MECÁNICA RACIONAL

SEGUNDA PARTE

DE LOS SISTEMAS MATERIALES

(Continuacion)

CAPÍTULO XII

DETERMINACION PRÁCTICA DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE LOS CUERPOS

Se ha demostrado mas arriba (cap. II) que el centro de gravedad de un cuerpo es un punto jeométrico, cuyas coordenadas son dadas por las fórmulas

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} M\xi &= \Sigma mx \\ M\gamma &= \Sigma my \\ M\zeta &= \Sigma mz \end{aligned} \right.$$

Estas fórmulas son una consecuencia de la propiedad siguiente: si en todos los puntos de un cuerpo se aplican vectores paralelos, del mismo sentido i de magnitud proporcional a la masa del punto de aplicacion, la resultante del sistema de estos vectores pasa por el centro de gravedad, cualquiera que sea la direccion comun de los vectores.

En varios casos, el cuerpo considerado es la reunion de n cuerpos, cuyos centros de gravedad son conocidos; se puede entónces aprovechar esta circunstancia para simplificar el problema.

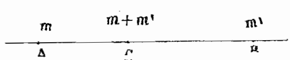
En efecto, la resultante de un sistema de vectores paralelos no cambia cuando se reemplazan algunos grupos de vectores por su resultante parcial, luego, en el caso considerado, podemos reemplazar el cuerpo por un sistema de n vectores, aplicados en los centros de gravedad de los n cuerpos i de magnitud proporcional a las masas respectivas de estos cuerpos.

En resúmen, el problema se reduce a buscar el centro de gravedad de n puntos jeométricos, en los cuales se supone concentrada la materia de los n cuerpos; todavia este último problema se reduce a buscar, en dos direcciones diferentes, la resultante de n vectores paralelos.

Centro de gravedad de dos puntos

Sean A i B dos puntos, m i m' sus masas; se puede suponer que A i B son dos puntos jeométricos i m i m' las masas concentradas en ellos. El centro de gravedad estará situado sobre AB; en efecto, se puede elejir A B como direccion comun de los dos vectores aplicados en A i B; la resultante i, por consiguiente tambien el centro de gravedad, estarán situados sobre esta recta.

Fig. 41



Para determinar la posicion G del centro de gravedad, supondremos que la direccion comun de los dos vectores es perpendicular sobre AB; la resultante pasará por el punto G. Espresemos que su momento, respecto del punto G, es igual a la suma de los momentos de las componentes, tendremos

$$O = A\ G \times m - G\ B \times m'$$

O bien

$$\frac{A\ G}{m'} = \frac{G\ B}{m} \quad (2)$$

Se puede adoptar, como medida de cada vector, la medida misma de la masa del punto de aplicacion; la resultante será entónces igual a $m + m'$.

De ahí se deduce que, para determinar el centro de gravedad de un cuerpo o de un sistema de puntos, se pueden reemplazar dos puntos A i B de masa m i m' por un punto G de masa $m + m'$, el punto G está situado sobre $A\ B$ i su posicion es definida por la relacion (2).

Inversamente, un punto G de masa $m + m'$ es equivalente a dos puntos A i B, de masas m *i* m'; los tres puntos A, B, G, están sobre una misma recta i su posicion respectiva es definida por la misma relacion (2).

Centro de gravedad de tres puntos

Sean (fig. 42) A, B, C tres puntos de masa m, m' m''; los dos puntos B i C pueden reemplazarse por el punto D de masa $m' + m''$ i se tendrá

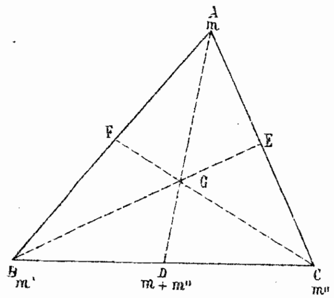
$$\frac{B\ D}{m''} = \frac{D\ C}{m'} \quad (3)$$

En seguida, los dos puntos D i A pueden reemplazarse por un punto G de masa $m + m' + m''$ i se tendrá

$$\frac{D\ G}{m} = \frac{G\ A}{m' + m''} \quad (4)$$

El punto G así obtenido es el centro de gravedad buscado.

