MECÁNICA RACIONAL

SEGUNDA PARTE

DE LOS SISTEMAS MATERIALES

(Continuacion)

CAPÍTULO X

EQUILIBRIO SÓLIDO.—PRESIONES I TENSIONES.—POLÍGONOS I CURVAS FUNICULARES

Es jeneralmente imposible determinar el movimiento de un cuerpo, cuando se conocen solo las fuerzas esteriores, porque no se conocen las fuerzas interiores o acciones moleculares. Sin embargo, la observacion nos indica que los cuerpos de la naturaleza son susceptibles de tomar ciertos movimientos perfectamente definidos: así, por ejemplo, todos los cuerpos son susceptibles de quedar en reposo, bajo la accion de fuerzas esteriores convenientes; algunos, como las piezas ríjidas de una máquina o los líquidos en equilibrio relativo, se mueven en el espacio como sólidos invariables; otros son equivalentes, a cada instante, a un mismo sólido invariable, a pesar de los movimientos interiores de las móleculas.

Sea lo que fuera, se pueden aprovechar estos resultados de observacion para resolver el problema siguiente: conociendo, de antemano, la naturaleza del movimiento de un cuerpo ¿cuáles son las condiciones a que deben satisfacer las fuerzas esteriores i cuáles son las presiones i tensiones que estas fuerzas enjendran en el interior del cuerpo?

Definicion de la densidad

Sea M un punto situado en el interior de un cuerpo; consideremos, al rededor de M, un volúmen infinitamente pequeño de materia; la razon entre la masa del punto material así obtenido i su volúmen debe tender hácia un límite determinado, cuando el volúmen tiende hácia cero; este límite se llama *densidad* del cuerpo en el punto M.

Para que esta definicion sea rigorosa e independiente de las hipótesis aceptadas jeneralmente sobre la constitucion interna de los cuerpos, basta considerar los intervalos vacíos, que probablemente separan las moléculas, como infinitamente pequeños respecto del volúmen del punto material considerado.

Segun esto, cuando se desprecian infinitamente pequeños de órden superior a los que se conservan, la masa de un volúmen infinitamente pequeño de materia es igual al producto del volúmen por la densidad del cuerpo en el punto considerado; ademas, en el mismo órden de aproximacion, la materia contenida en el volúmen considerado, puede ser considerada como continua i homojénea.

Equilibrio sólido

Se dice que un cuerpo está en *equilibrio sólido* cuando los puntos materiales que lo constituyen conservan distancias recíprocas invariables. El equilibrio es *absoluto* cuando el cuerpo está en reposo.

Un cuerpo en equilibrio sólido se mueve evidentemente, en el espacio, como un sólido invariable, luego su movimiento es enteramente definido en funcion de las fuerzas esteriores. Recíprocamente, si se conoce el movimiento del cuerpo, las fuerzas esteriores deben satisfacer a las *seis* ecuaciones establecidas en el caso del sólido invariable.

Presiones i tensiones que soportan los cuerpos en equilibrio sólido

Por definicion, los puntos materiales, que constituyen un cuerpo en equilibrio sólido, conservan distancias recíprocas invariables, luego podemos concebir que estos puntos estan ligados unos con otros por medio de *barras hipotéticas* de lonjitud invariable. Esto equivale a sustituir al cuerpo, el sólido invariable equivalente.

Las barras hipotéticas de este sólido invariable, como las barras de un sistema articulado indeformable, soportan presiones i tensiones, en relacion con las fuerzas esteriores que obran sobre el cuerpo i en relacion tambien con la naturaleza del movimiento del cuerpo en el espacio; son estas presiones i tensiones que se trata de determinar.

Es bien evidente que las acciones moleculares son las que mantienen los puntos a distancias invariables unos de otros; pero las presiones i tensiones, definidas mas arriba, no tienen relacion ninguna con las acciones moleculares; así, por ejemplo, las presiones i tensiones de las barras hipotéticas son nulas cuando el cuerpo considerado está en reposo i sustraido a la accion de fuerzas esteriores, miéntras tanto, las acciones moleculares obran constantemente entre los puntos del cuerpo considerado.

