# MECÁNICA RACIONAL

## PRIMERA PARTE

### DEL PUNTO MATERIAL

*(Continuacion)*

Sea $h$ la distancia $CH$; en el momento t=0, los primeros miembros de las ecuaciones (10) son nulos i se tiene $x=0$, $y=0$, $z=h$; luego

$$0=2\,m\omega\,h\cos\lambda+C_1$$

$$0=C_2$$

$$0=C_3$$

Por consiguiente

$$m\,\frac{dx}{at}=2\,m\omega\,y\,\mathrm{sen}\,\lambda-2\,m\omega\,(h-z)\cos\lambda$$

$$m\,\frac{dy}{dt}=-2\,m\omega\,x\,\mathrm{sen}\,\lambda$$

$$m\,\frac{dz}{dt}=-mgt-2\,m\omega\,x\cos\lambda$$

Sustituimos estos valores en las ecuaciones (9) i despreciamos $\omega^2$, tendremos

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-2\,m\omega\,gt\cos\lambda$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg$$

Luego

$$x=-\frac{\omega}{3}gt^3\cos\lambda$$

$$y=0$$

$$z=h-\frac{1}{2}gt^2$$

Así, el punto, en su caida, se mueve en el plano $ZOX$ i encuentra el plano horizontal $XOY$ en el punto de coordenadas

$$y=0$$

$$x=-\frac{2}{3}\omega\,h\sqrt{\frac{2\,h}{g}}\cos\lambda$$

Se ve que el punto de caida se encuentra al este del punto $C$ que es el pié de la vertical del punto $H$.

A Freiberg, por 51° de latitud norte, se ha hecho la esperiencia de dejar caer un cuerpo desde una altura de $158^m,5$; se ha observado una deviacion de $0^m,0283$ hácia el este; la fórmula obtenida mas arriba da, como desviacion, $0^m,0276$. La concordancia, como se ve, es mui suficiente.

### PÉNDULO DE FOUCAULT

Consideremos un péndulo simple de lonjitud $l$ cuya estremidad fija coincide con $C$; la estremidad móvil será un punto material, sometido a la gravedad i a la tension $N$ del hilo; el movimiento de este punto satisfará a las ecuaciones (9) en las cuales

$$X_t = -N\frac{x}{l}$$

$$Y_t = -N\frac{y}{l}$$

$$Z_t = -N\frac{z}{l}$$

Para mas simplicidad, supondremos las oscilaciones de poca amplitud i despreciaremos las cantidades $\left(\frac{x}{l}\right)^2$ i $\left(\frac{y}{l}\right)^2$; con este órden de aproximacion, se deberá considerar $z$ como una constante igual a $l$, puesto que $z$ es igual a

$$l\sqrt{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2-\left(\frac{y}{l}\right)^2}$$

Las derivadas de $z$ serán tambien iguales a cero; las ecuaciones (9) darán por consiguiente

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{l} + 2m\omega\frac{dy}{dt}\operatorname{sen}\lambda$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{l} - 2m\omega\frac{dx}{dt}\operatorname{sen}\lambda$$

$$0 = -N - mg - 2m\omega\frac{dy}{dt}\cos\lambda$$

Despreciaremos tambien los productos de $\frac{x}{l}$ e $\frac{y}{l}$ por $\omega$, entónces si, en las dos primeras ecuaciones, se reemplaza $N$ por su valor deducida de la tercera, se obtendrá simplemente

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\dfrac{dy}{dt}\operatorname{sen}\lambda + \dfrac{g}{l}x = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\dfrac{dx}{dt}\operatorname{sen}\lambda + \dfrac{g}{l}y = 0 \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones dan el movimiento de la proyeccion, en el plano $XOY$, de la extremidad del péndulo; designaremos esta proyeccion por $M$.

El punto $M$ se mueve, respecto del sistema $XOY$, como un punto material, de masa unidad, i sometido a dos fuerzas: una normal a la velocidad $v$ e igual a $2\ \omega\ v$ sen $\lambda$, la otra dirijida segun el radio vector $r$ e igual a $\frac{g}{l}\, r$.

Consideremos en el plano $XOY$ dos ejes $O\xi$, $O\eta$, animados respecto de los primeros de una rotacion de velocidad angular constante $\omega' = -\omega$ sen $\lambda$; para obtener el movimiento de $M$, respecto del sistema móvil, aplicaremos las fórmulas (5); sean $X'$, $Y'$ las proyecciones sobre $O\xi$, $O\eta$ de las fuerzas que obran sobre el punto considerado, se tendrá

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= X' + \omega'^2\xi + 2\ \omega'\frac{d\eta}{dt} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= Y' + \omega'^2\eta - 2\ \omega'\frac{d\xi}{dt} \end{aligned} \right.$$

Determinemos $X'$, $Y'$: sea $v'$ la velocidad relativa de $M$ respecto del sistema $\xi O\eta$; $v'$ difiere de $v$ de una cantidad del órden de $\omega$, luego la fuerza $2\ \omega\ v$ sen $\omega$ puede reemplazarse por $2\ \omega\ v'$ sen $\omega$ o $-2\omega' v'$ i sus dos proyecciones sobre $O\omega$ i $O\eta$ son

$$-2\ \omega'\frac{d\eta}{dt}, \qquad 2\ \omega'\frac{d\xi}{dt}$$

Por otra parte, las proyecciones de la fuerza $\frac{g}{l}\, r$ son $-\frac{g}{l}\ \xi$, $-\frac{g}{l}\eta$, luego

$$X' = -2\ \omega'\frac{d\eta}{dt} - \frac{g}{l}\xi$$

$$Y' = +2\ \omega'\frac{d\xi}{dt} - \frac{g}{l}\eta$$

Substituimos en (12) i despreciamos $\omega'^2$ tendremos simplemente

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\xi$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\eta$$

Sea todavía

$$\frac{g}{l} = K^2$$

Las soluciones de las dos ecuaciones diferenciales son

$$\xi = A \cos Kt + B \operatorname{sen} Kt$$

$$\eta = A' \cos Kt + B' \operatorname{sen} Kt$$

Para determinar las constantes supondremos que, en el momento $t=0$, el punto estaba situado sobre el eje $O\xi$, a la distancia $r_0$ del oríjen, i en reposo absoluto; su velocidad relativa era entónces normal al radio vector e igual a

$$r_0\omega \operatorname{sen} \lambda$$

Segun esto, se debe tener, en el momento $t=0$

$$\xi = r_0 \qquad \frac{d\xi}{dt} = 0$$

$$\eta = 0 \qquad \frac{d\eta}{dt} = r_0\, \omega \operatorname{sen} \lambda$$

De ahí se deduce

$$A = r_0 \qquad B = 0$$

$$A' = 0 \qquad B' = \frac{r_0\omega \operatorname{sen} \lambda}{K}$$

Luego

$$\xi = r_0 \cos Kt$$

$$\eta = r_0 \frac{\omega \operatorname{sen} \lambda}{K} \operatorname{sen} Kt$$

Estas ecuaciones representan una elipse referida a sus ejes; las lonjitudes de estos ejes son respectivamente $r_0$ i $r_0 \frac{\omega \text{ sen } \lambda}{K}$; ademas el punto $\xi$, $\eta$ describe esta elipse en un tiempo $T$ tal que

$$KT = 2\pi$$

O bien

$$T = \frac{2\pi}{K} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

En resúmen, la estremidad del péndulo describe sensiblemente una elipse que jira en su plano, con una velocidad angular igual a $-\omega$ sen $\lambda$, es decir, en el sentido este-suroeste para los puntos del hemisferio norte i en el sentido inverso para los del hemisferio sur.

Estos resultados han sido verificados por primera vez por Foucault en su célebre esperiencia del Panteon. Hace pocos años, en 1889, se hizo una esperiencia análoga en el salon de la Universidad de Santiago, con un péndulo de 20 metros de largo.

