Sobre los Polígonos Regulares, Convexos i Estrellados

(*Continuacion*)

b) Sea $AB = {}^{(2)}l_5$ (fig. 24).

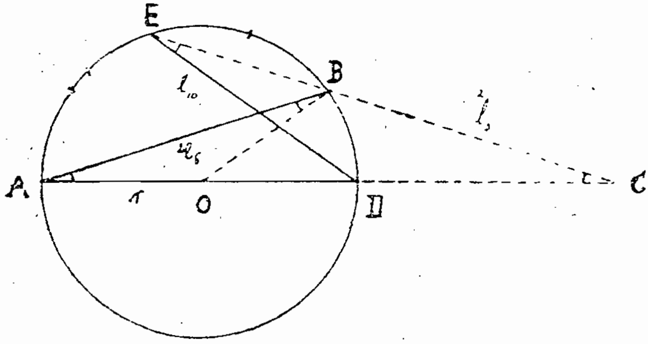

Fig. 24

Estando dividida la circunferencia en 10 partes iguales, tendremos:

$$AB = BC = {}^{(2)}l_5$$

i

$$DE = DC = {}^{(3)}l_{10},$$

ademas:

$$\underline{\Delta\ ABO \backsim ACB}$$

luego

$$\frac{r}{{}^{(2)}l_5} = \frac{{}^{(2)}l_5}{2r + {}^{(3)}l_{10}}\ .$$

o bien

$${}^{(2)}l_5^2 = 2r^2 + r\ .\ {}^{(3)}l_{10}$$

pero

$$\underline{r^2 + r\,{}^{(3)}l_{10} = {}^{(3)}l_{10}^2} \quad \left\{\text{seg. rel. (3)}\right\}$$

i reemplazando, queda:

$${}^{(2)}l_5^2 = r^2 + {}^{(3)}l_{10}^2$$

Valor de ${}^{(2)}l_5$ en funcion de r

Reemplazando el valor ${}^{(3)}l_{10}$ en la proporcion, tendremos:

$${}^{(2)}l_5^2 = 2r^2 + \frac{r^2}{2}(1 + \sqrt{5})$$

de donde

$${}^{(2)}l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

OBS.—Si $AB = l_{10}$ i $AD = l_5$, será $BC = {}^{(2)}l_5$ i $DC = {}^{(3)}l_{10}$.

Ahora, si dibujamos las apotemas, se verá fácilmente que (fig. 25):

$$\rho_{10} = \frac{1}{2} \cdot {}^{(2)}l_5.$$

$$\rho_5 = \frac{1}{2} \cdot {}^{(3)}l_{10},$$

$$^{(3)}\rho_{10} = \frac{1}{2} \cdot l_5$$

i

$$^{(2)}\rho_5 = \frac{1}{2} \cdot l_{10}$$

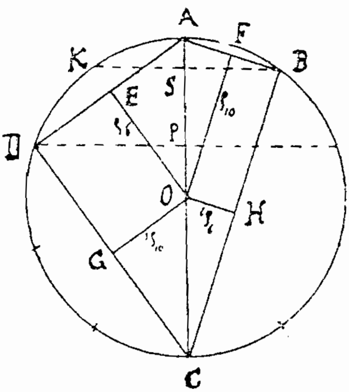

Fig. 25

TERCER MÉTODO.—Este método se funda en que los lados de los pentágonos son las cuerdas suplementarias de los lados de los decágonos (fig. 25).