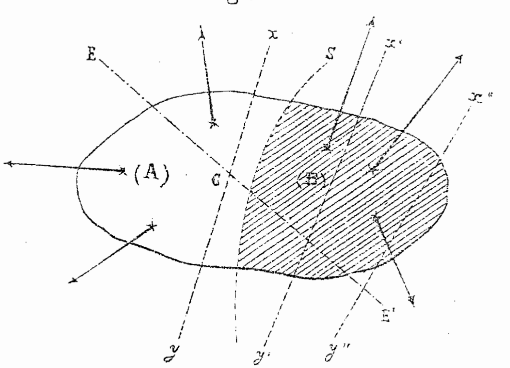
La esperiencia demuestra que las fuerzas esteriores deforman siempre los cuerpos, pero esta deformacion es una funcion de las fuerzas esteriores i de las dimensiones del cuerpo; se comprende así que, esperimentalmente, se pueda calcular, de antemano, las dimensiones de un cuerpo, para que su deformacion sea comprendida entre ciertos límites determinados, cuando las fuerzas esteriores son dadas.

Este es el objeto principal de la ciencia de aplicacion llamada *resistencia de materiales.*

Aquí supondremos simplemente que un cuerpo está ya en equilibrio sólido i trataremos de determinar cuáles son las presiones i tensiones que soportan las barras hipotéticas del sólido invariable equivalente.

Esta determinacion puede concretarse al caso del *equilibrio absoluto*; en efecto, el movimiento de un cuerpo, en equilibrio sólido, es enteramente definido, cuando se conocen las fuerzas esteriores, puesto que el cuerpo se mueve como un sólido invariable; se conocen, por consiguiente, las fuerzas de inercia de todos los puntos i basta agregar estas últimas fuerzas a las fuerzas esteriores para pasar, del caso jeneral del equilibrio sólido, al caso del equilibrio absoluto.

Fig. 27



Consideremos, pues, un cuerpo en reposo, bajo la accion de algunas fuerzas esteriores; sustituyamos a este cuerpo el sólido invariable equivalente i supongamos que se corten todas las barras hipotéticas que atraviesan una superficie S (fig. 27); si la superficie S divide el cuerpo en dos partes (A) i (B), se podrá mantener una cualquiera de ellas, (A) por ejemplo, en equilibrio, si se aplica a cada barra cortada una fuerza igual a la presion o a la tension que esta barra soportaba por efecto de la presencia de (B).

El conjunto de estas presiones i tensiones debe por consiguiente satisfacer a *seis condiciones*, las cuales espresan que el sólido (A) está en equilibrio bajo la accion de las fuerzas esteriores que obran directamente sobre él i bajo la accion de las presiones i tensiones de las barras cortadas.

Como las fuerzas esteriores que obran directamente sobre (B) hacen equilibrio a las que obran sobre (A), el sistema de las presiones i tensiones que (B) ejercita sobre (A) al traves de la superficie S, es equivalente al sistema de las fuerzas esteriores que obran directamente sobre (B).

Se ve que el sistema mas sencillo equivalente a las presiones i tensiones que atraviesan una seccion S depende solo de la situacion respectiva de la seccion i de los puntos de aplicacion de las fuerzas esteriores; así, en la figura 27, las presiones i tensiones que atraviesan la seccion plana $x\,y$ son equivalentes a las que atraviesan la seccion S; miéntras tanto, la seccion $x'\,y'$ es atravesada por un sistema distinto de presiones i tensiones porque las fuerzas esteriores que obran a un lado i otro de $x'\,y'$ son distintas de las que obran a un lado i otro de $x\,y$. La seccion $x''\,y''$, por ejemplo, deja a un lado una porcion del cuerpo que no está sometida a ninguna fuerza esterior, luego el sistema de las presiones i tensiones que atraviesan esta seccion es equivalente a cero.

Definiciones

Sea (fig. 27) EE' el eje central del sistema de las fuerzas que obran a un lado de la seccion plana $x\,y$, el punto C en que este eje central corta el plano $x\;y$ se llama *centro de presion* de la seccion $x\,y$.

Sea R la resultante de traslacion i G el eje del par resultante de las fuerzas consideradas en un punto del eje central; la proyeccion de R sobre la normal a $x\,y$ se llama *presion* o *tension normal* i la proyeccion de R sobre $x\,y$ es el *esfuerzo constante*; la proyeccion de G sobre la normal a xy es el eje del par de *torsion* i su proyeccion sobre $x\,y$, el eje del par de *flexion*.