La amplitud $r_0$ de la oscilacion inicial era igual a 1 metro; se obtiene entónces

$$r_0 \frac{\omega \text{ sen } \lambda}{K} = r_0\, \omega \text{ sen } \lambda \sqrt{\frac{l}{g}} = 0^{mm},057$$

De tal manera que la elipse móvil tenia sus ejes respectivamente iguales a $1^m$ i $0^{mm},057$; era prácticamente una recta; el péndulo parecia oscilar en un plano; este plano debia jirar al rededor de la vertical con una velocidad angular $\omega$ sen $\lambda =$ 0,000.0402; es decir, debia dar una vuelta entera en 43 horas, 26 minutos o bien describir un ángulo de 8° 17′ en una hora i en el sentido oeste-sur-este.

Estos resultados se averiguaron durante las primeras horas del movimiento.

# SEGUNDA PARTE

## DE LOS SISTEMAS MATERIALES

## CAPÍTULO I

### TEOREMAS FUNDAMENTALES

*Un sistema material es la reunion de una infinidad de puntos materiales.* Esta definicion se estiende a todos los cuerpos de naturaleza: sólidos, líquidos i gases i no depende de la manera como estan constituidos estos cuerpos.

Los mismos átomos que la química supone indivisibles son cuerpos de dimensiones estremadamente pequeñas pero *finitas* i se pueden considerar tambien como la reunion de una infinidad de puntos materiales.

Cuando un sistema material se mueve en el espacio, los pun- materiales que lo constituyen no obedecen directamente a la accion de las impulsiones que obran sobre el sistema, porque el movimiento de cada punto es constantemente alterado por la presencia de los puntos vecinos, como si estos puntos estuvieran, a cada instante, sometidos á acciones recíprocas. De ahí la necesidad de distinguir dos clases de acciones: las *acciones esteriores* que emanan de causas esteriores al sistema, i las *acciones interiores* que se desarrollan entre los puntos mismos que constituyen el sistema.

No tenemos ningun dato sobre la intensidad i la direccion de las impulsiones elementales que representan, a cada instante, las acciones interiores; sin embargo debemos admitir que estas impulsiones satisfacen al principio de la igualdad de la accion i de la reaccion; es decir que, a cada una de ellas, corresponde otra simultánea, igual i de sentido contrario, situada sobre la misma línea de accion.

Estos grupos de dos impulsiones simultáneas son caracterizados por las dos propiedades siguientes:

1.ª La suma de sus proyecciones sobre un eje cualquiera es nula;

2.ª La suma de sus momentos respecto a un eje cualquiera es tambien nula.

La primera propiedad espresa que las dos impulsiones son iguales, paralelas i de sentido opuesto i la segunda que estan situadas sobre la misma línea de accion. Estas son, por consiguiente, las únicas propiedades independientes de la intensidad i direccion propia de cada una de las impulsiones interiores.

Sean $m$ la masa de uno de los puntos $M$ del sistema, $v$ su velocidad en el momento $t$ i $v+dv$ su velocidad en el momento $t+dt$; $Fdt$ la impulsion elemental que las acciones esteriores imprimen a este punto, durante el tiempo $dt$; $f_i\, dt$ la impulsion elemental que, durante el mismo tiempo, el punto $M$ recibe de otro punto del mismo sistema; designemos respectivamente, con los símbolos $P^t$ i $M^t$, la proyeccion i el momento de un vector, tendremos

$$P^t\, m\,(v+dv)=P^t\, mv+P^t\, Fdt+\Sigma\, P^t f_i\, dt$$

$$M^t\, m\,(v+dv)=M^t\, mv+M^t\, Fdt+\Sigma\, M^t f_i\, dt$$

Sumemos las ecuaciones análogas, referentes a todos los puntos del sistema: en los segundos miembros de estas sumas las impulsiones $f_i\, dt$ desaparecerán, segun lo que se ha establecido mas arriba. Quedará por consiguiente

$$\Sigma\, P^t\, m\,(v+dv)=\Sigma\, P^t\, mv+\Sigma\, P^t\, Fdt$$

$$\Sigma\, M^t\, m\,(v+dv)=\Sigma\, M^t\, mv+\Sigma\, M^t\, Fdt$$

Las espresiones $\Sigma\, P^t\, mv$ i $\Sigma\, M^t\, mv$ son funciones del tiempo $t$ i cuando $t$ se cambia en $t+dt$, estas espresiones se cambian en $\Sigma\, P^t\, m\,(v+dv)$ i $M^t\, m\,(v+dv)$; ademas, en los segundos miembros, se podrá sacar $dt$ fuera del signo $\Sigma$; podremos escribir por consiguiente

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\,\Sigma\, P^t\, mv}{dt} &= \Sigma\, P^t\, F \\ \frac{d\,\Sigma\, M^t\, mv}{dt} &= \Sigma\, M^t\, F \end{aligned}\right.$$

Estas ecuaciones son comunes a todos los sistemas materiales porque, en ellas, no figuran las fuerzas interiores; ademas el eje fijo de las proyecciones i de los momentos tiene una direccion arbitraria.

Si el movimiento del sistema se refiere a tres ejes de coordenadas rectangulares, cada una de las ecuaciones (1) da tres ecuaciones, referentes a los tres ejes de coordenadas; designemos por un índice las proyecciones i los momentos que se refieren a cada uno de los ejes; tendremos

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d\,\Sigma\, P^t_x\, mv}{dt} = \Sigma\, P^t_x\, F & \dfrac{d\,\Sigma\, M^t_x\, mv}{dt} = \Sigma\, M^t_x\, F \\[2ex] \dfrac{d\,\Sigma\, P^t_y\, mv}{dt} = \Sigma\, P^t_y\, F & \dfrac{d\,\Sigma\, M^t_y\, mv}{dt} = \Sigma\, M^t_y\, F \\[2ex] \dfrac{d\,\Sigma\, P^t_z\, mv}{dt} = \Sigma\, P^t_z\, F & \dfrac{d\,\Sigma\, M^t_z\, mv}{dt} = \Sigma\, M^t_z\, F \end{array} \right.$$

Son *seis* ecuaciones, comunes a todos los sistemas materiales. Estas ecuaciones no bastan, en jeneral, para determinar el movimiento del sistema; son solo seis relaciones a las cuales deben satisfacer todos los sistemas materiales.

### COSA EN QUE LAS FUERZAS ESTERIORES SON NULAS O SE HACEN EQUILIBRIO

Se dice que *un sistema de fuerzas está en equilibrio* o que las fuerzas que obran sobre un sistema material *se hacen equilibrio* cuando, respecto de un eje cualquiera, la suma de las proyecciones i la suma de los momentos de las fuerzas son respectivamente nulas. Así, por ejemplo, las fuerzas que, en un momento cualquiera, corresponden a las acciones interiores se hacen equilibrio.

Si las fuerzas esteriores son nulas o si estas fuerzas se hacen equilibrio, los segundos miembros de las ecuaciones (1) son nulos i se obtiene

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma\, P^t\; mv = \text{Const.} \\ \Sigma\, M^t\; mv = \text{Const.} \end{array} \right.$$

Llamemos *sistemas de vectores equivalentes* los sistemas de vectores tales que, respecto de un eje cualquiera, la suma de las proyecciones de los vectores de cada sistema i la suma de sus momentos, sean respectivamente iguales, podremos decir: *durante el movimiento de un sistema material, abandonado a sí mismo, o sometido a fuerzas esteriores en equilibrio, el sistema de vectores que, a cada momento, representa las cantidades de movimiento de todos los puntos, queda siempre equivalente a sí mismo.*

## DE LAS PERCUSIONES.—SIGNIFICACION DE LAS CONSTANTES QUE FIGURAN EN LAS FÓRMULAS (3)

Se llama jeneralmente *percusion* una impulsion de gran intensidad que obra durante un tiempo mui pequeño. La percusion, como la impulsion, tiene por medida la cantidad de movimiento que toma un punto material sometido, en el reposo, a la percusion considerada.