Fig. 42



Si en vez de principiar por los puntos B i C se hubiera principiado por los puntos C i A, se hubiera obtenido de otra manera el mismo punto G, pues este centro de gravedad es único; de ahí se deducen algunas propiedades jeométricas; en efecto, se tiene en la figura (42)

$$\frac{E\ C}{m} = \frac{E\ A}{m''}$$

$$\frac{F\ A}{m'} = \frac{F\ B}{m}$$

Si se comparan estas dos relaciones con (3), se obtiene

$$B\ D \times E\ C \times F\ A = D\ C \times E\ A \times F\ B$$

De la relacion (4), comparada con (3), se deducen relaciones análogas.

Casos particulares

1.º Si las tres masas m, m', m'' son iguales, las rectas $A\ D$, BE, CF son las tres medianas del triángulo $A\ B\ C$, luego las tres medianas de un triángulo deben cortarse en un mismo punto; ademas la relacion (4) da entónces

$$\frac{D\ G}{m} = \frac{G\ A}{2\ m}$$

O bien

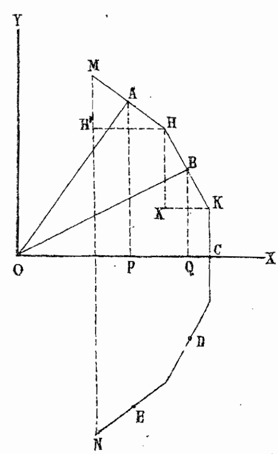
$$D\,G = \frac{1}{2}\,G\,A$$

2.° Si la masa de cada punto es proporcional a la lonjitud del lado opuesto, los rectos $A\,D$, $B\,E$, $C\,F$ son las tres *bisectrices* del triángulo $A\,B\,C$, luego las tres bisectrices de un triángulo deben cortarse en un mismo punto.

Centro de gravedad de puntos de misma masa uniformemente repartidos sobre un arco de circunsferencia

Sea (fig. 43) O el centro de la circunferencia i r su radio, el centro de gravedad se encontrará sobre el eje de simetria OX. En efecto, a cada punto situado a un lado de OX, corresponde otro de misma masa, simétrico del primero con respecto a OX; los dos puntos considerados son equivalentes a un punto de masa doble, situado sobre OX; finalmente, el centro de gravedad buscado es el de cierto número de puntos situados sobre OX, luego este centro estará, tambien sobre OX. Sea ξ la abcisa del centro de gravedad, respecto del oríjen O se tendrá

Fig. 43



$$M\xi = \Sigma mx$$

En el caso considerado, m es constante para todos los puntos i M es igual a n veces m, luego

$$\xi = \frac{\Sigma x}{n}.$$

Consideremos una porcion de polígono regular de n lados, circunscrito a la circunferencia de radio r, i tal que los puntos de masa m sean los puntos medios de los lados consecutivos. En la fig. (43) el primer lado de este polígono es MH i el primer punto de masa m es el punto A situado en el medio; la abcisa de este punto es $O\ P$; unamos $O\ A$ i por los puntos M i H tracemos $M\ H'$, $H\ H'$ paralelos a $O\ Y$ i $O\ X$; los dos triángulos $M\ H\ H'$ i $A\ O\ P$ son semejantes i $O\ A$ es igual a r, luego

$$\frac{O\ P}{r} = \frac{M\ H'}{M\ H}$$

Pasando al punto siguiente B tendremos tambien

$$\frac{O\ Q}{r} = \frac{H\ K'}{H\ K}$$

I así en seguida. Sea a la lonjitud comun de los lados del polígono circunscrito, tendremos

$$\Sigma x = O\ P + O\ Q \ldots = \frac{r}{a}(M\ H' + H\ K' + \ldots)$$

La espresion entre paréntesis es la lonjitud de la cuerda $M\ N$ que cierra el polígono; sea c esta lonjitud, tendremos

$$\Sigma\ x = \frac{r\ c}{a}$$

Luego

$$\xi = \frac{r\ c}{n\ a}$$

Sea todavía s el perímetro total de la porcion del polígono, se tendrá tambien

$$(5) \qquad \xi = \frac{rc}{s}$$

CENTRO DE GRAVEDAD DE LAS LÍNEAS

Supongamos que se divide un cuerpo por una serie de planos paralelos infinitamente próximos, el centro de gravedad de la materia contenida entre dos planos consecutivos estará situado entre los dos planos, puesto que se puede elejir la direccion comun de los vectores paralela a los planos considerados; en el límite, estos centros de gravedad dibujaran en el espacio una curva continua i el centro de gravedad del cuerpo será el de esta línea jeómetrica sobre la cual se puede suponer concentrada la materia de todo el cuerpo.