a) $AD = l_5$. El Δ rectángulo ADC nos da

$$AD^2 = AC \cdot AP$$

pero

$$AP = r - OP = r - {}^{(2)}\rho_5 = r - \frac{1}{2} l_{10}$$

i reemplazando,

$$\text{(I)} \qquad l_5^2 = 2r\left(r - \frac{1}{2} l_{10}\right)$$

o bien

$$l_5^2 = r^2 + (r^2 - r\, l_{10})$$

pero

$$\underline{r^2 - r\, l_{10} = l_{10}^2}$$

luego

$$l_5^2 = r^2 + l_{10}^2$$

Cálculo de l_5

Reemplazando en (I) el valor de l_{10}, tendremos

$$l_5^2 = 2r^2 - \frac{2r^2}{4}(-1+\sqrt{5})$$

i por último

$$l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

b) $BC = {}^{(2)}l_5$. El Δ rectángulo ABC nos da

$$^{(2)}l_5^2 = 2r(r+\rho_5) \qquad \text{(II)}$$

pero

$$\rho_5 = \frac{1}{2} \cdot {}^{(3)}l_{10}$$

reemplazando

$$^{(2)}l_5^2 = r^2 + (r^2 + r\,{}^{(3)}l_{10})$$

pero

$$r^2 + r\,{}^{(3)}l_{10} = {}^{(3)}l_{10}$$

luego

$$^{(2)}l_5^2 = r^2 + {}^{(3)}l_{10}$$

Cálculo de $^{(2)}l_5$

Reemplazando en (II) el valor de ρ_5 en funcion del radio, queda

$$^{(2)}l_5^2 = 2r^2 + \frac{2r^2}{4}(1+\sqrt{5})$$

de donde

$$^{(2)}l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Vamos a indicar otros dos métodos mas para establecer la relacion $l_5^2 = r^2 + l_{10}^2$.

CUARTO MÉTODO.—Supongamos la circunferencia de la (fig. 26) dividida en diez partes iguales. Prolonguemos el lado NF del decágono i tomemos FG=r; por ser

$$\sphericalangle\ OFG = \sphericalangle\ AOB$$

será

$$GO = l_5$$

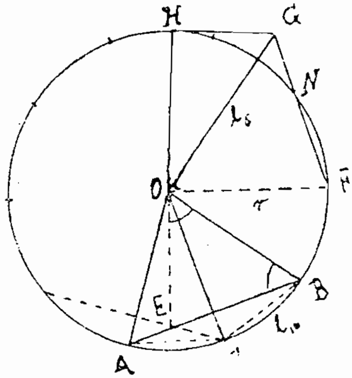

Fig. 26

Por otra parte, la tanjente GH nos da

$$GH^2 = r\,(r - l_{10})$$

luego

$$GH = l_{10}$$

i por lo tanto

$$l_5^2 = r^2 + l_{10}^2$$

QUINTO MÉTODO (fig. 26).

$$AC = BC = l_{10} \quad \text{i} \quad AB = DC = l$$

Si unimos O con E, veremos fácilmente que:

	$\Delta\ BOE \backsim \Delta\ ABO$	$\Delta\ ABC \backsim \Delta\ ACE$
luego	$\frac{BF}{r} = \frac{r}{l_5}$	$\frac{AE}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{l_5}$
o bien	$BF = \frac{r^2}{l_5}$	$AE = \frac{l_{10}^2}{l_5}$

sumando

$$BF + AF = \frac{r^2 + l_{10}^2}{l_5}$$

pero

$$BF + AF = l_5$$

luego

$$l_5^2 = r^2 + l_{10}^2$$

OBS. 1.—Los tres últimos métodos se encuentran en varias Jeometrías; hemos hecho en ellos solo lijeras modificaciones.

OBS. 2.—El teorema de Ptolomeo, que se presta tambien para el cálculo del lado del pentágono, es tambien aplicable a todos los casos que siguen, dando siempre las fórmulas finales casi sin trasformar; por cuyo motivo vamos a darle la preferencia.

Construccion gráfica de l_{10}, l_5, ${}^{(3)}l_{10}$ i ${}^{(2)}l_5$

Dibujemos dos diámetros perpendiculares (AB i CE) i dividamos el radio CO en la seccion áurea (fig. 27).

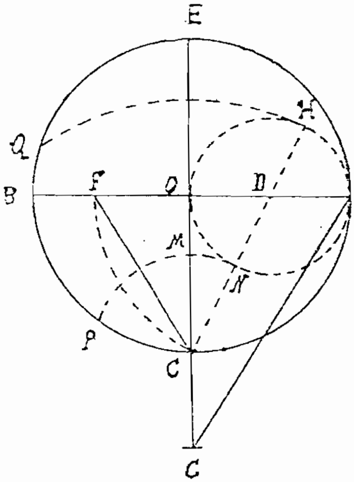

Fig. 27

Para este fin, dibujemos la circunferencia cuyo diámetro es AO; unamos C con el centro D i prolonguemos hasta H; tomemos DF=DC i CH=OG.