Teóricamente se supone que el tiempo durante el cual obra la percusion tiende hácia cero a medida que la intensidad o la fuerza de la percusion tiende hácia el infinito, de tal manera que *la percusion es una impulsion elemental de fuerza infinita.*

Consideremos, en primer lugar, un punto material de masa $m$, sometido a una percusion. Sea $\Delta t$ el intervalo infinitamente pequeño de tiempo durante el cual obra esta percusion; $\Delta t$ puede subdividirse en elementos $dt$, infinitamente pequeños respecto de $\Delta t$, luego el efecto de la percusion, durante el tiempo $\Delta t$, puede calcularse de la misma manera como el efecto de cualquiera otra fuerza continua.

Sea $v_0$ la velocidad del punto en el momento $t_0$ en que la percusion principia a obrar; consideremos un sistema de comparacion animado de una traslacion recta i uniforme de velocidad $v_0$; en el momento inicial $t_0$, el punto material está en reposo relativo, respecto del sistema de comparacion adoptado i el efecto de la percusion sobre el punto, en reposo relativo, es el mismo como si el punto estuviera en reposo absoluto. Si algunas fuerzas finitas obran sobre el punto, junto con la percusion, el efecto de estas fuerzas, durante el tiempo $\Delta t$, será de dar al punto una velocidad relativa del órden de $\Delta t$ i un cambio de lugar relativo del órden de $\Delta t^3$, luego el efecto de estas fuerzas, durante el tiempo $\Delta t$, puede despreciarse.

Sean, a un momento $t$ comprendido entre $t_0$ i $t_0+\Delta t$, $x, y, z$ las coordenadas del punto material, respecto del sistema de comparacion adoptado i $X$, $Y$, $Z$ las proyecciones de la fuerza de percusion; se tiene

$$m\frac{dx^2}{dt^2}=X$$

Luego

$$m\frac{dx^2}{dt^2}dt=X\,dt$$

I, como la velocidad relativa es nula en el momento $t_0$,

$$m\frac{dx}{dt}=\int_{t_0}^{t} Xdt$$

Sea $w$ la velocidad relativa del punto en el momento $t_0+\Delta t$ i $w_x$ la proyeccion de $w$ sobre $OX$, se tendrá

$$m\,w_x=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} Xdt$$

Consideremos una curva plana, cuyas ordenadas son los valores de $X$ i las abcisas los tiempos; la integral definida representa el área comprendida entre la curva, el eje de los tiempos i las ordenadas correspondientes a las abcisas $t_0$ i $t_0+\Delta t$; se comprende que, si las ordenadas $X$ tienden hácia el infinito a medida que $\Delta t$ tiende hácia cero, el área considerada podrá tener cierto límite finito; sea $I_x$ este límite, tendremos

$$m\,w_x=I_x$$

I del mismo modo

$$m\,w_y=I_y$$

$$m\,w_z=I_z$$

Sea $I$ un vector cuyas proyecciones son $I_x$, $I_y$, $I_z$; las ecuaciones obtenidas muestran que este vector $I$ es igual, en magnitud, direccion i sentido a $m\,w$.

Sea finalmente $v$ la velocidad del punto material cuando la percusion ha cesado de obrar, se tendrá

$$\overline{v} = \overline{v_0} + \overline{w}$$

O bien

$$\overline{mv} = \overline{m\,v_0} + \overline{m\,w} = \overline{m\,v_0} + \overline{I}$$

Así la cantidad de movimiento del punto, despues de la percusion, es la resultante jeométrica de su cantidad de movimiento inicial i de la cantidad de movimiento que mide la percusion.

*El punto material no se mueve durante la percusion.* Sea, en efecto, $\Delta x$ el incremento de $x$ durante el tiempo $\Delta t$ se tiene

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{dx}{dt}\,dt$$

La velocidad relativa del punto queda finita, durante el intervalo de tiempo $\Delta t$, i varia desde cero hasta $w$; luego la integral definida representa el área comprendida entre una curva, cuyas ordenadas son finitas, i dos ordenadas correspondientes a las abcisas $t_0$ i $t_0 + \Delta t$; esta área es pues del órden de $\Delta t$.

En resúmen, *una percusion cambia bruscamente la velocidad de un punto.*

Consideremos ahora un sistema material al reposo i supongamos que, a cierto momento inicial $t_0$, los puntos del sistema o algunos de ellos reciban percusiones; estas percusiones formarán un sistema de vectores i su medida será precisamente el sistema de las cantidades de movimiento de los puntos en el momento $t_0$. Si, en seguida, ninguna fuerza esterior obra sobre el sistema, el sistema de los vectores formado con las cantidades de movimiento de todos los puntos queda siempre equivalente a sí mismo i, por consiguiente tambien, siempre equivalente al sistema de las percusiones iniciales. De ahí se deduce que *los constantes que figuran en las fórmulas (3) representan respectiva-*

*mente, la suma de las proyecciones i la suma de los momentos de las percusiones iniciales.*

### CONSECUENCIA IMPORTANTE

Si, a cierto momento $t$, se da, a cada punto de un sistema en movimiento, una percusion igual i de sentido contrario a la cantidad de movimiento que posee, el sistema volverá al reposo; pero, en jeneral, este reposo será solo *instantáneo* porque, despues de estas percusiones, las acciones interiores obrarán sobre los puntos del sistema. Sea lo que fuera, el segundo sistema de percusiones es equivalente al sistema de las cantidades de movimiento, tomadas en sentido contrario; luego tambien, si no hai fuerzas esteriores, este sistema de percusion es equivalente al sistema de las percusiones iniciales, tomadas tambien en sentido contrario.

En otros términos, *el sistema de las percusiones que da su movimiento inicial a un sistema material i el sistema de las percusiones que pueden reponer, a un momento cualquiera, el sistema material en el reposo se hacen siempre equilibrio, cuando no obran fuerzas esteriores.*

El movimiento que toma el sistema material, despues de haber sido repuesto en el reposo instantáneo, o bien el movimiento que toma un sistema material sometido, desde el reposo, a percusiones que se hacen equilibrio, satisface entónces a las relaciones

$$\Sigma P \vdots mv = 0$$

$$\Sigma M \vdots mv = 0$$

Estas mismas ecuaciones son satisfechas cuando un sistema material es sometido desde el reposo a fuerzas finitas en equilibrio.

### TEOREMA DE LAS ÁREAS

Unamos todos los puntos de un sistema material a un punto $O$; los radios vectores describirán ciertas áreas; sea $OX$ un eje que pasa por el punto $O$ i $P$ un plano perpendicular a $OX$;

$da'$ la proyeccion, sobre el plano $P$, del área que describe, durante el tiempo $dt$, el radio vector de un punto de masa $m$, se tendrá

$$M_x^t\, mv = 2\, m \frac{da'}{dt}$$

Luego, para todos los puntos del sistema

$$\Sigma\, M_x^t\, mv = 2\, \Sigma\, m \frac{da'}{dt}$$

Supongamos que la suma de los momentos de las fuerzas esteriores respecto a $OX$ sea nula; el primer miembro de la ecuacion precedente será constante luego tambien

$$\Sigma\, m \frac{da'}{dt} = C$$

O bien

$$\Sigma\, ma' = Ct + C'$$

Así, en el caso considerado, *la suma de los productos de la masa de cada punto por la proyeccion, sobre el plano P, del área que describe su radio vector, varia proporcionalmente al tiempo.*

Si las fuerzas esteriores son nulas o si ellas se hacen equilibrio, la misma propiedad se verificará cualquiera que sea la orientacion del plano $P$.

