINO, E. *Una nota sobre reacción de esquina en la teoría clásica de placas elásticas delgadas*. Colloquia 83. Vol. 11, Santiago de Chile, 1983.
5. CHEUNG, Y.K. *Bending of Skew Plates by Spline-Finite-Strip Method*. Computer & Structures. G. Britain. N° 22: 31-38. April 1986.
6. KENNEDY, J.B. *Linear and Nonlinear Analysis of Skewed Plates*. Journal of Applied Mechanics, pp. 271-277. June 67.