Sobre los Polígonos Regulares, Convexos i Estrellados

(Continuacion)

Por otra parte,

unir de $m-1$ en $m-1$ equivale a

» » 1 en 1, i que

» » $m-2$ en $m-2$ equivale a

» » 2 en 2, i por último

» » $\frac{m+1}{2}$ en $\frac{m+1}{2}$ equivale a

» » $\frac{m-1}{2}$ en $\frac{m-1}{2}$

En la escala:

$$1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m-1}{2}$$

dejaremos solo los números primos con m para tener los polígonos de m lados.

La primera escala nos dice que se puede unir de 1 en 1 hasta $\frac{m}{2} - 1$ en $\frac{m}{2} - 1$ (a); la segunda, que se puede juntar de 1 en 1 hasta $\frac{m-1}{2}$ en $\frac{m-1}{2}$, i que es inútil pensar en unir mayor número de puntos, porque se caerá en los polígonos ya formados.

El mayor número de arcos que hai que tomar en cuenta es $\frac{m}{2} - 1$, cuando m es par; o $\frac{m-1}{2}$, cuando m es impar; ámbos números son menores que $\frac{m}{2}$, lo que prueba la segunda parte del teorema.

8) Como una aplicacion del teorema anterior vamos a formar el cuadro siguiente:

m	n										
3	1										no hai polígono estrellado
4	1										Id. id. id.
5	1	2									hai un pentágono id.
6	1										no hai exágono id.
7	1	2	3								2 heptágonos estrellados
8	1		3								1 octógonos id.
9	1	2		4							2 pentágonos id.
10	1		3								1 decágono id.
11	1	2	3	4	5						4 hendecágonos id.
12	1				5						1 dodecágono id.
13	1	2	3	4	5	6					5 de 13 lados id.
14	1		3		5						2 de 14 id. id.
15	1	2		4			7				3 pentadecágonos id.
16	1		3		5		7				3 de 16 lados id.
17	1	2	3	4	5	6	7	8			7 de 17 id. id.
18	1				5		7				2 de 18 id. id.
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9		8 de 19 id. id.
20	1		3				7		9		3 icoságonos id.
21	1	2		4	5			8		10	5 de 21 lados id.
22	1		3		5		7		9		4 de 22 id. id.

i así en adelante.

OBS.—Si se supone simplificada la fraccion $\frac{m}{n}$, se dice que un polígono es del jénero m i de la especie n. Así, los polígonos convexos serán todos de 1.ª especie, puesto que en tal caso $n=1$; los polígonos estrellados serán de 2.ª especie, de 3.ª, etc., segun sea $n=2, 3\ldots\ldots$, o de especie superior.

---

9) Los polígonos de especie superior no difieren en nada esencial con relacion a los polígonos ordinarios. Vamos a dejar al lector la demostracion de las siguientes cuestiones:

a) El valor de los ángulos en los vértices de un polígono cualquiera del jénero m i de la especie n, es igual a

$$2R\,m - n.\ 4R.$$

b) Todo polígono regular estrellado se puede inscribir i circunscribir a una circunferencia.

c) El polígono que resulta de unir los vértices de un polígono estrellado regular, es tambien regular, convexo i de su mismo jénero.

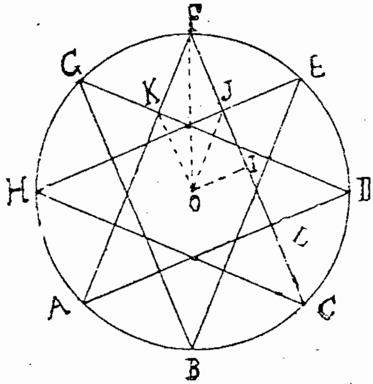
d) El polígono convexo que forma el núcleo de un polígono regular estrellado, es regular i de su mismo jénero.

e) Recíprocamente. Si se prolongan los lados de un polígono regular convexo, se forma un polígono regular estrellado i del mismo jénero.

f) El área de un polígono regular del jénero m i de la especie n es dada por la fórmula

$$S=\frac{m}{2}.\,{}^{n}\rho_m.\left({}^{(n)}l_m - {}^{(n-1)}l'_m\right)$$

Observacion.—Demuéstrese que el lado del polígono interior, cuyos vértices se alejan mas del centro, está representado siempre por ${}^{(n-1)}l'_m$.



Dem: Sea ABCD... un octógono estrellado. Se observa sin dificultad que el área del polígono se compone de m cuadriláteros (8) iguales al FKOJ. Pero el cuadrilátero FKOJ=2. Δ FOJ=FJ. OI (1).