Segun esta definicion, un elemento ds de la línea tendrá una masa ρds i ρ sea una cantidad determinada en cada punto de la línea.

Se tendrá en este caso, para la coordenada ξ del centro de gravedad

$$\xi = \frac{\Sigma \rho x ds}{\Sigma \rho ds}$$

Si ρ es constante, en todos los puntos de la línea, su valor representa la masa de la unidad de lonjitud i el valor de ξ se reduce a

$$\xi = \frac{\Sigma x ds}{s} \qquad (6)$$

s es la lonjitud total de la línea considerada. En lo que sigue supondremos siempre que las líneas son homojéneas, es decir que ρ es constante.

Arco de circunferencia

La (fig. 44) AB un arco de circunferencia, O su centro, x el radio, s la lonjitud del arco i c la lonjitud de la cuerda AB; el centro de gravedad estará situado sobre el eje de simetría OX.

Referimos los puntos del arco a los ejes rectangulares OX, OY; sean x, y, las coordenadas de un punto M i θ el ángulo MOX se tendrá

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

$$ds = r\, d\theta$$

Luego

$$x\,ds = r^2 \cos\theta\, d\,\theta = r\,dy$$

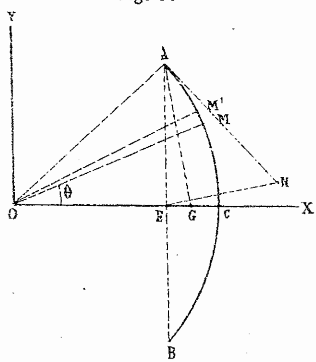
I tambien

$$\Sigma\, x\,ds = r\,\Sigma\, dy = rc$$

Luego, segun (6), la abcisa del centro de gravedad será

$$\xi = \frac{rc}{s}$$

Fig. 44



Es la misma fórmula obtenida mas arriba en el caso de n puntos de la misma masa, repartidos uniformemente sobre un arco de circunferencia; es bien evidente, en efecto, que los dos casos son análogos i que el perímetro del polígono circunscrito se confunde aquí con la lonjitud misma del arco.

Construccion gráfica

Sobre la tanjente en A al arco ACB tomemos una lonjitud AN igual a la mitad del arco s, es decir, igual al arco AC; unamos el punto medio E de la cuerda AB con N i bajemos desde A, una perpendicular sobre EN; el punto G de interseccion de esta perpendicular con OX es el centro de gravedad del arco; en efecto, se tiene en los triángulos semejantes AOG i AEN,

$$\frac{OG}{OA} = \frac{AE}{AN}$$

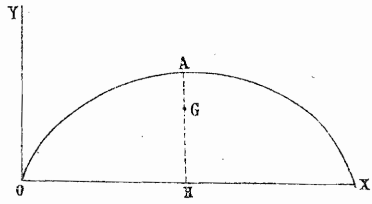
O bien

$$OG = r\frac{c}{s}$$

Arco de cicloide

Consideremos (fig. 45) al arco de cicloide correspondiente a una vuelta completa del círculo jenerador; si r es el radio de este círculo, la lonjitud total del arco es $s=8\ r$ el centro de gravedad G estará sobre una perpendicular AH en el medio de la base; sea η su distancia a OX, se tendrá

Fig. 45



$$\eta=\frac{\Sigma\, y\ ds}{8\ r}$$

Se tiene ahora, en funcion del ángulo u

$$y=r\ (1-\cos u)$$

$$ds=2\ r\ \text{sen}\ \frac{u}{2}du$$

Luego

$$\Sigma\, y\ ds=2\ r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos u)\ \text{sen}\ \frac{u}{2}du=\frac{32}{3}r^2$$

Finalmente

$$\eta=\frac{\frac{32}{3}r^2}{8r}=\frac{4}{3}r$$

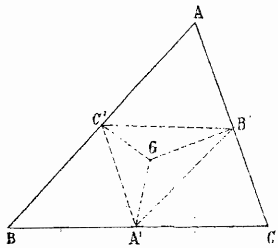
Se ve que el centro de gravedad G está situado a los dos tercios de la altura a partir de la base.