SISTEMAS ARTICULADOS

Polígono de Varignon

Dos cuerpos, articulados entre sí, tienen un punto jeométrico comun; este punto se llama *centro de articulacion.* Si uno cualquiera de los dos cuerpos es fijo, el único movimiento que puede tomar el otro es una rotacion al rededor del centro de articulacion.

Segun esta definicion, la accion de cada cuerpo sobre el otro es equivalente a la accion de una fuerza, aplicada en el centro de articulacion i un cuerpo, articulado con varios otros, puede ser considerado como libre, si en los centros de articulacion se aplican fuerzas convenientes.

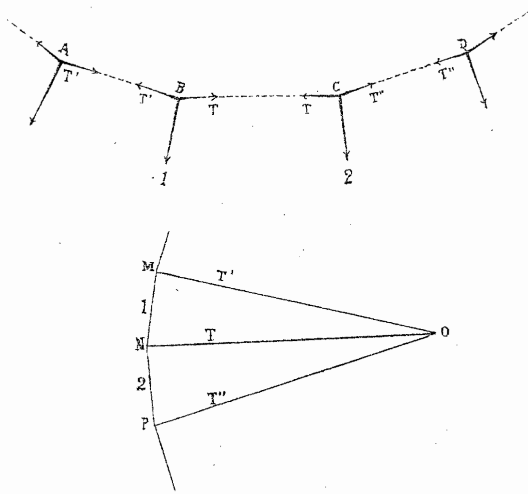
Consideremos una sucesion de cuerpos articulados entre sí; supongamos que cada centro de articulacion reuna solo dos cuerpos i que las fuerzas esteriores obren indistintamente sobre los cuerpos i los centros de articulacion; se trata de buscar las condiciones de equilibrio de este sistema articulado.

Supongamos el sistema en equilibrio: cada uno de los cuerpos articulados que lo constituyen tiene la facultad de poder jirar al rededor de la recta que une sus dos centros de articulacion; luego, como el equilibrio existe, por hipótesis, es necesario, en primer lugar, que las fuerzas esteriores que obran separadamente sobre cada cuerpo sean equivalentes a dos fuerzas, aplicadas en los centros de articulacion correspondientes.

Es una primera condicion necesaria; ahora el equilibrio del sistema articulado no será alterado si se reemplaza cada cuerpo por dos fuerzas convenientes, aplicadas en sus dos articulaciones i por una ligazon cualquiera que obligue estos puntos a conservar una distancia invariable.

Sean entónces A, B, C, D (fig. 28) algunos de los centros de articulacion; estos puntos pueden ser considerados ahora como sometidos a fuerzas esteriores determinadas; ademas, sus distancias consecutivas deben permanecer invariables. La ligazon, que obliga los dos puntos A i B a conservar una distancia invariable, es equivalente a la accion de dos fuerzas, aplicadas en A i B, dirijidas segun AB, iguales i de sentido opuesto; sea T' la intensidad comun de estas fuerzas; sean tambien T i T'' las fuerzas de ligazon que mantienen invariables las distancias BC, CD. Cada centro de articulacion es ahora sometido a la accion de tres fuerzas: el punto B, por ejemplo, es sometido a las fuerzas de ligazon T' T i a una fuerza esterior 1.

Fig. 28



Como este punto está, por hipótesis, en reposo, las tres fuerzas T, T', 1 deben estar en un mismo plano i hacerse equilibrio. Tracemos, por un punto cualquiera, M, un vector igual a la fuerza 1 i, por los puntos M i N, dos rectas respectivamente paralelas a T' i T; estas dos rectas se cortarán en un punto O i las fuerzas T' i T serán representadas precisamente por los vectores OM i NO. Sea ahora NP otro vector igual a la fuerza 2; como el punto C está tambien en reposo, la fuerza T'' deberá ser representada por el vector PO i así en seguida.

El polígono MNP... se llama *polígono de las fuerzas*; el punto O es su polo i las rectas OM, ON, OP... los *radios polares;* el polígono articulado $ABCD$..., en equilibrio, se llama *polígono de Varignon* en recuerdo del autor de esta teoría.