Supongamos que las áreas descritas por los radios vectores se cuentan desde las posiciones que ocupan estos radios vectores en cierto momento inicial $t_0$, podremos escribir

$$\Sigma\, ma' = C\,(t - t_0)$$

Si en el momento inicial $t_0$ el sistema estaba en reposo i si en seguida las fuerzas que obran se hacen constantemente equilibrio, la suma de los momentos de las cantidades de movimiento es nula, luego $C$ es igual a cero i se tiene

$$\Sigma\, ma' = 0$$

Esta fórmula es característica del movimiento que toma un cuerpo cualquiera, sometido, desde el reposo, a sus acciones interiores i a acciones esteriores que se hacen equilibrio.

Supongamos en este caso que, en dos momentos $t_1$ i $t_2$, el cuerpo vuelve a tomar la misma forma, las dos posiciones del cuerpo serán jeneralmente distintas; en efecto, para que estas dos posiciones esten confundidas es necesario que la suma de las proyecciones, sobre un plano cualquiera, de las áreas descritas por los diferentes puntos durante el intervalo $t_2 - t_1$, sea rigorosamente igual a cero, lo que no sucede en jeneral.

### TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS

Cuando un punto material es sometido a una fuerza $f$, el medio aumento de su fuerza viva o el aumento de su enerjía cinética es igual al trabajo correspondiente de la fuerza $f$, de tal manera que, si $m$ es la masa del punto, $v_0$ i $v$ sus velocidades en los momentos $t_0$ i $t$ i $\mathfrak{T}f$ el trabajo de la fuerza $f$ durante el tiempo $t - t_0$, se tiene

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv^2 = \mathfrak{T}f$$

En el caso de un sistema material, la fuerza $f$ que obra sobre un punto cualquiera $M$ del sistema es la resultante de cierta fuerza esterior $F$ i de las fuerzas interiores que representan las acciones de los demas puntos del sistema sobre $M$. Sea, por ejemplo, $f_i\, dt$ la impulsion elemental que representa la accion, sobre $M$, del otro punto $N$ del sistema, tendremos

$$\mathfrak{T}f = \mathfrak{T}F + \Sigma\, \mathfrak{T}f_i$$

Bajo el signo $\Sigma$ se consideran todas las acciones interiores que obran sobre el punto considerado $M$. Así, para un punto cualquiera del sistema, se tiene

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0{}^2 = \mathfrak{T}F + \Sigma\, \mathfrak{T}f_i$$

Cada punto dará una ecuacion análoga i la suma de todas ellas será

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma\, \mathfrak{T} F + \Sigma\Sigma\, \bar{\mathfrak{T}} f_i$$

Es la espresion analítica del teorema de las fuerzas vivas: el primer miembro es el aumento de la enerjía cinética total del sistema durante cierto tiempo; este aumento es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas esteriores, i de las fuerzas interiores, durante el mismo intervalo de tiempo.

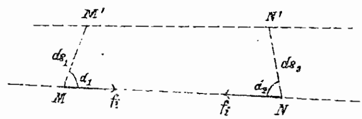
Las fuerzas esteriores emanan siempre, sea de un medio activo, sea de cuerpos esteriores al sistema i dotados de cierta enerjía potencial, el trabajo de estas fuerzas es, por consiguiente, igual a la cantidad de enerjía potencial esterior que ha sido *gastada;* del mismo modo, las fuerzas interiores emanan del sistema mismo i su trabajo es igual al gasto de cierta cantidad de enerjía potencial interior. El teorema de las fuerzas vivas puede por consiguiente, espresarse de la manera siguiente: *el aumento de la enerjía cinética de un sistema material, durante cierto intervalo de tiempo, es igual a la suma de los gastos de la enerjía potencial esterior i de la enerjía potencial interior.* En otros términos, *la suma de la enerjía cinética del sistema, de la enerjía potencial esterior i de la enerjía potencial interior, queda constante durante el movimiento del sistema.*

## ENERJÍA INTERIOR

La variacion de la enerjía interior de un sistema puede calcularse en funcion de las fuerzas interiores i de la variacion de las distancias respectivas de los puntos del sistema.

Sean (fig. 1), $M$ i $N$ las posiciones de dos puntos del sistema en el momento $t$, $r$ su distancia; $M'$, $N'$ las posiciones de los mismos puntos en el momento $t+dt$, $r+dr$ su distancia; $f_i\, dt$ las impulsiones elementales simultáneas que, en el tiempo $dt$, representan la accion de $M$ sobre $N$ i la reaccion de $N$ sobre $M$; $ds_1$, $ds_2$ los cambios de lugar $MM'$ i $NN'$; $\alpha_1$, $\alpha_2$ los ángulos que cada cambio de lugar hace con la direccion de la impulsion correspondiente.

Fig.1.




Proyectemos el polígono $MM'\ N'N$ sobre la direccion $MN$ i despreciemos los infinitamente pequeños de órden superior a $dt$, tendremos

$$r = ds_1 \cos \alpha_1 + r + dr + ds_2 \cos \alpha_2$$

O bien

$$ds_1 \cos \alpha_1 + ds_2 \cos \alpha_2 = -dr$$

Multipliquemos los dos miembros por $f_i$, tendremos

$$f_i\ ds_1 \cos \alpha_1 + f_i\ ds_2 \cos \alpha_2 = -f_i\ dr$$

El primer miembro es precisamente el trabajo elemental del par de fuerzas interiores $f_i$ luego, para el conjunto de todos los pares,

$$\Sigma\Sigma\, d.\ \mathcal{T} f_i = -\Sigma f_i\ dr$$

En el segundo miembro, cada par de fuerzas interiores simultáneas es representado por un solo término. Sean $r_0$ i $r$ los valores de la distancia $MN$ en dos momentos $t$ i $t_0$, se tendrá tambien

$$(5) \qquad \Sigma\Sigma\ \mathcal{T} f_i = -\Sigma \int_{r_0}^{r} f_i\ dr$$

CONSECUENCIAS DE LA FÓRMULA (5)

Consideremos un cuerpo *teórico* en el cual las distancias respectivas de los diferentes puntos se conservan rigorosamente invariables; este cuerpo hipotético se llama *sólido invariable.* Para este sólido, la suma de los trabajos de las fuerzas interiores es rigorosamente nula i el medio aumento de la fuerza viva total es igual a la suma correspondiente de los trabajos de las fuerzas esteriores; ademas, la fuerza viva queda rigorosamente constante cuando las fuerzas esteriores son nulas. Estudiaremos mas adelante las propiedades del movimiento de estos sólidos teóricos.

Consideremos ahora un sistema formado de varios cuerpos, sustraidos a toda accion esterior i susceptibles solo de chocar unos con los otros; admitamos que, a distancia, los diferentes cuerpos que constituyen el sistema no tienen ninguna accion sensible unos sobre otros i que el choque produzca una deformacion de los cuerpos en contacto, deformacion seguida despues del choque, de otra deformacion en sentido contrario que repone los cuerpos en su forma primitiva. Los cuerpos considerados se llaman *cuerpos elásticos*. La deformacion producida por el choque corresponde a cierto trabajo de las fuerzas interiores i la deformacion en sentido contrario corresponde a un trabajo igual i de signo contrario, de tal manera que, despues del choque, la suma total de los trabajos de las fuerzas interiores es nula. La fuerza viva total del sistema queda por consiguiente constante.

Para que las deformaciones iguales i del sentido contrario correspondan a trabajos iguales i de signo contrario, es necesario que la fuerza $f_i$ que obra entre dos puntos, a distancia $r$ uno del otro, sea una funcion de $r$ que tenga un solo valor para cada valor de $r$.

La observacion muestra que los cuerpos elásticos de la naturaleza satisfacen sensiblemente a esta condicion.

## CAPÍTULO II

### SISTEMAS DE VECTORES EQUIVALENTES

Este capítulo es puramente jeométrico, pero sus conclusiones se aplican a todos los problemas de la mecánica en los cuales figuran vectores como cantidades de movimiento, impulsiones o fuerzas.