Centro de gravedad del perímetro de un triángulo

Sea (fig. 46) un triángulo ABC; el centro de gravedad de cada lado está en el punto medio, luego el problema consiste en determinar el centro de gravedad de tres puntos cuyas masas son proporcionales a los lados correspondientes del triángulo; sean A', B', C' los puntos medios; en el triángulo $A'\ B'\ C'$

la masa de cada vértice es proporcional a la lonjitud del lado opuesto, luego el centro de gravedad G está en el punto de interseccion de las bisectrices del triángulo A' B' C'

Fig. 46



Centro de gravedad del perímetro de una porcion de polígono regular.

El centro de gravedad de cada lado está en su punto medio, es decir, sobre la circunferencia inscrita, luego el problema consiste en determinar el centro de gravedad de n puntos de la misma masa, uniformemente repartidos sobre una circunferencia; sea entónces s el perímetro del polígono, c la cuerda i r el radio de la circunferencia inscrita, la abcisa del centro de gravedad será

$$\xi = \frac{r\,c}{s}$$

CENTRO DE GRAVEDAD DE LAS ÁREAS

Supongamos que se divide un cuerpo en una infinidad de prismas infinitamente delgados, el centro de gravedad de cada prisma estará situado en su interior i, en el límite, la sucesion de estos centros de gravedad dibujará, en el espacio, una superficie contínua; el centro de gravedad del cuerpo será el de esta superficie sobre la cual se debe suponer concentrada la masa total del cuerpo.

Segun esta definicion un elemento $d\,\omega$ de área tendrá una masa $\rho d\omega$ i ρ será una cantidad determinada en todos los puntos de la superficie.

Si ρ es constante, su valor representa la masa de la unidad de área; es este último caso que consideramos en lo que sigue; sea entónces Ω el área total de una porcion de superficie, se tendrá

$$\Sigma\, mx = \rho\, \Sigma\, x\, d\omega$$

$$M = \rho\, \Omega$$

I, por consiguiente

$$\xi = \frac{\sum x\, d\omega}{\Omega} \tag{7}$$

Áreas planas

El centro de gravedad está situado evidentemente en el plano. Si la figura tiene un *diámetro*, el centro de gravedad está situado sobre este diámetro; en efecto, se puede dividir el área por una serie de rectas, infinitamente próximas i paralelas a la direccion conjugada del diámetro considerado; el centro de gravedad de cada trapecio estará situado sobre el diámetro, luego el centro de gravedad del área se confunde, en el límite, con el centro de gravedad de una infinidad de puntos, de masas diferentes, situados sobre una misma recta; finalmente el centro de gravedad del área está sobre el diámetro considerado.

Si una figura plana tiene dos diámetros, el centro de gravedad del área está a la interseccion de ellos. Así, por ejemplo, el centro de gravedad de un paralelógramo es su centro.

Triángulo

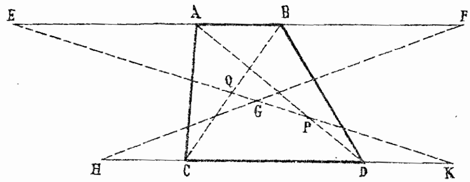
Cada mediana es un diámetro del triángulo, luego el centro de gravedad está en la interseccion de las tres medianas.

Se observa que este centro de gravedad es el mismo que el de tres puntos de la misma masa situados en los tres vértices del triángulo.