De esta construccion resulta:

$$OF = CN = l_{10},$$

$$AF = CH = {}^{(3)}l_{10}$$

i

$$AG = {}^{(2)}l_5$$

18) *Inscribir los dodecágramos de 1.ª i 5.ª especie.*

Resl.: Se divide la circunferencia en 6 partes (núm. 12) i se bisecan los arcos.

Cálculo de los lados

PRIMER MÉTODO (teorema de Ptolomeo).

a) Sea $AB = l_{12}$ (fig. 28).

El cuadrilátero ABCD tiene:

$$AB = DC = l_{12},$$

$$BC = r,$$

$$AC = BD = l_4$$

i

$$AD = l_3,$$

luego

$$l_{12}^2 = l_4^2 - r \cdot l_3$$

i reemplazando los valores de l_4 i l_3, hallamos

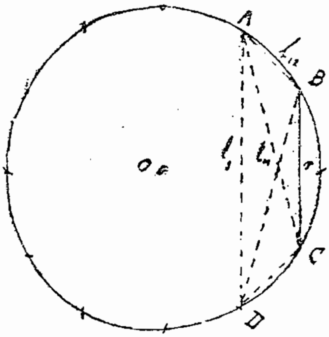

Fig. 28

$$l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

b) En el cuadrilátero ABCD (fig. 29) tenemos:

$$AC = BD = {}^{(5)}l_{12}, \qquad AB = r,$$

$$AD = BC = l_4 \quad \text{i} \quad DC = l_3$$

luego

$${}^{(5)}l_{12} \cdot {}^{(5)}l_{12} = l_4 \cdot l_4 + r \cdot l_3$$

o bien

$${}^{(5)}l_{12}^2 = l_4^2 + r \cdot l_3$$

de donde, reemplazando los valores de l_4 i l_3,

$$^{(5)}l_{12} = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

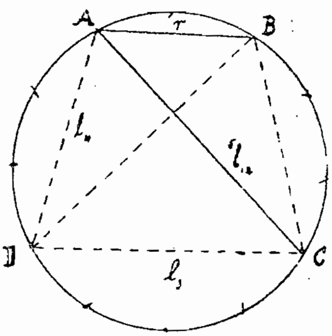

Fig. 29

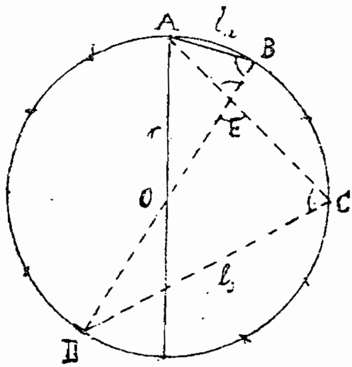

Fig. 30

SEGUNDO MÉTODO (Δ deter.).

a) Estando la circunferencia dividida en 12 partes (fig. 30), tendremos

$$AB = AE = l_{12}, \quad DC = DE = l_3$$

ademas

$$\underline{\Delta\ ABO \backsim BEA}$$

luego

$$\frac{r}{l_{12}} = \frac{l_{12}}{2r - l_3}$$

o bien

$$l_{12}^2 = r\,(2r - l_3)$$

i reemplazando el valor de l_3, hallamos por último

$$l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

b) En la fig. 31 tenemos:

$$AB = BD = {}^{(5)}l_{12}, \qquad DC = CD' = l_3$$

ademas

$$\underline{\Delta\ AOB \backsim \Delta\ ABD'}$$

luego

$$\frac{r}{{}^{(5)}l_{12}} = \frac{{}^{(5)}l_{12}}{2r + l_3}$$

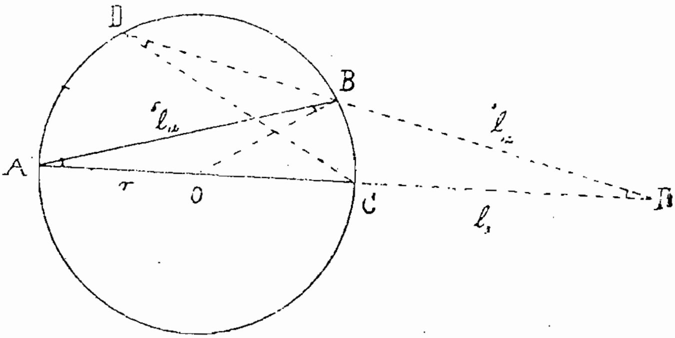

Fig. 31

de donde

$${}^{(5)}l_{12} = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

TERCER MÉTODO para calcular l_{12}

Aplicando la fórmula del número 10, tendremos:

$$l_{12} = \sqrt{r\,(2r - \sqrt{42^2\, l_6^2}}$$

pero $\quad l_6 = r$

luego $\quad l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

TERCER MÉTODO para calcular ${}^{(5)}l_{12}$.