Notemos que $JL={}^{(n-1)}l'_m$, por lo tanto

$$FJ=\frac{1}{2}\left({}^{(n)}l_m - {}^{(n-1)}l'_m\right)$$

ademas

$$OI={}^{(n)}\rho_m.$$

Ahora, reemplazando estos dos valores en (1), hallamos:

$$2\,\Delta\,FOJ=\frac{1}{2}{}^{(n)}\rho_m\left({}^{(n)}l_m - {}^{(n-1)}l_m\right)$$

i multiplicando ambos miembros por m, tendremos por último

$$S=\frac{m}{2}\,{}^{(n)}\rho_m\left({}^{(n)}l_m - {}^{(n-1)}l'_m\right)$$

Observacion 1.—En este caso $m=8$, $n=3$, ${}^{n}l_m={}^{3}l_8$, ${}^{n}\rho_m={}^{3}\rho_8$ i ${}^{(n-1)}l'_m={}^{(3-1)}l'_8={}^{3}l'_8=l'_4$. Si estos valores se sustituyen en la fórmula hallada anteriormente, tendremos:

$${}^{3}S_8=4\,{}^{(3)}\rho_8\,({}^{3}l_8-l'_4)$$

Observacion 2.—El cálculo de ${}^{(n-1)}l'_m$ se puede hacer por medio de la fórmula que da el lado de un polígono regular circunscrito en funcion del radio (${}^{n}\rho_m$) del círculo inscrito; como se verá mas adelante.

Vamos a tratar ahora de las construcciones gráficas para la inscripcion de los polígonos regulares i del cálculo de los lados en funcion del radio respectivo.

CAPÍTULO II

Problemas

10) *Calcular el lado (l_{2n}) del polígono inscrito de 2n lados en funcion del de n lados (l_n) i el radio (r).*

Resolucion. (Fig. 6.)—PRIMER MÉTODO.

El Δ rectángulo ACD nos da:

$$l_{2n} = \sqrt{2r\,(r - OE)}$$

pero

$$OE = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\,l^2_n}$$

i reemplazando, queda

$$l_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\,l^2_n}\right)}$$

o bien

$$l_{2n} = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - l^2_n}\right)} \quad (\alpha)$$

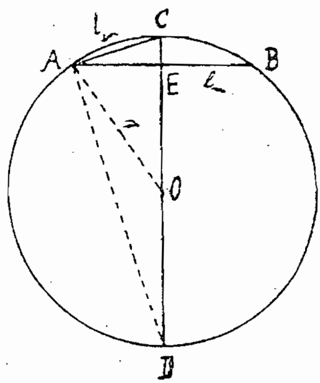


Fig. 6

SEGUNDO MÉTODO.—El Δ AEC nos da

$$l^2_{2n} = AE^2 + (r - OE)^2$$

pero

$$OE = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\,l^2_n}$$

i reemplazando

$$l_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\,l^2_n}\right)}$$

11) RECIPROCAMENTE.—*Calcular el lado (l_n) del polígono regular inscrito en funcion del lado (l_{2n}) del polígono inscrito de 2n lados i r.*

Resl. (fig. 6). PRIMER MÉTODO.

$$\text{El } \Delta\ ABC \backsim \Delta\ AOD$$

luego

$$\frac{l_n}{AD} = \frac{l_{2n}}{r}$$

pero

$$AD = \sqrt{4\,r^2 - l^2_{2n}}$$

i reemplazando, queda:

$$l_n = \frac{l_{2n}}{r}\sqrt{4r^2 - l^2_{2n}} \quad (\beta)$$

SEGUNDO MÉTODO.—El Δ rectángulo ACE nos dá:

$$\frac{1}{4}\,l^2_n = l^2_{2n} - CE^2$$

pero

$$CE = \frac{l^2_{2n}}{2r} \quad (\Delta \text{ rect. } ACD)$$

i reemplazando, tendremos:

$$\frac{1}{2}\,l^2_n = l^2_{2n} - \frac{l^4_{2n}}{4r^2}$$

de donde

$$l^2_n = \frac{l^2_{2n}\,(4r^2 - l^2_{2n})}{r}$$

i por último

$$l_n = \frac{l_{2n}}{r}\sqrt{4r^2 - l^2_{2n}}$$

TERCER MÉTODO.—Se puede despejar l_n de la fórmula (α) del número anterior.