Trapecio

Sea (fig. 47) un trapecio $ABCD$; tracemos la diagonal BC; dividiremos así el trapecio en dos triángulos, cuyas áreas son proporcionales a las bases $AB=b$ i $CD=B$ del trapecio. Si se conocieran los centros de gravedad de los dos triángulos, bastaria considerar, en estos puntos, dos masas proporcionales a b i B i buscar su centro de gravedad; ahora, un punto de masa $3\,b$, situado en el centro de gravedad del triángulo ABC es equivalente a tres puntos de masa b, situados en A, B i C; del mismo modo, un punto de masa $3\,B$, aplicado en el centro de gravedad del triángulo $B\,C\,D$, es equivalente a tres puntos de masa B, situados en B, C, D; tenemos así: 1.° en A, un punto de masa a b, 2.° en B i C dos puntos de masa $B+b$, 3.° en D un punto de masa B. El centro de gravedad de estos cuatro puntos será el del trapecio.

Fig. 47



Prolonguemos las dos bases paralelas i tomemos

$$AE=BF=B$$
$$HC=DK=b$$

Los puntos, situados en A i D, pueden reemplazarse por un punto de masa $B+b$, situado en P, a la interseccion de AD i EK i, del mismo modo, los dos puntos, situados en B i C, pueden ser reemplazados por un punto de masa $2\,(B+b)$, situado en Q, a la interseccion de BC i EK; finalmente, tendremos dos puntos situados sobre EK; el centro de gravedad G estará sobre la misma recta; ademas se tendrá

$$PG=2GQ$$

El punto G, se encontrará, por las mismas razones, sobre la recta HF, luego está a la interseccion de FH i EK.

Sector de polígono regular

Sean, como mas arriba, r el radio de la circunferencia inscrita, s el perímetro del polígono i c la lonjitud de la cuerda; se puede descomponer el polígono en triángulos que tienen un vértice comun en el centro. Los centros de gravedad de estos triángulos estarán situados sobre una circunferencia de radio

$$r' = \frac{2}{3} r$$

Como estos centros están uniformemente repartidos sobre la circunferencia i simétricamente respecto de $O X$, la abcisa ξ del centro de gravedad será

$$\xi = r' \frac{c'}{s'},$$

Ahora c' i s' son evidentemente los dos tercios de c i s, luego

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{r c}{s}. \tag{8}$$

Sector de círculo

El sector de círculo es el límite de un sector poligonal de un número infinito de lados infinitamente pequeños; la fórmula (8) se podrá aplicar directamente i se obtendrá tambien

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{r c}{s}$$

La construccion gráfica será análoga al caso de la figura (44), i el centro de gravedad del sector será, respecto del centro O, a los dos tercios del centro de gravedad del arco.

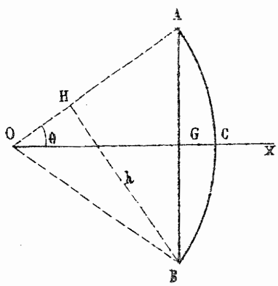
Segmento de círculo

El centro de gravedad estará todavía sobre el eje de simetría del segmento; sea ξ su abcisa respecto del centro O. El segmento ABC (fig. 48) es la diferencia entre el sector $OACB$ i el triángulo OAB; sean ξ' i ξ'' las abcisas de los centros de gravedad del sector i del triángulo; si en los tres centros de gravedad, de abcisas ξ, ξ', ξ'', se aplican vectores perpendiculares a

OX de magnitudes proporcionales a las áreas del segmento, del sector i del triángulo, el vector aplicado en el centro de gravedad del sector será la resultante de los otros dos; tomemos los momentos respecto del punto O tendremos

$$\zeta' \times \text{área sector} = \zeta \times \text{área segm.} + \zeta'' \text{ área triángulo.}$$

Fig. 48



Sea h la distancia de B al radio OA, se tiene

$$\text{área sector} = \frac{1}{2} r s$$

$$\text{área triáng.} = \frac{1}{2} r h$$

$$\text{área segm.} = \frac{1}{2} r (s-h)$$

Luego, si se suprime el factor comun $\frac{1}{2}\, r$,

$$s\,\zeta' = (s-h)\,\zeta + h\,\zeta''$$

Ahora

$$\zeta' = \frac{2}{3}\frac{rc}{s}$$

$$\zeta'' = \frac{2}{3}\frac{hr}{c}$$

Luego

$$\zeta = \frac{2}{3}\frac{r}{c}\frac{c^2-h^2}{s-h}$$

Espresemos en funcion del ángulo *AOB* que supondremos igual a 20; tendremos las siguientes fórmulas:

Abcisa del centro de gravedad del arco AB : $\xi = r\,\dfrac{sen\theta}{\theta}$

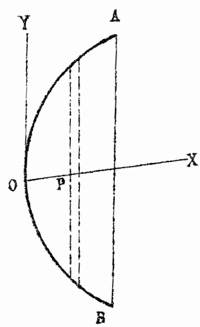
Id. *del sector AOBC :* $\xi = \dfrac{2}{3}\,r\,\dfrac{sen\theta}{\theta}$

Id. *del segmento ABC :* $\xi = \dfrac{4}{3}\,r\,\dfrac{sen^3\theta}{2\,\theta\text{-}sen^2\theta}$

Segmento de parábola

Sea (fig. 49) un segmento de parábola *AOB;* referimos la curva a dos ejes OX, OY, tales que OX sea paralela a la cuerda $A\ B$ i que $O\ X$ sea el diámetro conjugado; respecto de estos ejes la ecuacion de la parábola tiene la forma

Fig. 49



$$y^2 = Kx$$

El centro de gravedad estará situado sobre el diámetro $O\ X$; consideremos un elemento de área comprendido entre dos cuerdas infinitamente próximas paralelas a $O\ Y$, la masa de este elemento será proporcional a $y\ dx$ i su centro de gravedad P estará sobre OX; se trata de buscar el centro de gravedad de los puntos análogos a P situados sobre OX. Sea a la abcisa de la cuerda $A\ B$ i ξ la abcisa del centro de gravedad, se tendrá

$$\xi = \frac{\int_o^a xy\ dx}{\int^a y\ dx}$$

O bien, sustituyendo a y su valor

$$\xi = \frac{\sqrt{k} \int_0^a x^{\frac{3}{2}}\, dx}{\sqrt{k} \int_0^a x^{\frac{1}{2}}\, dx} = \frac{3}{5} a.$$

Teoremas de Guldin

I. *El área de la superficie de revolucion, enjendrada por una curva plana que jira al rededor de un eje situado en su plano, es igual al producto de la lonjitud de la curva por la circunferencia que describe su centro de gravedad.*

En efecto, un elemento ds de la curva, cuya distancia al eje es x, enjendra una área igual a $2\pi x\, d s$; luego el área total A enjendrada por el arco considerado es

$$A = 2\pi \int x ds$$

Por otra parte, sea ξ la distancia del centro de gravedad, al eje de rotacion i s la lonjitud total del arco; se tiene

$$\xi = \frac{\Sigma x ds}{s} = \frac{\int x ds}{s}$$

Luego

$$A = 2\pi \Sigma . s$$

Lo que demuestra el teorema.

Aplicaciones

1.° Consideremos una circunferencia de radio r, cuyo centro está a una distancia a del eje de rotacion, el área enjendrada será el área de un toro i su valor es

$$2\pi r \times 2\pi a = 4\pi^2 a r$$

2.° Busquemos el área enjendrada por un arco de circunferencia que jira al rededor de un diámetro paralelo a su cuerda; se tiene en este caso

$$\xi = \frac{r\,c}{s}$$

Luego

$$A = 2\,\pi\,r\,c$$

Si el arco es igual a una media circunferencia, c es igual a $2\,r$ se tiene

$$A = 4\,\pi\,r^2$$

3.° El área enjendrada por una cicloide que jira al rededor de su base será

$$A = 2\,\pi \times \frac{4}{3}\,r \times 8\,r = \frac{64}{3}\pi\,r^2$$

II. *El volúmen enjendrado por una área plana que jira al rededor de un eje situado en su plano, es igual al producto del área por la circunferencia que describe su centro de gravedad.*

En efecto, un elemento de área $d\,\omega$ cuya distancia al eje de rotacion es x enjendra un volúmen igual a $2\,\pi\,x\,d\,\omega$, luego si V es el volúmen total se tiene

$$V = 2\,\pi \int x\,d\,\omega$$

Sea, por otra parte, ξ la distancia al eje del centro de gravedad del área, i Ω el área total, se tiene

$$\xi = \frac{\Sigma\,x\,d\,\omega}{\Omega} = \frac{\int r\,d\,\omega}{\Omega}$$

Luego

$$V = 2\,\pi\,\xi.\,\Omega$$

Lo que demuestra el teorema.