*Definicion.*—Dos sistemas de vectores son equivalentes cuando la suma de las proyecciones i la suma de los momentos de los vectores son respectivamente iguales, en uno i otro sistema, cualquiera que sea el eje de proyeccion o el eje de los momentos.

La equivalencia de que se trata en esta definicion es una *equivalencia jeométrica*; hai un caso, sin embargo, en que la equivalencia jeométrica es tambien mecánica: es el caso del sólido invariable; se demostrará en efecto mas tarde que dos sistemas de impulsiones o dos sistemas de fuerzas representados por sistemas de vectores equivalentes producen el mismo efecto sobre un sólido invariable.

Cuando la suma de las proyecciones i la suma de los momentos de los vectores de un sistema respecto a un eje cualquiera son nulos, se dice que el sistema de vectores está en *equilibrio*. Se trata tambien aquí de un equilibrio jeométrico.

Un sistema de vectores queda equivalente a sí mismo cuando se trasladan los vectores sobre su línea de accion o cuando se reemplazan vectores concurrentes por su resultante jeométrica o cuando se agregan pares de vectores iguales dos a dos, de sentido opuesto i situados sobre la misma línea de accion; todas estas trasformaciones i agregaciones dejan en efecto invariable la suma total de las proyecciones i la suma total de los momentos de los vectores del sistema.

Hai una infinidad de sistemas equivalentes a un sistema dado de vectores; sin embargo, entre todos ellos, habrá uno mas sencillo que los demas. La *composicion de los vectores* tiene por objeto determinar el sistema mas sencillo equivalente a un sistema dado.

Estableceremos en primer lugar las propiedades de los *pares*.

## TEORÍA DE LOS PARES

Un *par de vectores* o simplemente un *par* es el sistema formado por dos vectores iguales, paralelos i de sentido opuesto. La distancia de las dos líneas de accion se llama *brazo de palanca* del par.

Se entiende respectivamente por proyeccion de un par i momento de un par, la suma de las proyecciones i la suma de los momentos de los dos vectores que constituyen el par.

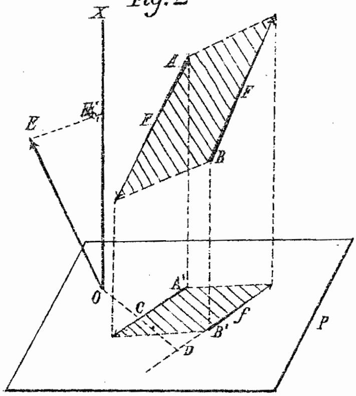
TEOREMA I.—*La proyeccion de un par sobre un eje cualquiera es igual a cero.*

En efecto, las proyecciones de los dos vectores que forman el par son iguales i de signo contrario, la suma es por consiguiente nula.

TEOREMA II.—*El momento de un par, respecto a un eje cualquiera, tiene la misma medida que la proyeccion, sobre un plano perpendicular al eje, del área del paralelógramo construido sobre los dos vectores del par.*

Sea (fig. 2) $OX$ el eje de los momentos i $P$ un plano perpendicular a $OX$; $F$ la lonjitud comun de los vectores que forman el *par* dado, éste se representa con el símbolo $F-F$; sea tambien $f$ la proyeccion de $F$ sobre el plano $P$, la proyeccion del par $F-F$ sobre este plano será el par $f-f$.

Fig. 2




En el plano $P$, tracemos la recta $OCD$, perpendicular sobre los dos vectores paralelos $f$. El momento del vector $F$, cuyo punto de aplicacion está en $B$, tiene por medida el producto $OD \times f$; su signo es positivo si un observador, colocado segun $OX$, ve el sentido del vector en el sentido positivo; es lo que supondremos aquí. El momento del vector $F$, aplicado en $A$, tiene por medida el producto $f \times OC$ i su signo es negativo, segun la figura i la convencion hecha sobre el sentido positivo; luego

$$M_x^t \ F-F = f \times OD - f \times OC = f \times CD$$

El producto $f \times CD$ es precisamente la medida del paralelógramo construido sobre los dos vectores $f$ i su área es la proyeccion, sobre el plano $P$, del área del paralelógramo construido sobre los dos vectores del par $F-F$. Lo que demuestra el teorema.

EJE DE UN PAR

Tracemos, por el punto $O$, un vector $OE$, perpendicular al plano del par $F-F$, démosle una lonjitud igual a la medida del área del paralelógramo $F-F$ i un sentido tal que un observador, colocado sobre el plano del par, sus piés en el centro del paralelógramo i su cabeza en el sentido del vector $OE$ vea el sentido de los vectores $F$ en el sentido positivo; el eje $OE$ se llama eje del par $F-F$.

Sea $\alpha$ el ángulo del plano $F-F$ con el plano $P$ i $A$ el área del paralelógramo $F-F$; se tiene segun el teorema anterior

$$M_x^t\ (F-F)=A \cos \alpha$$

Por construccion, $A$ tiene la misma medida que $OE$ i el ángulo de $OE$ con $OX$ es igual a $\alpha$; sea por consiguiente $E_x$ la proyeccion de $OE$ sobre $OX$ se tiene

$$A \cos \alpha = E_x$$

luego

$$M_x^t (F-F)=E_x$$

Así el momento de un par respecto a un eje cualquiera $OX$ es igual a la proyeccion del eje del par sobre $OX$.

La propiedad es evidentemente jeneral i se aplica a un eje de momentos cualquiera; ademas el punto de aplicacion del vector $OE$ es completamente arbitrario.

TEOREMA III.—*Todos los pares de un mismo eje son sistemas equivalentes.*

En efecto, segun el teorema I, la suma de las proyecciones de los vectores de cada uno de los pares es igual a cero, cualquiera que sea el eje de proyeccion i, segun la definicion del eje de un par, los momentos de todos los pares, respecto a un eje cualquiera, son iguales a la proyeccion de su eje comun sobre el eje de los momentos. Así las condiciones necesarias para la equivalencia de los sistemas de vectores son satisfechas.

Notaremos que los pares del mismo eje pueden estar situados en un mismo plano ó en planos paralelos; la orientacion i la distancia de los vectores son indeterminados; solo el área del paralelógramo, construido sobre los dos vectores de cada par, debe tener la misma medida que el eje comun.

Notaremos tambien que, cuando el eje de un par tiene su punto de aplicacion sobre uno de los vectores, el eje del par se confunde con el eje del otro vector.

TEOREMA IV.—*El sistema formado por un número cualquiera de pares es equivalente a un par único cuyo eje es la resultante jeométrica de los ejes de los pares componentes.*

1.º La suma de las proyecciones de todos los vectores del sistema considerado, sobre un eje cualquiera, es igual a cero, si el sistema equivalente mas sencillo fuera un vector único, su proyeccion sobre un eje cualquiera seria igual a cero i el vector mismo tendria que ser nulo; su momento respecto a un eje cualquiera seria tambien nulo; por otra parte, la suma de los momentos de los pares componentes, respecto a un eje cualquiera, es igual a la suma de las proyecciones de los ejes de estos pares i esta suma no es nula en jeneral, luego el sistema mas sencillo equivalente al sistema de los pares será jeneralmente un par.

2.º Sean $e_1, e_2 \ldots\ldots e_n$ los ejes de los pares componentes i $E$ el eje del par equivalente o *resultante;* el momento de este par resultante, respecto a un eje cualquiera, $OX$ por ejemplo, debe ser igual a la suma de los momentos de los pares componentes, respecto a $OX$. Pero el momento de un par, respecto a $OX$, tiene por medida la proyeccion del eje del par sobre $OX$; luego debemos tener

$$P_x^t\, E = P_x^t\, e_1 + P_x^t\, e_2 + \ldots\ldots + P_x^t\, e_n$$

Ademas esta relacion queda la misma cualquiera que sea la direccion del eje $OX$ considerado; luego se debe tener

$$\overline{E} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \ldots\ldots + \overline{e}_n$$

Lo que demuestra el teorema.