Por ser ${}^{(5)}l_{12}$ la cuerda suplementaria del lado del dodecágono (AB) convexo (figura 32), tendremos

$${}^{(5)}l_{12} = \sqrt{4r^2 - l_{12}^2}$$

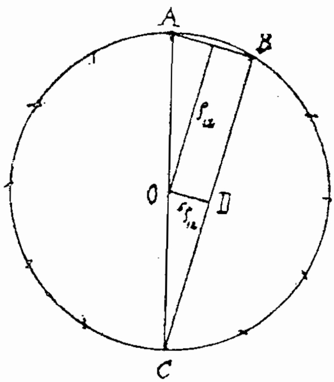

Fig. 32

i reemplazando el valor de l_{12} nos queda

$$^{(5)}l_{12} = \sqrt{4r^2 - r^2\,(2-\sqrt{3})}$$

de donde

$$^{(5)}l_{12} = r\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Obs. En la (fig. 32), si dibujamos las apotemas de los dodecágonos, veremos que

$$\rho_{12} = \frac{1}{2}\,^{(5)}l_{12} \quad \text{i} \quad ^{(5)}\rho_{12} = \frac{1}{2}.\ l_{12}$$

---

19) *Inscribir los icoxágonos de 1.ª, 9.ª, 3.ª i 7.ª especie.*

Resl. Se divide la circunferencia en 10 partes (número 16) i se bisecan los arcos.

La union de los puntos de uno en uno da el icoxágono convexo, la union de 3 en 3, 7 en 7 i 9 en 9, los estrellados.

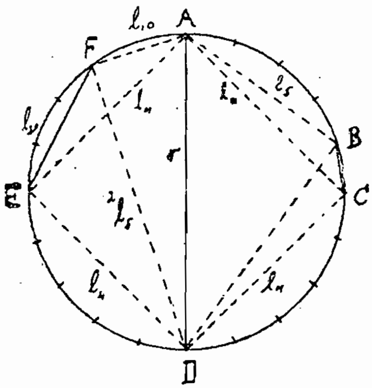

Fig. 33

Cálculo de los lados.

PRIMER MÉTODO. (Teorema de Ptolomeo).

a) Sea $BC = l_{20}$ (fig. 33).

En el cuadrilátero ABCD tenemos: $AB = l_5$, $AC = CD = l_4$ i $BC = {}^{(3)}l_{10}$; luego

$$l_{20}.\ 2r = l_4.\ ^{(3)}l_{10} - l_4.\ l_5$$

i reemplazando valores, nos queda

$$l_{20} = \frac{r}{4}\sqrt{2}\ \left\{(1+\sqrt{5}) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}$$

o bien $$l_{20} = \frac{r}{4} \left\{ (1 + \sqrt{5}) \sqrt{2} - 2 \sqrt{5 - \sqrt{5}} \right\}$$

b) Sea $AC = {}^{(9)}l_{20}$ (fig. 34).

En el cuadrilátero ABCD tenemos:

$$BC = CD = l_4,\ AD = {}^{(3)}l_{10}$$

i

$$AB = l_5$$

luego:

$${}^{(9)}l_{20} .\ 2r = l_4 .\ {}^{(3)}l_{10} + l_4 .\ l_5$$

i por último

$${}^{(9)}l_{20} = \frac{r}{4} \left\{ (1 + \sqrt{5}) \sqrt{2} + 2 \sqrt{5 - \sqrt{5}} \right\}$$

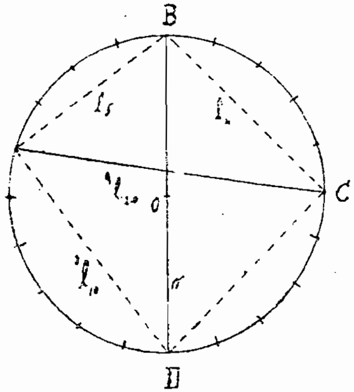

Fig. 34

Observemos que entre los valores de l_{20} i ${}^{(9)}l_{20}$ hai solo una diferencia de signo. Lo mismo, veremos, sucede con los valores de ${}^{(3)}l_{20}$ i ${}^{(7)}l_{20}$.

c) Sea $EF = {}^{(3)}l_{20}$ (fig. 33).