Aplicaciones

1.° El volúmen del toro considerado mas arriba es

$$\pi r^2 \times 2 \pi a = 2 \pi^2 r^2 a$$

2.° Busquemos el volúmen enjendrado por un sector circular que jira al rededor de un diámetro paralelo a la cuerda, se tendrá

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{r c}{s}$$

$$\Omega = \frac{1}{2} r s$$

Luego

$$V = \frac{2}{3} \pi r^2 c$$

Si el arco del sector es igual a una media circunferencia, c es igual a $2 r$, entónces

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

3.° El volúmen enjendrado por una cicloide que jira al rededor de su base es

$$V = 2 \pi . \tfrac{5}{6} r \times 3 \pi r^2 = 5 \pi^2 r^3$$

CENTRO DE GRAVEDAD DE LOS VOLÚMENES

Sea dw un elemento de volúmen de un cuerpo; x, y, z sus coordenadas i ρ la densidad en este punto, se tendrá para la coordenada ξ del centro de gravedad

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{M} = \frac{\Sigma \rho x d w}{\Sigma \rho d w}$$

Si el cuerpo es homojéneo i, si V es su volúmen total, la fórmula anterior se reduce a

$$\xi = \frac{\Sigma x dw}{V}$$

Supongamos que todas las secciones hechas en un cuerpo por planos paralelos a cierto plano fijo, tengan el centro de gravedad de su área situado sobre cierta recta determinada, el centro de gravedad del volúmen estará tambien sobre esta recta.

En efecto, en este caso, el centro de gravedad del volúmen comprendido entre dos planos paralelos infinitamente próximos estará situado sobre la recta o a una distancia infinitamente pequeña de ella, luego en el límite, el centro de gravedad del cuerpo es el centro de gravedad de la recta, sobre la cual se supone concentrada toda la masa del cuerpo. Este resultado demuestra el teorema.

NOTA.—Si en un cuerpo existen varias rectas gozando de la misma propiedad, todas ellas deben concurrir en un mismo punto que es entónces el centro de gravedad del cuerpo.

Centro de gravedad del tetraedro

Unamos un vértice con el centro de gravedad de la cara opuesta, esta recta será el lugar jeométrico de los centros de gravedad de todas las secciones paralelas a la cara considerada, luego el centro de gravedad del tetraedro está sobre esta recta.

Por la misma razon, el centro de gravedad estará sobre cada una de las rectas que une un vértice con el centro de gravedad de la cara opuesta, luego las cuatro rectas así definidas se cortan en un mismo punto, i éste es precisamente el centro de gravedad del tetraedro.

Se demuestra en jeometria que efectivamente, estas cuatro rectas se cortan en un mismo punto G i que el punto G se encuentra en la cuarta parte de cada una de ellas, a partir de la cara correspondiente.

Se averigua ahora que el centro de gravedad del tetraedro es tambien el centro de gravedad de cuatro puntos de misma masa, situados en los cuatro vértices.

De ahí se deduce que el centro de gravedad del tetraedro se encuentra tambien en el medio de la recta que une los puntos medios de dos aristas opuestas cualesquiera.

Centro de gravedad de un sector esférico

El sector esférico puede ser considerado como la reunion de una infinidad de tetraedos iguales e infinitamente delgados, cuyo vértice comun es el centro de la esfera. El centro de gravedad de cada tetraedro es a una distancia del centro igual a $\frac{3}{4}r$, luego, en el límite, el centro de gravedad del sector será el de un casquete esférico cuyo radio es $r' = \frac{3}{4}r$.

Si se corta el casquete esférico por planos paralelos a la base i a distancia constante e infinitamente pequeña dx unos de otros, el centro de gravedad del área comprendido entre dos planos será situado sobre el radio perpendicular a la base i la masa concentrada sobre el elemento dx de este radio será proporcional á dx, puesto que el área de la porcion de esfera comprendida entre los dos planos es $2\pi r' dx$; finalmente el centro de gravedad del casquete esférico está en el medio de la porcion del radio, perpendicular a la base comprendido entre la base i el vértice del casquete.

A. OBRECHT.

(Continuará).