Cuadrando

$$l^2_{2n} = 2r^2 \quad - r\,\sqrt{4r^2 - l^2_n}$$

o bien

$$l^2_{2n} - 2r^2 = -r\,\sqrt{4r^2 - l^2_n}$$

volviendo a cuadrar.

$$l^4_{2n} - 4\, l^2_{2n}\, r^2 + 4r^4 = 4r^4 - r^2\, l^2_n$$

$$r^2\, l^2_n = l^2_{2n}\,(4r^2 - l^2_{2n})$$

i por último $$l_n = \frac{l_{2n}}{r}\sqrt{4r^2 - l^2_{2n}}$$

12) *Inscribir un exágono regular en un círculo.*

Rsl. 1.ª (fig. 7).

Sea A B el lado del exágono i O B=r.

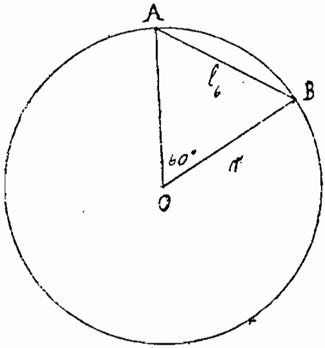


Fig. 7

$\sphericalangle$ AOB=60°

pero

$\sphericalangle$ O A B= $\sphericalangle$ O B A=60°

luego Δ A O B equilátero i por lo tanto l_6=r.

Rsl. 2.ª (fig. 8).

Sea AB=l_6 i unamos B con D i tomemos BC=AB.

El Δ A DC es equilátero, luego

AC=A D

o 2 l_6=2 r

luego l_6=r

Para inscribir el exágono bastará aplicar 6 veces el radio.

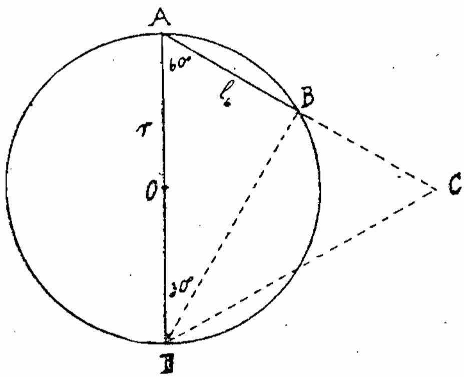


Fig. 8

13) *Inscribir un triángulo equilátero en un círculo.*

Rsl. Este problema no es mas que una consecuencia del anterior.

Se obtiene el triángulo equilátero, uniendo punto por medio los vértices del exágono

Cálculo del lado.

PRIMER MÉTODO.—Si observamos la (fig. 8) del problema anterior, veremos que el lado (B D) del triángulo equilátero inscrito, es la cuerda suplementaria del lado del exágono; por lo tanto el Δ A B D es rectángulo en B, luego:

$$B\,D=\sqrt{4\,r^2-l_6^2}\quad (l_6=r)$$

o

$$l_3=r\sqrt{3}$$

SEGUNDO MÉTODO.—Aplicando la fórmula (B) del núm. 11), tendremos:

$$l_3=\frac{l_6}{r}\sqrt{4\,r^2-l_6^2};\ \text{pero}\ l_6=r,$$

i reemplazando

$$l_3=r\sqrt{3}$$

TERCER MÉTODO.—Por medio del teorema de Ptolomeo, que dice: «El producto de las diagonales en un cuadrilátero inscrito es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.»

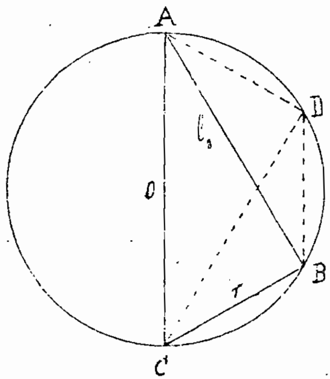


Fig. 9

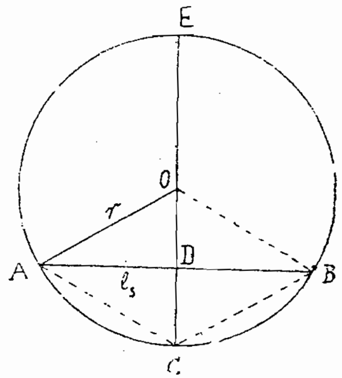


Fig. 10

Sea $$A\,B=l_3$$

En el cuadrilátero A C B D, tendremos: (fig. 9)

$$A\,B.\,C\,D=A\,C.\,B\,D+A\,D.\,B\,C$$

o bien $l^2_3 = 2\, r^2 + r^2$ de

donde $l_3 = r\, \sqrt{3}$

CUARTO MÉTODO (fig. 10).—Sea $AB = l_3$. Como $AC = CB = BO = AO = r$, la figura $A\,C\,B\,O$ es un rombo,