Como en el cuadrilátero ADEF, $AF = l_{10}$, $DF = {}^{(2)}l_5$ i $EA = ED = l_4$, podremos escribir:

$${}^{(3)}l_{20} .\ 2r = {}^{(2)}l_5 .\ l_4 - l_4 .\ l_{10}$$

de donde

$${}^{(3)}l_{20} = \frac{r}{4} \left\{ 2 \sqrt{5 + \sqrt{5}} - (-1 + \sqrt{5}) \sqrt{2} \right\}$$

d) En el cuadrilátero ABCD (fig. 35).

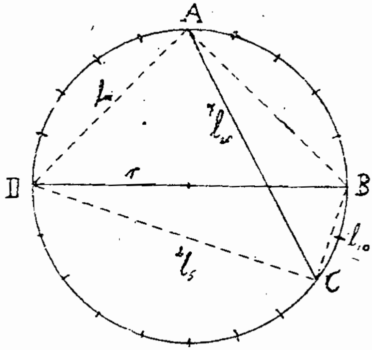

Fig. 35

$AC = {}^{(7)}l_{20}$, $BC = l_{10}$,
$AB = AD = l_4$ i $CD = {}^{(2)}l_5$

luego:

$${}^{(7)}l_{20} \cdot 2r = {}^{(2)}l_5 \cdot l_4 + l_4 \cdot l_{10}$$

de donde

$${}^{(7)}l_{20} = \frac{r}{4}\left\{2\sqrt{5+\sqrt{5}} + (-1+\sqrt{5})\sqrt{2}\right\}$$

Obs. – Si se quisiera tener más simetría en las partes de las fórmulas anteriores, se podia poner

$$x = (1+\sqrt{5})\sqrt{2} \quad \text{i} \quad x' = (-1+\sqrt{5})\sqrt{2}$$

i cuadrando

$$x^2 = 12 + 4\sqrt{5} \quad \text{i} \quad x'^2 = 12 - 4\sqrt{5}$$

luego

$$x = 2\sqrt{3+\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad x' = 2\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

i reemplazando, nos quedaría:

$$l_{20} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$$

$${}^{(9)}l_{20} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$$

$${}^{(3)}l_{20} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$$

i

$${}^{(7)}l_{20} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$$

SEGUNDO MÉTODO (Δ detérmit.).

a) Sea $AB = l_{20}$ (fig. 36).

Como

$$AB = AE = l_{20}$$

i

$$DC = DE = {}^{(2)}l_5$$

i ademas

$$\underline{\Delta\ AOB \backsim \Delta\ BAE}$$

tendremos

$$\frac{r}{l_{20}} = \frac{l_{20}}{2r - {}^{(2)}l_5}$$

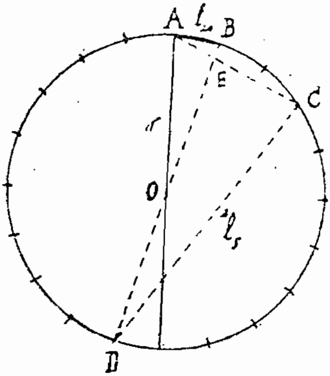

Fig. 36

de donde

$$l_{20} = r\sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

b) Sea $AB = {}^{(9)}l_{20}$ (fig. 37).