Llegamos, por consiguiente, al siguiente resultado: los lados del polígono de Varignon son respectivamente paralelos a los radios polares correspondientes del polígono de las fuerzas.

A un lado como BC, comprendido entre las fuerzas 1 i 2, corresponde el radio polar ON que pasa por la interseccion de los lados 1 i 2 del polígono de las fuerzas.

Una vez construido el polígono de las fuerzas, la direccion de los radios polares depende únicamente de la posicion del polo.

Supongamos que las dos estremidades de un polígono articulado deban coincidir con dos puntos dados; su forma de equilibrio será enteramente determinada; en efecto, elejimos arbitrariamente la situacion del polo i sean x, y, z sus coordenadas; a esta posicion del polo corresponderá un polígono de Varignon i, si su primer vértice coincide con uno de los puntos dados, su último vértice será enteramente determinado; luego las coordenadas ξ, η, ζ de este último vértice satisfacen a ecuaciones de la forma

$$\xi = f_1\,(x, y, z)$$
$$\eta = f_2\,(x, y, z)$$
$$\zeta = f_3\,(x, y, z)$$

Para que el último vértice pase por un punto determinado, de coordenadas ξ_0, η_0, ζ_0, es necesario que las coordenadas del polo satisfagan a las ecuaciones

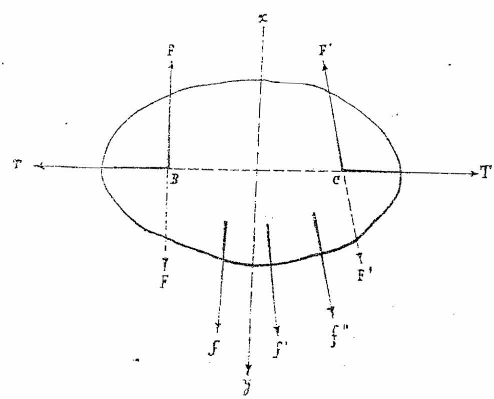
$$f_1\,(x, y, z) = \xi_0$$
$$f_2\,(x, y, z) = \eta_0$$
$$f_3\,(x, y, z) = \zeta_0$$

Son tres ecuaciones entre tres incógnitos, luego la posicion del polo es enteramente determinada, como asímismo la forma correspondiente del polígono de Varignon. Las funciones f_1 f_2, f_3, dependen de los datos particulares del problema; se comprende que en algunos casos el problema no tendrá solucion real i que, en otros, habrán varias soluciones distintas; sin embargo, éstas estarán siempre en número finito.

Presiones i tensiones de los cuerpos del sistema articulado

Consideremos (fig. 29) el cuerpo, cuyos centros de articulacion son los puntos B i C de la figura (28); sean, f, f', f'' las fuerzas esteriores directamente aplicadas sobre este cuerpo; F i F' dos fuerzas equivalentes a estas últimas i aplicadas en B i C. El equilibrio del cuerpo no será alterado, ni las presiones i tensiones modificadas, si, en los puntos B i C, se aplican las fuerzas $F, -F$ i $F', -F'$.

Fig. 29



La fuerza F, con la fuerza directamente aplicada en el centro de articulacion B i la fuerza análoga a F, relativa al otro cuerpo articulado en B, dan la resultante 1 de la figura 28; el punto B está sometido a la accion de esta resultante i de la ligazon T' que la obliga a quedar a distancia invariable de A (fig. 28); estas dos fuerzas son equilibradas por la fuerza T, dirijida desde B hácia C, luego la reaccion de la articulacion B sobre el cuerpo, i la fuerza F se componen en una fuerza dirijida segun BC, en el sentido de C hácia B. Del mismo modo, la reaccion de la articulacion C sobre el cuerpo i la fuerza F' se componen en una fuerza igual i de sentido opuesto a T. Finalmente, el cuerpo articulado puede ser considerado como si estuviera libre, bajo la accion de las fuerzas f, f', f'', $-F$, $-F'$ i las dos reacciones T. Las presiones i tensiones que atraviesan una seccion plana cualquiera x, y se obtendrán, por consiguiente, como se ha indicado mas arriba.