luego:

$$OD = \frac{r}{2}$$

i triángulo $A\,D\,O$ rectángulo, por lo tanto

$$\left(\frac{l_3}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

de donde

$$\frac{l^2_3}{4} = \frac{3}{4} r^2$$

i por último

$$l_3 = r.\ \sqrt{3}$$

OBSERVACION.—Si llamamos ρ_6 la apotema del exágono

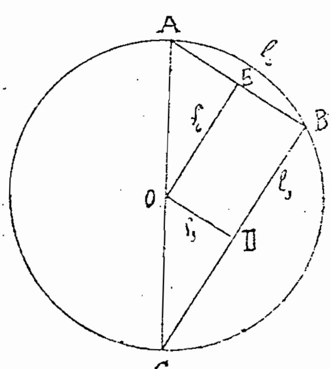


Fig. 11

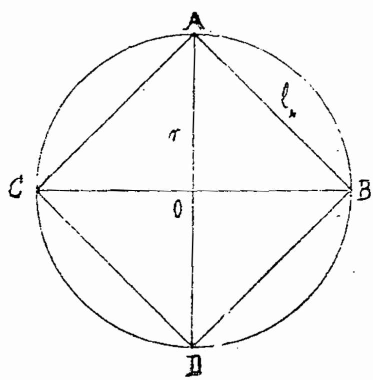


Fig. 12

i ρ_3 la del triángulo equilátero, se demuestra fácilmente que: (fig. 11).

$$\rho_6 = \frac{l_3}{2} \text{ o bien } \rho_6 = \frac{1}{2} r\sqrt{3}$$

i

$$\rho_3 = \frac{l_6}{2} \text{ o bien } \rho_3 = \frac{r}{2}$$

14) *Inscribir un cuadrado en una circunferencia.*

Rsl. Basta dibujar dos diámetros perpendiculares i unir los estremos.

Cálculo del lado.

PRIMER MÉTODO (fig. 12).

El Δ ABO es rectángulo en O, luego:

$$l^2_4 = r^2 + r^2$$

de donde

$$l_4 = r\sqrt{2}$$

SEGUNDO MÉTODO.—Aplicando al cuadrado el teorema de Ptolomeo (fig. 12), tendremos:

$$l_4\, l_4 + l_4\, l_4 = 2r.\, 2\, r$$

$$l^2_4 = 2r$$

$$l_4 = r\sqrt{2}$$

15) *Inscribir los octógonos de 1.ª i 2.ª especie.*

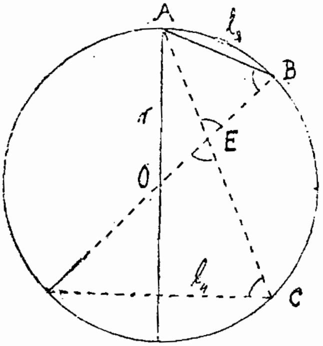


Fig. 13

Rsl. Se divide la circunferencia en cuatro partes (14) i despues se bisecan los arcos.

Uniendo los puntas de uno en uno, resulta el octógono convexo o de 1.ª especie; uniéndolos de tres en tres, resulta el octógono estrellado o de 3.ª especie.

Cálculo de los lados.

PRIMER MÉTODO.—Aplicable a l_8 i $^{(3)}l_8$.

a) Sea $AB = l_8$ el lado del octógono convexo (fig. 13).

Dibujemos por el estremo A de l_8 una recta que determine en su interseccion con BD (el diámetro que pasa por el otro estremo de l_8) un triángulo semejante con el A O B; para esto bastará tomar a continuacion de B un arco doble de A B i unir el punto estremo C con A. Ahora unamos C con D estremo del diámetro B D.

Fácilmente se encuentra que:

$$A\,B = A\,E = l_8 \text{ i } D\,C = D\,E = l_4 = r\sqrt{2},$$

ademas los triángulos semejantes A B E i A O B nos dan:

$$\frac{r}{l_8} = \frac{l_8}{2r - l_4}$$

de donde

$$l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

b) Sea AB $= {}^{(3)}l_8$ el lado del octógono estrellado.