COMPOSICION DE UN SISTEMA CUALQUIERA DE VECTORES

Sea $S$ un sistema cualquiera de vectores; por un punto fijo i arbitrario $O$, tracemos un primer grupo de vectores, respectivamente iguales en magnitud, direccion i sentido, a los vectores del sistema $S$ i un segundo grupo de vectores respectivamente iguales a los primeros i de sentido opuesto.

El sistema $S$, al cual se han agregado estos dos grupos de vectores, queda evidentemente equivalente a sí mismo, puesto que, respecto a un eje cualquiera, la suma de las proyecciones i la suma de los momentos de los vectores agregados son iguales a cero.

El primer grupo de vectores, cuyo punto de aplicacion comun es el punto $O$, puede reemplazarse por su resultante jeométrica $R$; ahora, los vectores del segundo grupo i los del sistema $S$ forman un número igual de pares i éstos son equivalentes a un par único cuyo eje $G$ es la resultante jeométrica de los ejes de los pares componentes.

En resúmen, el sistema $S$ es equivalente a un vector $R$ i a un par de eje $G$.

El punto $O$ se llama *centro de reduccion*, el vector $R$ es la *resultante de traslacion* i el eje $G$ el *eje del par resultante.*

NOTA. - Como el por resultante es definido solo por su eje, se puede siempre suponer que uno de los dos vectores de este par tiene su punto de aplicaeion en el centro de reduccion; este vector i la resultante de traslacion R pueden entónces reemplazarse por su resultante jeómetrico, luego un sistema cualquiera de vectores es siempre equlvalente a dos vectores.

## *Cálculo de $R$ i $G$*

Para calcular $R$ i $G$ se considera, en el centro de reduccion $O$, un sistema de tres ejes rectangulares $OX$, $OY$, $OZ$ i se espresa que el sistema $S$ es equivalente al sistema $(R, G)$.

Sea $F$ uno de los vectores del sistema $S$, la proyeccion de $F$ sobre $OX$ es $P_x^t$, $F$ i la proyeccion del sistema $(R, G)$ se reduce a la proyeccion de $R$ es decir $R_x$, puesto que la suma de las proyecciones de los dos vectores del par $G$ es igual a cero; tendremos por consiguiente

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} R_x &= \Sigma P_x^t F \\ R_y &= \Sigma P_y^t F \\ R_z &= \Sigma P_z^t F \end{aligned}\right.$$

El vector $R$, aplicado en $O$, es así completamente determinado.

Pasemos a los momentos; el eje del par formado por el vector $F$ i otro vector $-F$, aplicado en $O$, se confunde con el eje del vector $F$ i el momento del par $F-F$, respecto a $OX$, es simplemente el momento del vector $F$, respecto del mismo eje, de manera que la suma de los momentos de todos los pares componentes respecto a $OX$ es $\Sigma M_x^t F$; por otra parte, el momento del sistema $(R, G)$ respecto a $OX$ se reduce al momento del par de eje $G$, puesto que $R$ pasa por el punto $O$; el momento del par es igual a la proyeccion $G_x$ del eje $G$ sobre $OX$, luego tenemos las fórmulas

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} G_x &= \Sigma M_x^t F \\ G_y &= \Sigma M_y^t F \\ G_z &= \Sigma M_z^t F \end{aligned}\right.$$

*Propiedades jeómetrias de los ejes $R$ i $G$*

La manera como se obtiene la resultante de traslacion $R$ muestra que ésta queda constante en magnitud, direccion i sentido, cualquiera que sea la posicion del centro de reduccion; esto mismo se averigua por medio de las fórmulas (1); en efecto si los ejes se trasladan paralelamente a si mismo, las proyecciones de los vectores no cambian i por consiguiente las tres proyecciones $R_x$ $R_y$ $R_z$ quedan invariables. No sucede lo mismo con el eje $G$, puesto que el momento de un vector cualquiera cambia cuando el eje de los momentos se traslada paralelamente a si mismo.

Determinaremos cómo varía el eje $G$ en los diferentes centros de reduccion.

1.° *En todos los centros de reduccion, situados sobre una misma paralela a la resultante de traslacion, el eje del par resultante es constante en magnitud, direccion i sentido.*

Sean, en efecto, $R$ la resultante de traslacion, $G$ i $G'$ los ejes del par resultante en dos centros de reduccion $A$ i $B$, situados sobre una recta paralela a $R$. Consideremos un eje $AX$ que pasa por el punto $A$; como los dos sistemos $(R, G)$ i $(R\ G')$ son equivalentes al sistema dado, la suma de sus momentos respecto a $AX$ deben ser iguales: los momentos de $R$ son nulos, luego las proyecciones de $G$ i $G'$ sobre $AX$ deben ser iguales, Pero $AX$ tiene una direccion cualquiera, luego $G$ i $G'$ son iguales en magnitud, direccion i sentido.

2.° *La proyeccion del eje G del par resultante sobre la direccion de la resultante de traslacion R es constante.*

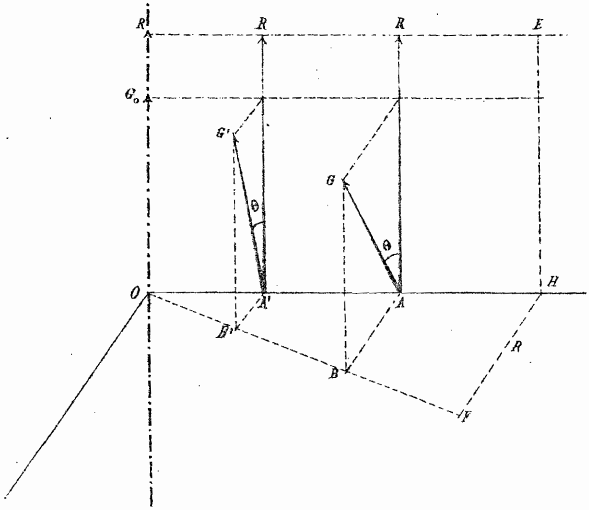
Sean, en efecto, $G$ i $G'$ los ejes del par resultante en dos centros de reduccion cualquiera, $R$ la resultante de traslacion; los momentos de los dos sistemas $(R, G)$, $(R, G')$ respecto a un eje, paralelo a $R$, deben ser iguales; pero los momentos de $R$ son nulos, luego las proyecciones de $G$ i $G'$ sobre $R$ son iguales.

## EJE CENTRAL DE UN SISTEMA DE VECTORES

Sea, en un centro de reduccion $A$, (fig. 3), $R$ la resultante de traslacion, i $G$ el eje del par resultante de un sistema $S$ de vectores, $\theta$ el ángulo de estas dos rectas; consideremos una recta $AO$ perpendicular al plano $RAG$. En todos los centros de reduccion, situados sobre $AO$, el eje del par resultante es perpendicular a esta recta; en efecto, sea en otro punto $A'$, $G'$ el eje del par resultante; los dos sistemas $(RG)$ i $(RG')$ son equivalentes, luego sus momentos respecto de $AO$ son iguales, pero el momento del sistema $(R, G)$, respecto a $AO$, es nulo, luego tambien el momento del sistema $(RG')$ respecto al mismo eje debe ser nulo: el momento de $R$ es igual a cero, luego la proyeccion de $G'$ sobre $AO$ debe ser nula; en resúmen $G'$ es perpendicular sobre $AO$.