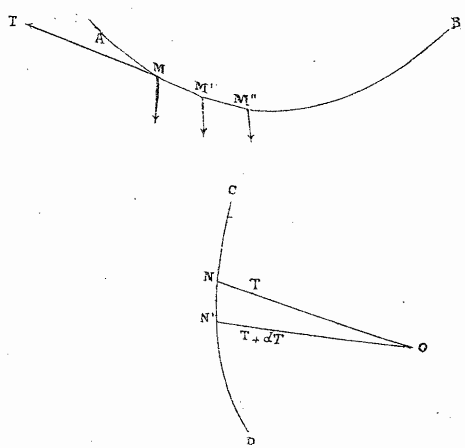
Si no hubieran fuerzas esteriores, aplicadas directamente sobre el cuerpo, éste estaria solo sometido a la accion de las dos reacciones T, las cuales corresponden, en la figura (29), a una tension del cuerpo; las presiones i tensiones que atraviesan todas las secciones hechas entre B i C son entónces equivalentes a una misma tension resultante T i los centros de presion estan todos situados sobre la recta BC.

Prácticamente el cuerpo BC podria ser, en el caso considerado, un cuerpo flexible e inextensible como un alambre, una cuerda o un hilo; de ahí el nombre de *polígono funicular* adoptado tambien para designar la forma de equilibrio de un polígono articulado.

Curvas funiculares

Se llama *curva funicular* la forma de equilibrio de un hilo homojéneo e inextensible cuyos elementos estan sometidos a fuerzas esteriores infinitamente pequeñas. Este hilo en equilibrio puede ser considerado como un sistema articulado, cuyos centros de articulacion estan situados a una distancia infinitamente pequeña ds unos de otros. Las fuerzas esteriores que obran sobre cada elemento ds son equivalentes a dos fuerzas aplicadas

Fig. 30



en los centros de articulacion correspondientes, de tal manera que cada elemento se puede reemplazar por una ligazon cualquiera, equivalente a la condicion que la distancia ds de los puntos de articulacion consecutivos quede invariable i por dos fuerzas aplicadas en los centros de articulacion.

Sean, (fig. 30), MM' i $M'M''$ dos elementos consecutivos de la curva funicular, ds su lonjitud comun, ρ la masa de la unidad de lonjitud del hilo; la masa de cada elemento ds será $\rho\, ds$.

Sea γ la aceleracion que un punto material, situado en M, recibiria por efecto de las fuerzas esteriores; la fuerza que obrará en el centro de articulacion M' será $\rho\gamma\, ds$.

El polígono de las fuerzas será una curva continua CD; ésta se llama *curva de las fuerzas*; sea O el polo i ON, ON' los radios polares, respectivamente paralelos a MM' i $M'M''$; en el triángulo NON' el lado NN' es igual a la fuerza $\rho\gamma\, ds$ i los lados ON, $N'O$ representan las tensiones de los lados $M'M$ i $M'M''$ del polígono funicular; sean T i $T+dT$ estas tensiones, se tendrá

$$\overline{T+dT} = \overline{T} + \overline{\rho\gamma\, ds}$$

En el límite, la tanjente en un punto de la curva funicular será paralela al radio polar del punto conjugado de la curva de las fuerzas i la tanjente en un punto de las fuerzas será paralela a la línea de accion de la fuerza que obra en el punto conjugado de la curva funicular.

Estas propiedades jeométricas son análogas a los que ligan la trayectoria de un punto a la curva de las fuerzas, luego, las propiedades jeométricas de las trayectorias se aplican directamente a las curvas funiculares.

Así, por ejemplo, *si la curva de las fuerzas es plana, la trayectoria es plana i recíprocamente.*

Ecuaciones diferenciales de las curvas funiculares

Consideremos un sistema de tres ejes rectangulares cuyo oríjen es el polo O; sean x, y, z las coordenadas de un punto M

de la curva funicular i ξ, η, ζ las coordenadas del punto conjugado N de la curva de las fuerzas, T la tension en el punto considerado i γ_x, γ_y, γ_z las proyecciones de γ sobre los tres ejes.

Escribamos que el radio polar ON es paralelo a la tanjente en M a la curva funicular e igual a la tension T, tendremos

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= -T\frac{dx}{ds} \\ \eta &= -T\frac{dy}{ds} \\ \zeta &= -T\frac{dz}{ds} \end{aligned} \right.$$

Se ha adoptado el signo ménos para indicar que la tension en M es una fuerza de sentido opuesto a ds.