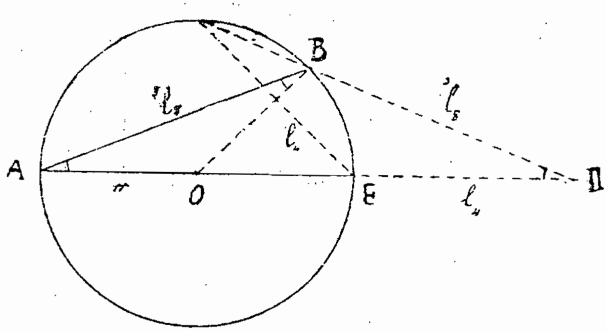


Fig. 14

Dibujemos por B una recta que corte al diámetro AE (que pasa por el otro estremo A de ${}^{(3)}l_8$) de modo que determine un Δ ABD $\backsim$ con Δ ABO; bastará unir, en este caso B con el punto C que sigue i prolongar. Uniendo C con el punto E, tendremos:

$$AB = BD = {}^{(3)}l_8 \quad i \quad EC = ED = l_4$$

pero

$$\underline{\Delta\ ABD \backsim ABO}$$

luego

$$\frac{r}{{}^{(3)}l_8} = \frac{{}^{(3)}l_8}{2r + l_4}$$

de donde

$${}^{(3)}l_8 = r\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

OBSERVACION 1.—Conviene observar la analojía que existe entre las dos últimas cuestiones.

OBSERVACION 2.—El método que acabamos de esponer se puede emplear, sin modificaciones esenciales, en los cálculos de los dos decágonos, de los dos pentágonos, de los dos dodecágonos i de los cuatro icoságonos. Este método vamos a llamarlo del Δ determinante.

SEGUNDO MÉTODO para calcular l_8.

En todos los casos en que se conozca el lado del polígono de de n lados, se podrá pasar al de 2n lados por medio de la fórmula del número 10.

Aplicándola al octógono convexo, tendremos:

$$l_8 = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - l_4^2})}$$

pero

$$l^2_4 = 2r^2$$

i reemplazando, hallamos por último

$$l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

SEGUNDO MÉTODO para calcular ${}^{(3)}l_8$.

El lado del octógono estrellado es la cuerda suplementaria del lado BC del octógono convexo (fig. 15); luego siendo el Δ ABC rectángulo en B, tendremos:

$$ {}^{(3)}l^2_8 = 4r^2 - l^2_8 $$

pero

$$ l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}} $$

luego, reemplazando

$$ {}^{(3)}l_8 = r\sqrt{2+\sqrt{2}} $$

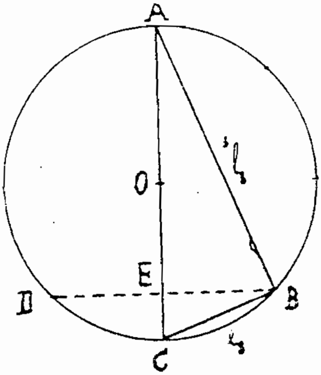


Fig. 15

OBSERVACION 1.—Cuando se conoce el valor de la apotema OE, se puede tomar el lado que se busca como medio proporcional entre 2r i su proyeccion.

En este caso

$$ OE = \tfrac{1}{2}l_4 $$

i por lo tanto

$$ {}^{(3)}l^2_8 = 2r\left(r + \tfrac{1}{2}l_4\right) $$

i reemplazando el valor de l_4, nos queda, por último:

$$ {}^{(3)}l_8 = r\sqrt{2+\sqrt{2}} $$

OBSERVACION 2.—(Fig. 16). Si $AC = l_8$, será $BC = {}^{(3)}l_8$.

Por otra parte, si desde O dibujamos las perpendiculares a l_8 i ${}^{(3)}l_8$, se ve fácilmente que

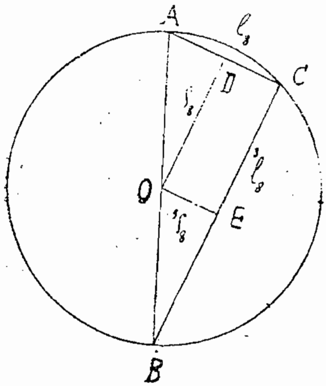


Fig. 16

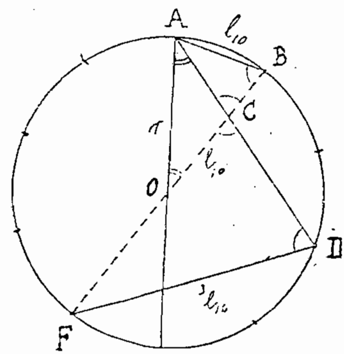


Fig. 17

$$\rho_8 = \frac{{}^{(3)}l_8}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

i

$${}^{(3)}\rho_8 = \frac{l_8}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

16) *Inscribir los decágonos de 1.ª i 3.ª especie.*

Resolucion: 1.er MÉTODO.—(Del Δ determinante) (l_{10} i ${}^{(3)}l_{10}$) (fig. 17).