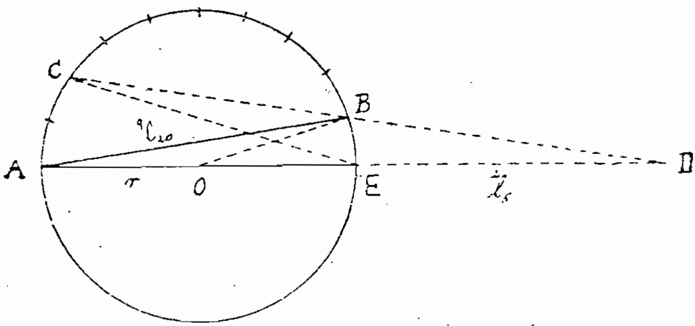

Fig. 37

Como

$$AB = BD = {}^{(9)}l_{20}, \qquad CE = ED = {}^{(2)}l_5$$

i ademas

$$\underline{\Delta\ AOB \backsim \Delta\ ABD}$$

tendremos

$$\frac{r}{^{(9)}l_{20}} = \frac{^{(9)}l_{20}}{2r + {}^{(2)}l_5}$$

de donde

$$^{(9)}l_{20} = r\sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\ .$$

c) Sea AB $= {}^{(3)}l_{20}$ (fig. 38).
Como

$$AB = AE = {}^{(3)}l_{20}, \qquad CD = DE = l_5$$

i ademas

$$\underline{\Delta\ AOB \backsim \Delta\ BAE}$$

tendremos

$$\frac{r}{^{(3)}l_{20}} = \frac{^{(3)}l_{20}}{2r - l_5}$$

de donde

$$^{(3)}l_{20} = r\sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

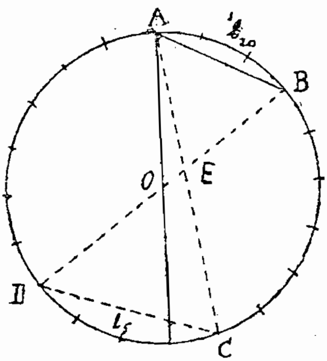

Fig. 38

d) Sea AB $= {}^{(7)}l_{20}$ (fig. 39).
Como

$$AB = BD = {}^{(7)}l_{20},$$

$$CE = CD = l_5$$

i ademas

$$\underline{\Delta\ AOB \backsim \Delta\ ABD}$$

tendremos

$$\frac{r}{^{(7)}l_{20}} = \frac{^{(7)}l_{20}}{2r + l_5}$$

de donde

$$^{(7)}l_{20} = r\sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

OBS.—Si se quisiera llegar a los valores en la forma que tienen en el primer método, seria necesario trasformar los radicales dobles.

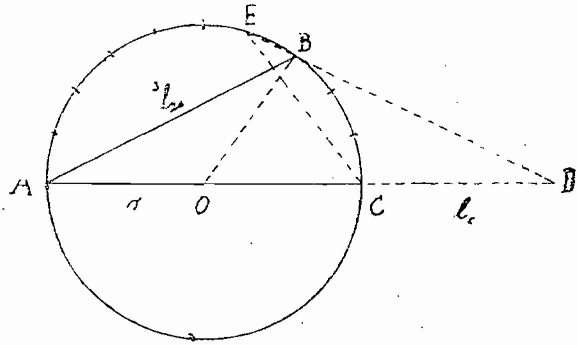

Fig. 39

TERCER MÉTODO para calcular el valor de l_{20} i el de ${}^{(3)}l_{20}$.

a) La fórmula del número 10 nos da:

$$l_{20} = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - l_{10}^2}\right)}$$

i reemplazando el valor de l_{10} hallamos,

$$l_{20} = r\sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

b) Análogamente

$${}^{(3)}l_{20} = \sqrt{r\left(r - \sqrt{4r^2 - {}^{(3)}l_{10}}\right)}$$

luego

$${}^{(3)}l_{20} = r\sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

TERCER MÉTODO para calcular los valores de ${}^{(7)}l_{20}$ i ${}^{(9)}l_{20}$.

a) ${}^{(7)}l_{20}$ es la cuerda suplementaria de ${}^{(3)}l_{20}$, luego

$${}^{(7)}l_{20} = \sqrt{4r^2 - {}^{(3)}l_{20}^2}$$

de donde

$${}^{(7)}l_{20} = r\sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}\,.$$

b) ${}^{(9)}l_{20}$ es la cuerda suplementaria de l_{20}, luego

$${}^{(9)}l_{20} = \sqrt{4r^2 - l_{20}^2}$$

de donde

$${}^{(9)}l_{20} = r\sqrt{2 = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

LUIS A. SILVA

(Continuará)