Ahora, el elemento NN' de la curva de las fuerzas es igual a $\rho\gamma\, ds$ luego

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\xi &= \rho\, \gamma_x\, ds \\ d\eta &= \rho\, \gamma_y\, ds \\ d\zeta &= \rho\, \gamma_z\, ds \end{aligned} \right.$$

De las ecuaciones (1) i (2) se deduce inmediatamente

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + \rho\, \gamma_x\, ds &= 0 \\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \rho\, \gamma_y\, ds &= 0 \\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + \rho\, \gamma_z\, ds &= 0 \end{aligned} \right.$$

Son tres ecuaciones entre los elementos que definen la curva funicular, las cantidades dadas γ_x γ_y γ_z i la tension incógnita T, luego la eliminacion de T da las ecuaciones de la curva funicular.

Sean α, β, γ los cosenos directores de la tanjente en un punto de la curva funicular, λ, μ, ν los cosenos directores de la normal principal i R el radio de curvatura; las ecuaciones (3) podrán trasformarse en las siguientes

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha \frac{dT}{ds} + \lambda \frac{T}{R} + \rho \gamma_x = 0 \\ &\beta \frac{dT}{ds} + \mu \frac{T}{R} + \rho \gamma_y = 0 \\ &\gamma \frac{dT}{ds} + \nu \frac{T}{R} + \rho \gamma_z = 0 \end{aligned} \right.$$

Luego

$$\frac{dT}{ds} + \rho (\alpha \gamma_x + \beta \gamma_y + \gamma \gamma_z) = 0$$

Caso en que la fuerza es siempre normal al hilo

Si la fuerza es siempre normal al elemento de curva se tiene, en todos los puntos de la curva funicular

$$\alpha \gamma_x + \beta \gamma_y + \gamma \gamma_z = 0$$

Luego

$$T = \text{Const.}$$

El mismo resultado podia deducirse de la consideracion de la curva de las fuerzas; en efecto, en el caso considerado, esta última curva es tal que su tanjente en un punto cualquiera es normal al radio vector, luego el radio vector de esta curva o la tension es constante.

Sea T_0 el valor constante de T; las ecuaciones (4) se reducen a las siguientes

$$\lambda \frac{T_0}{R} + \rho \gamma_x = 0$$

$$\mu \frac{T_0}{R} + \rho \gamma_y = 0$$

$$\nu \frac{T_0}{R} + \rho \gamma_z = 0$$

Se ve que las tres proyecciones γ_x, γ_y, γ_z de la aceleracion γ son proporcionales a λ, μ, ν, luego la normal principal a la curva funicular tiene la misma direccion que la aceleracion γ; se tiene ademas

$$(5) \qquad \frac{T_0}{R} + \rho\,\gamma = 0$$

Consideremos, por ejemplo, el caso de un hilo tendido sobre una superficie S; la reaccion de la superficie sobre el hilo podrá ser considerada, en cada punto, como normal a la superficie i, luego tambien, como normal al hilo; la tension en todos los puntos del hilo será, por consiguiente, constante. Ahora, la normal principal en todos los puntos de la curva de equilibrio del hilo debe ser dirijida segun la reaccion de la superficie, es decir, debe ser normal a la superficie S, luego esta curva de equilibrio es una *línea jeodésica* de la superficie S.

Segun la fórmula (5). cada elemento ds del hilo será sometido por efecto de la superficie, a una fuerza F, tal que

$$F = \rho\,\gamma\,ds = -\frac{T_0\,ds}{R}$$

Esta fuerza varia en razon inversa del radio de curvatura R en el punto considerado; se comprende así por qué se corta un hilo con el filo de un cuchillo, en efecto, en un punto del hilo el radio de curvatura R es mui pequeño i la reaccion correspondiente mui grande.

Un hilo tendido dibuja, sobre la esfera, un arco de círculo máximo; sobre un cilindro de revolucion, una hélice; i, sobre una superficie desarrollable, una curva cuyo desarrollo es una recta.