Supongamos dividida la circunferencia en 10 partes iguales, tendremos $AB = l_{10}$, $AD = DF = {}^{(3)}l_{10}$.

a) Los triángulos isósceles ABC i ACO nos dan:

$$AB = AC = CO = l_{10}$$

pero

$$\underline{\Delta\, ABO \backsim \Delta\, ABC}$$

luego

$$\frac{r}{l_{10}}=\frac{l_{10}}{r-l_{10}}$$

o bien

$$l_{10}^2=r\,(r-l_{10})\quad(1)$$

ademas

$$l_{10}>r-l_{10}$$

Luego, el lado del decágono convexo es la parte mayor del radio dividido en la seccion áurea.

OBSERVACION:— Pudo escribirse la proporcion anterior en virtud de que AC es la bisectriz del $\sphericalangle$ OAB.

Cálculo de l_{10} en funcion de r.

La espresion (1) nos da:

$$l_{10}^2+rl_{10}-r^2=0$$

de donde

$$l_{10}=-\frac{r}{2}\pm\sqrt{\frac{r^2}{4}+r^2}$$

el signo ménos del radical no sirve, luego:

$$l_{10}=\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$$

b) Como ya sabemos dividir la circunferencia en 10 partes iguales por medio de la relacion (1), no tendremos, en seguida, sino juntar los puntos de tres en tres para tener el decágono estrellado.

Observando que el Δ CFD de la fig. 17 es isósceles, encontraremos la interesante relacion:

$$^{(3)}l_{10}=r+l_{10}\quad(2)$$

puesto que

$$CF=FD.$$

Cuando el radio se divide en la seccion áurea por el método jeométrico, la parte esterna de la secante vale l_{10} i la parte interna r; luego, la relacion (2) nos dice que «$^{(3)}l_{10}$ es el segmento mayor que resulta de dividir el radio en la seccion áurea esterna».

Vamos a establecer esto último de un modo mas directo, por medio de la demostracion análoga a la del decágono convexo.

Sea $AB = {}^{(3)}l_{10}$ (figura 18). Unamos B con D i prolonguemos i unamos D con E, tendremos:

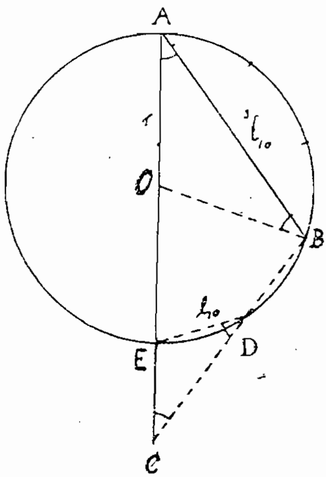


Fig. 18

Δ ABC i DCE isósceles

luego

$$AB = BC = {}^{(3)}l_{10}$$

i

$$DE = EC = l_{10}'$$

por lo tanto,

$$OC = {}^{(3)}l_{10}$$

Por otra parte

Δ ABC $\backsim$ ABO

luego

$$\frac{r + {}^{(3)}l_{10}}{{}^{(3)}l_{10}} = \frac{{}^{(3)}l_{10}}{r}$$

o bien

$${}^{(3)}l_{10}^{2} = r\left(r + {}^{(3)}l_{10}\right) \quad (3)$$

Cálculo de ${}^{(3)}l_{10}$ en funcion de r.

1.º Por medio de la fórmula (2)

$${}^{(3)}l_{10} = r + l_{10}$$

pero $l_{10} = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5})$ i reemplazando hallamos

$${}^{(3)}l_{10} = \frac{r}{2}(1 + \sqrt{5})$$

2.º La relacion (3) nos da

$$^{(3)}l_{10}^2 - r\,^{(3)}l_{10} - r^2 = 0$$

i despejando a $^{(3)}l_{10}$, hallamos

$$^{(3)}l_{10} = \frac{r}{2}(1 + \sqrt{5})$$

SECUNDO MÉTODO.—Cálculo simultáneo de l_{10} i $^{(3)}l_{10}$.