Sea $\theta'$ el ángulo de $G'$ con $R$; escribamos que los momentos de los dos sistemas $(R, G)$ i $(R, G')$ respecto a una perpendi-

Fig. 3




cular $A'\,B'$ al plano $RAO$, son iguales: el momento del sistema $(R, G')$ es $G'$ sen $\theta'$ i el momento del sistema $(R\ G)$ es

$$G \text{ sen } \theta - R \times A'A$$

luego se debe tener

$$G' \text{ sen } \theta' = G \text{ sen } \theta - R \times AA'$$

Por otra parte, las proyecciones de $G$ i $G'$ sobre la direccion de $R$ son iguales, luego

$$G' \cos \theta' = G \cos \theta$$

La primera ecuacion muestra que habrá siempre un punto de la recta $AO$ i uno solo para el cual $G'$ sen $\theta'$ sea nulo; supongamos que el punto $O$ de la figura (3) satisface a esta condicion; el punto $O$ será determinado por la relacion

$$G \operatorname{sen} \theta - R \times AO = 0$$

O bien

$$AO = \frac{G \operatorname{sen} \theta}{R} \tag{3}$$

En el punto $O$ de la recta $AA'$ los ejes $G$ i $R$ tienen entónces la misma direccion $OC$; luego, en todos los centros de reduccion situados sobre $OC$, los dos ejes $R$ i $G$ tendrán tambien la misma direccion.

TEOREMA.—*En un sistema dado $S$ de vectores no puede haber sino una sola recta que tenga la propiedad de la recta $OC$.*

En efecto, si hubiera otra $O'C'$ ésta seria paralela a la primera puesto que las dos son paralelas a $R$; ademas los momentos de los dos sistemas equivalentes ($R$, $G$), respecto a un eje cualquiera $OX$ perpendicular a $OC$, deben ser iguales; pero el momento del sistema ($R$, G), aplicado en un punto de $OC$, es igual a cero, luego el momento de otro sistema ($R$ $G$) aplicado en un punto de $O'C'$ debe ser nulo: el momento del par es nulo, puesto que $G$ tiene la misma direccion que $OC$ i es por consiguiente perpendicular a $OX$, luego el momento de $R$ debe ser nulo, esto no puede suceder sino cuando $O'C'$ encuentra todos los ejes $OX$ perpendiculares a $OC$, es decir solo cuando $O'C'$ se confunda con $OC$.

La recta $OC$ se llama *eje central del sistema* $S$. Así, en cada sistema de vectores, existe un eje central i en todos los centros de reduccion, situados sobre este eje, el eje del par resultante tiene la misma direccion que la resultante de traslacion.

NOTA.—Si en un centro de reduccion cualquiera $A$ la resultante de traslacion fuera nula, el ángulo $\theta$ seria indeterminado en este punto i el valor de $AO$ dado por la fórmula (3) seria tambien indeterminado. En este caso el sistema de vectores es equivalente a un par único, i se sabe, en efecto, que el eje de este par único no cambia, cualquiera que sea su punto de aplicacion.

## DETERMINACION DEL EJE DEL PAR RESULTANTE EN UN CENTRO DE REDUCCION CUALQUIERA

Sea (fig. 3) $OC$ el eje central del sistema, $R$ la resultante de traslacion i $G_o$ el eje del par resultante, en un punto cualquiera del eje central. Se quiere determinar el eje $G$ en un punto cualquiera $A$; sea $AO=x$ la distancia del punto al eje central; el eje $G$ será perpendicular a $AO$ i se tendrá segun las fórmulas establecidas mas arriba

$$G \cos \theta = G_o$$

$$G \operatorname{sen} \theta = Rx$$

Para obtener gráficamente la posicion del eje $G$, se tomará, sobre $OA$, una lonjitud $OH$ igual a la unidad i se trazará una recta $HF$ perpendicular al plano $COH$; se tomará $HF=R$ i se unirá el punto $O$ al punto $F$. Se traza entónces en $A$ una paralela a $HF$ hasta su punto de encuentro $B$ con $OF$, la lonjitud $AB$ es igual a $Rx$ o a $G$ sen $\theta$; sea por otra parte $BC=G_o$, la recta $AG$ será el eje $G$ en el centro de reduccion $A$.

Como el eje central $OC$ es único, los valores de $G$ i $\theta$ quedan los mismos en todos los centros de reduccion situados sobre un cilindro de revolucion de eje $OC$.

### *Caso particular*

Si el eje $G_o$ es igual a cero se tiene en un punto cualquiera

$$G \cos \theta = O$$

$$G \operatorname{sen} \theta = Rx$$

Luego, el ángulo $\theta$ es recto en todos los centros de reduccion Es el caso en que el sistema de vectores considerados es equivalente a una resultante de traslacion única.

La recíproca es evidente. Si $\theta$ es recto, en un centro de reduccion cualquiera, se tiene $G_o=O$, luego el sistema se reduce a una resultante de traslacion única situada sobre el eje central;

ademas en todos los demas centros de reduccion el ángulo $\theta$ es recto.

Estas propiedades se pueden establecer tambien directamente.

TEOREMA.—*La situacion del eje central no cambia cuando se multiplican las lonjitudes de todos los vectores del sistema por un mismo coeficiente.*

Sea, en efecto, $O$ un centro de reduccion cualquiera, $R$ i $G$ la resultante de traslacion i el eje del par resultante en este punto i $K$ el coeficiente con el cual se multiplican las lonjitudes de todos los vectores del sistema. Despues de esta multiplicacion, la nueva resultante de traslacion tendrá evidentemente la misma direccion i el mismo sentido que $R$ i su lonjitud será $KR$; por otra parte, el eje de cada uno de los pares componentes conservará la misma direccion i el mismo sentido, i su lonjitud será multiplicada por $K$, luego el eje del par resultante será $KG$ i tendrá la misma direccion i el mismo sentido que $G$. De ahí se deduce que en un centro de reduccion cualquiera, la resultante de traslacion i el eje del par resultante conservan una direccion invariable i que su lonjitud es multiplicada por el coeficiente $K$; la manera como se obtiene el eje central muestra entónces que este último conserva una situacion invariable.

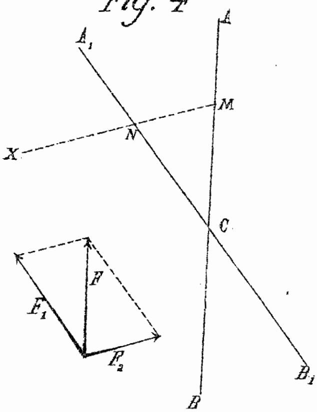
### CASO DE UN SISTEMA DE VECTORES PARALELOS

La resultante de traslacion $R$ de un tal sistema es evidentemente paralela a la direccion comun de los vectores i su magnitud es igual a la suma aljebráica de las magnitudes de los vectores componentes; por otra parte, la suma de los momentos de todos los vectores respecto a un eje paralelo a $R$ es igual a cero, luego la proyeccion del eje $G$ del par resultante sobre $R$ es nula; esto significa que en todos los centros de reduccion el eje $G$ es perpendicular a $R$ i que, por consiguiente, el sistema de todos los vectores es equivalente a un vector único, situado sobre el eje central del sistema.

Si la resultante de traslacion $R$ fuera nula, el sistema seria equivalente a un par único, cuyo eje seria perpendicular a la direccion comun de los vectores.

*Si se hacen jirar todos los vectores del sistema, al rededor de su punto de aplicacion, de tal manera que en seguida esten paralelos a otra direccion, el nuevo eje central corta el primero.*

Fig. 4




Sea, en efecto, (fig. 4) $F$ uno de los vectores i $AB$ el eje central del sistema; el conjunto de los vectores $F$ es equivalente a un vector situado sobre $AB$. Se puede de una infinidad de maneras descomponer $F$ en dos componentes $F_1$, $F_2$ tales que $F_1$ tenga la misma lonjitud que $F$; hagamos la misma descomposicion con los demas vectores del sistema; el conjunto de los vectores $F_1$ formará un sistema de vectores paralelos i su eje central será una recta tal como $A_1\ B_1$ paralela a $F_1$. Por un punto $M$ de $AB$ tracemos una recta $MX$ paralela a $F_2$; respecto a este eje se tendrá

$$\Sigma\ M^t\ F = \Sigma\ M^t\ F_1 + \Sigma\ M^t\ F_2$$

La suma de los momentos de $F$ es igual al momento del vector único equivalente a los vectores $F$; como este vector está situado sobre $AB$ se tiene

$$\Sigma\ M^t\ F = 0$$

Por otra otra parte, los vectores $F_2$ son paralelos a $MX$, luego

$$\Sigma\ M^t\ F_2 = 0$$

queda por consiguiente

$$\Sigma\ M^t\ F_1 = 0$$

Los vectores $F_1$ son equivalentes a un vector único situado sobre $A_1\ B_1$; luego el momento de este vector único respecto a

$MX$ es nulo, lo que indica que $A_1$ $B_1$ encuentra $MX$ en cierto punto $N$.