Curva de los puentes suspendidos

Consideremos el caso teórico de un número infinito de machones equidistantes; cada punto de articulacion de la curva funicular será sometido a una fuerza vertical proporcional a la distancia dx de los machones.

Sea ds un elemento de la curva funicular; la fuerza que hemos designado por $\rho\gamma\ ds$ es igual ahora a $K\,dx$, (K es una constante igual a la fuerza vertical que obra sobre la unidad de lonjitud horizontal.)

La curva de las fuerzas es, en este caso, una recta vertical; luego la curva funicular será contenida en un plano vertical; elejiremos dos ejes de coordenadas situadas en este plano: uno OX horizontal, el otro OY vertical i dirijido hácia arriba; las ecuaciones (3) se reducen entónces a las dos siguientes.

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right)-K\,dx=0$$

De la primera se deduce

$$T\frac{dx}{ds}=T_0$$

T_0 es la tension en el punto de la curva cuya tanjente es horizontal; la segunda ecuacion da entónces

$$T_0\frac{d^2y}{dx^2}=K$$

Luego

$$y=\frac{K}{2\,T_0}x^2+Cx+C'$$

Es la ecuacion de una parábola de eje vertical.

Si el oríjen de las coordenadas está en el punto mas bajo de la curva, se tiene simplemente

$$y=\frac{K}{2\,T_0}x^2$$

La tension, en un punto cualquiera de la curva será

$$T=T_0\frac{ds}{dx}=T_0\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{T_0^2+K^2x^2}$$

Esta fórmula se deduce tambien inmediatamente de la consideracion del polígono de las fuerzas.

La tension T_0 está en relacion con la flecha del cable; sea en efecto $2a$ la distancia de los puntos de suspension situados por hipótesis en un mismo plano horizontal i f la flecha, se tiene

$$\frac{K}{2\,T_0} = \frac{y}{x^2} = \frac{f}{a^2}$$

Luego

$$T_0 = \frac{K\,a^2}{2\,f}$$

Se ve que T_0 varia en razon inversa de la flecha f.

Catenaria

La catenaria es la forma de equilibrio de un hilo suspendido por sus dos estremidades i sometido a la accion de la pesantez. Sea p el peso de la unidad de lonjitud del hilo; la curva de las fuerzas es una recta vertical, luego la catenaria es contenida en un plano vertical; elejiremos los mismos ejes como en el caso anterior i tendremos

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - p\,ds = 0$$

De la primera se deduce

$$T\frac{dx}{ds} = T_0$$

I de la segunda

$$T_0\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) = p\,ds = p\,dx\,\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Hagamos

$$\frac{dy}{dx} = u$$

$$\frac{p}{T_0} = c$$

Tendremos la ecuacion diferencial

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = c\,dx$$

Luego

$$L\,(u + \sqrt{1+u^2}) = cx + c'$$

De ahí se deduce

$$u + \sqrt{1+u^2} = e^{cx+c'}$$

I tambien

$$\sqrt{1+u^2} - u = e^{-cx-c'}$$

Luego

$$u = \frac{1}{2} e^{cx+c'} - \frac{1}{2} e^{-cx-c'} = \frac{dy}{dx}$$

Supongamos que el orijen de las coordenadas está en el punto mas bajo de la curva, se deberá tener $c' = o$, luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} e^{cx} - \frac{1}{2} e^{-cx}$$

$$y = \frac{1}{2c} e^{cx} + \frac{1}{2c} e^{-cx} + \text{Const.}$$

Como $y=0$ cuando $x=0$, la constante de integracion debe ser igual a $-\frac{1}{c}$ luego

$$y = \frac{1}{2c}\left(e^{cx} + e^{-cx} - 2\right) = \frac{1}{2c}\left(e^{\frac{cx}{2}} - e^{-\frac{cx}{2}}\right)^2$$

La curva es simétrica respecto de la vertical. Reemplacemos finalmente c por su valor i tendremos

$$y = \frac{T_0}{2p}\left(e^{\frac{px}{2T_0}} - e^{-\frac{px}{2T_0}}\right)^2$$

Si la tension T_0 es mui grande se puede reemplazar los esponenciales por sus desarrollos en serie i se obtiene simplemente

$$y = \frac{p}{2T_0}x^2$$

Es una parábola de eje vertical.

A. OBRECHT.

(Continuará).