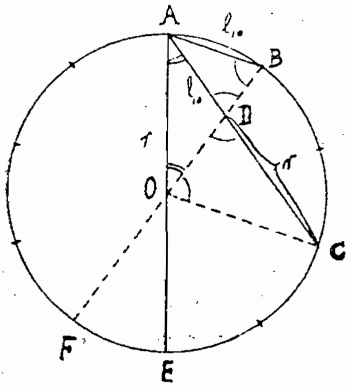


Fig. 19

Fácilmente se descubre que

$$AB = AD = DO = l_{10}$$

i

$$DC = CO = r$$

Ahora

$$\Delta\, AOC \backsim AOD$$

luego

$$\frac{^{(3)}l_{10}}{r} = \frac{r}{l_{10}}$$

o bien

$$r^2 = l_{10} \,.\, ^{(3)}l_{10} \quad (4)$$

Lo que nos dice que el radio es media proporcional jeométrica entre los lados de los dos decágonos.

Por otra parte

$$AC - CD = AD$$

o bien

$$^{(3)}l_{10} - l_{10} = r$$

Las relaciones

I) $$^{(3)}l_{10} - l_{10} = r$$

i II) $$^{(3)}l_{10} \,.\, l_{10} = r^2$$

nos permiten construir los valores de l_{10} i ${}^{(3)}l_{10}$, resolviendo el problema que dice: «Dado el producto i la diferencia de dos rectas, construir dichas rectas».

Ademas, para encontrar los valores en funcion del radio, no tenemos sino cuadrar la primera de las igualdades anteriores (II), i agregar cuatro veces la segunda (II). En virtud de lo dicho tendremos:

$$\left({}^{(3)}l_{10} + l_{10}\right)^2 = 5\,r^2$$

o bien

$${}^{(3)}l_{10} + l_{10} = r\sqrt{5}$$

pero

$${}^{(3)}l_{10} - l_{10} = r$$

ahora, sumando i restando, hallamos

$${}^{(3)}l_{10} = \frac{r}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

i

$$l_{10} = \frac{r}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$$

OBSERVACION.—Para probar que $r^2 = l_{10} \cdot {}^{(3)}l_{10}$ se puede, si se quiere, aprovechar las relaciones (I) i (II).

La primera da

$$r^2 = l_{10}\,(r + l_{10})$$

pero segun (II)

$$r + l_{10} = {}^{(3)}l_{10}$$

luego

$$r^2 = l_{10} \cdot {}^{(3)}l_{10}$$

17) *Inscribir los pentágonos de 1.ª i 2.ª especie.*

Rsl. Dividiendo la circunferencia en 10 partes, segun el número 16, i uniendo de dos en dos los puntos de division, obtendremos el pentágono convexo; uniéndolos de cuatro en cuatro, el estrellado.

Relaciones i cálculo del lado

PRIMER MÉTODO.—(Por medio del teorema de Ptolomeo.)

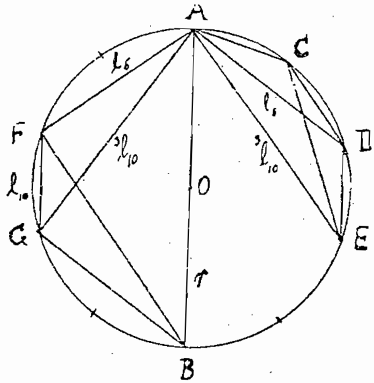


Fig. 20

a) Dividamos la circunferencia en diez partes i será $AD = l_5$.

Pero $AC = CD = DE = l_{10}$, $AD = CE = l_5$ i $AE = {}^{(3)}l_{10}$, luego el cuadrilátero ACDE nos da

$$l_5 \cdot l_5 = l_{10} \cdot l_{10} + l_{10} \cdot {}^{(3)}l_{10}$$

pero segun (4)

$$\underline{r^2 = l_{10} \cdot {}^{(3)}l_{10}}$$

reemplazando queda

$$l_5^2 = l_{10}^2 + r^2 \qquad (5)$$

OBSERVACION.—Pudo tambien haberse tomado el cuadrilátero AFGB, entónces

$$l_5 \cdot l_5 = {}^{(3)}l_{10} \cdot {}^{(3)}l_{10} - 2rl_{10}$$

pero segun (2)

$${}^{(3)}l_{10} = r + l_{10}$$

i reemplazando, queda por último

$$l_5^2 = r^2 + l_{10}^2$$

Valor de l_5 en funcion de r

Reemplazando en (5) el valor de l_{10}, tendremos

$$l_5^2 = r^2 + \left\{ \frac{r}{2} (-1 + \sqrt{5}) \right\}^2$$

de donde hallamos por último

$$l_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

b) Supongamos dividida la circunferencia en 10 partes, será

$$AC = DB = {}^{(2)}l_5 \quad \text{(fig. 21)}$$

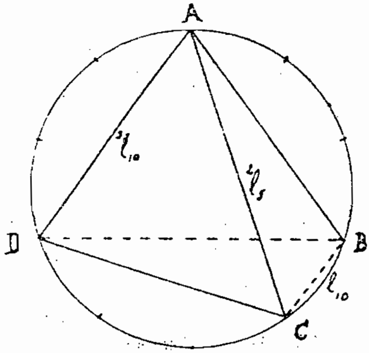


Fig. 21

Ademas

$$AB = AD = DC = {}^{(3)}l_{10}$$

i

$$BC = l_{10}.$$

luego el cuadrilátero AB CD nos da

$${}^{(2)}l_5^2 = {}^{(3)}l_{10}^2 + l_{10} \cdot {}^{(3)}l_{10}$$

pero

$$l_{10} \cdot {}^{(3)}l_{10} = r^2$$

luego $${}^{(2)}l_5^2 = r^2 + {}^{(3)}l_{10}^2 \quad (6)$$

OBSERVACION 1.—Las fórmulas (5) i (6) nos dicen que los lados de los pentágonos pueden considerarse como las hipotenusas de los triángulos rectángulos cuyos catetos son el radio i el lado del decágono respectivo.

OBSERVACION 2.—Por medio del teorema de Ptolomeo se puede encontrar la relacion ${}^{(2)}l_5^2 = l_5 (l_5 + {}^{(2)}l_5)$.

Si tomamos (fig. 22).

$$AD = AB = BC = l_5$$

será

$$DC = BD = AC = {}^{(2)}l_5$$

i

$$AD = DE = CE = l_5$$

El cuadrilátero ABCD nos da:

$${}^{(2)}l^2_5 = {}^{(2)}l_5 . l_5 + l^2_5$$

de donde

$${}^{(2)}l^2_5 = l_5 (l_5 + {}^{(2)}l_5)$$

Pudo tambien encontrarse la fórmula por medio del teorema de la bisectriz:

DE bisectriz del $\sphericalangle$ ADC luego

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EC}$$

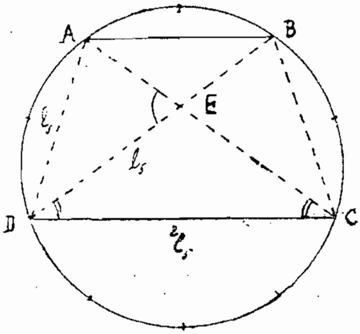


Fig. 22

i reemplazando valores queda

$$\frac{l_5}{{}^{(2)}l_5} = \frac{{}^{(2)}l_5 - l_5}{l_5}$$

i componiendo, hallamos:

$$\frac{l_5 + {}^{(2)}l_5}{{}^{(2)}l_5} = \frac{{}^{(2)}l_5}{l_5}$$

o bien

$${}^{(2)}l^2_5 = l_5 (l_5 + {}^{(2)}l_5)$$

Valor de ${}^{(2)}l_5$ en funcion de r.

Reemplazando en (6) el valor de ${}^{(3)}l_{10}$ tendremos:

$${}^{(2)}l^2_5 = r^2 + \left\{ \frac{r}{2} (1 + \sqrt{5}) \right\}^2$$

i por último

$${}^{(2)}l_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

SEGUNDO MÉTODO.—(Δ determit). *a)* $AB = l_5$. Fácilmente se observa en la figura 23, que

$$AB = AE = l_5$$

i

$$DC = CE = l_{10},$$

ademas

$$\underline{\Delta\ ABE \backsim \Delta\ OAB}$$

luego

$$\frac{r}{l_5} = \frac{l_5}{2r - l_{10}}$$

o bien

$$l_5^2 = 2r^2 - rl_{10}$$

pero

$$\underline{r^2 - rl_{10} = l_{10}^2 \quad \{\text{segun rel. (1)}\}}$$

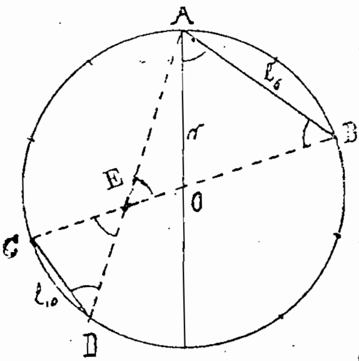


Fig. 23

luego, reemplazando

$$l_5^2 = r^2 + l_{10}^2$$

Valor de l_5 en funcion de r. Si en la proporcion anterior reemplazamos el valor de l_{10}, tendremos

$$l_5^2 = 2r^2 - \frac{r}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$$

de donde

$$l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

LUIS A. SILVA

(Continuará)