El punto $M$ ha sido elejido arbitrariamente sobre $AB$, luego $A_1$ $B_1$ i $AB$ estan situados en un mismo plano i se cortan en un punto $C$.

Hagamos otra descomposicion del vector $F$ de tal manera que la nueva componente $F'_1$ esté en un plano distinto de $ACA_1$ el nuevo eje central deberá cortar $AB$ i $A_1$ $B_1$ luego pasará tambien por el punto $C$; de ahí se deduce inmediatamente que todos los ejes centrales pasaran por el punto $C$; este se llama *centro del sistema de vectores paralelos.*

El centro $C$ no cambia cuando se multiplican las lonjitudes de todos los vectores por un mismo coeficiente, puesto que esta modificacion no cambia la situacion del eje central correspondiente.

En resúmen, *la situacion del centro de un sistema de vectores paralelos, no depende ni de la orientacion comun de los vectores, ni de las magnitudes absolutas de ellos, sino de la situacion de los puntos de aplicacion i de las magnitudes relativas de los vectores.*

## CENTRO DE GRAVEDAD

Supongamos un sistema material sometido a la accion de la pesantez; a un momento dado $t$, cada punto del sistema recibe durante el tiempo $dt$, una impulsion vertical $mg\,dt$, siendo $m$ la masa del punto i $g$ la aceleracion de la pesantez. El conjunto de estas impulsiones es un sistema de vectores paralelos i de mismo sentido. Su centro se llama *centro de gravedad* del sistema.

Como se puede reducir o amplificar proporcionalmente las magnitudes de todos los vectores i cambiar su comun direccion sin cambiar la situacion del centro del sistema, se podrá decir tambien: *el centro de gravedad de un sistema material es el centro de un sistema de vectores paralelos, aplicados en los diferentes puntos del sistema material; todos los vectores tienen el mismo sentido i la lonjitud de cada uno de ellos tiene la misma medida que la masa del punto material al cual está aplicado.*

Esta definicion permite calcular fácilmente las coordenadas del centro de gravedad de un sistema material; consideremos en efecto un sistema de tres ejes rectangulares i sean $x, y, z$ las coordenadas de un punto del sistema; $m$ su masa; $\xi$, $\eta$, $\zeta$ las coordenadas del centro de gravedad i $M$ la masa total. Para obtener $\xi$ aplicaremos, a cada punto, un vector, de misma direccion i mismo sentido que $OY$, i de lonjitud igual a la medida de la masa $m$ del punto de aplicacion.

La suma de los momentos, respecto a $OZ$, de los vectores componentes es igual a $\Sigma\, mx$ i el momento del vector resultante, respecto al mismo eje es $M.\xi$ Igualando estas dos espresiones se obtiene el valor de $\xi$. Análogas consideraciones dan los valores de $\eta$ i $\zeta$; finalmente se obtienen las fórmulas siguientes

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} M\,\xi &= \Sigma\, mx \\ M\,\eta &= \Sigma\, my \\ M\,\zeta &= \Sigma\, mz \end{aligned} \right.$$

## CAPÍTULO III

### PROPRIEDADES JENERALES DEL MOVIMIENTO DE LOS SISTEMAS MATERIALES

En las seis ecuaciones jenerales comunes a todos los sistemas materiales, figuran solo las sumas de las proyecciones i las sumas de los momentos de las cantidades de movimiento i de las fuerzas esteriores; estas sumas definen precisamente, en cada uno de los sistemas de vectores, el sistema mas sencillo equivalente. Sean $R$ i $G$ la resultante de traslacion i el eje del par resultante del sistema de las cantidades de movimiento; $r$ i $g$ los elementos correspondientes del sistema de las fuerzas esteriores; si el centro de reduccion es el oríjen de las coordenadas i, si se distinguen con un índice las proyecciones de los vectores sobre los ejes se tiene

$$\Sigma\, P_x^t\, mv = R_x \qquad \Sigma\, P_x^t\, F = r_x$$

$$\Sigma\, M_x^t\, mv = G_x \qquad \Sigma\, M_x^t\, F = g_x$$

Se obtienen fórmulas análogas respecto de los otros ejes i las seis ecuaciones jenerales se trasforman en los siguientes

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dR_x}{dt}=r_x & \dfrac{dG_x}{dt}=g_x \\ \dfrac{dR_y}{dt}=r_y & \dfrac{dG_y}{dt}=g_y \\ \dfrac{dR_z}{dt}=r_z & \dfrac{dG_z}{dt}=g_z \end{array}\right.$$

Segun esto, *si se considera la estremidad del vector R como un punto movil, la velocidad de este punto es igual a la resultante de traslacion r de las fuerzas esteriores*; del mismo modo, *la estremidad del eje G del par resultaute de las cantidades de movimiento tiene una velocidad igual al eje g del par resultante de las fuerzas esteriores.*

Hai otra interpretacion mui importante de las seis ecuaciones jenerales i ésta se deduce de la consideracion del centro de gravedad. Estableceremos, en primer lugar, algunos teoremas.

TEOREMA I.—*La resultante de traslacion R de las cantidades de movimiento representa la cantidad de movimiento del centro de gravedad en el cual se supone concentrada la masa de todo el sistema material.*

En efecto, sean $\xi$. $\eta$, $\zeta$, las coordenadas del centro de gravedad, se deduce de las fórmulas (4) del capítulo anterior.

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} M\dfrac{d\xi}{dt}=\Sigma\, m\dfrac{dx}{dt} \\ M\dfrac{d\eta}{dt}=\Sigma\, m\dfrac{dy}{dt} \\ M\dfrac{d\eta}{dt}=\Sigma\, m\dfrac{dz}{dt} \end{array}\right.$$

Sea $w$ la velocidad del centro de gravedad, los tres primeros miembros son las proyecciones de $Mw$ sobre los tres ejes i los segundos son las proyecciones de $R$; luego $R$ es igual en magnitud, direccion i sentido a $Mw$. Lo que demuestra el teorema.

TEOREMA II.—*Si se refieren las posiciones de los puntos del sistema material a un sistema de comparacion animado de una traslacion igual al movimiento del centro de gravedad, el sistema de vectores formado con las cantidades de movimiento relativas es equivalente a un par único.*

Sean, en efecto, $x'$, $y'$, $z'$ las coordenadas de uno de los puntos, respecto del sistema móvil, $v'$ su velocidad relativa i $v$ su velocidad absoluta en el espacio; $x$, $y$, $z$ sus coordenadas, respecto de un sistema de coordenadas fijo; como $v$ es la resultante jeométrica de $v'$ i de la velocidad $w$ del centro de gravedad se tendrá, al proyectar sobre $OX$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'}{dt}+\frac{d\xi}{dt}$$

Sea $m$ la masa del punto considerado, se tendrá tambien

$$m\frac{dx}{dt}=m\frac{dx'}{dt}+m\frac{d\xi}{dt}$$

Sumemos las ecuaciones análogas para todos los puntos del sistema, tendremos

$$\Sigma\, m\frac{dx}{dt}=\Sigma\, m\frac{dx'}{dt}+M\frac{d\xi}{dt}$$

Pero, según (2), el primer miembro es igual a $M\frac{d\xi}{dt}$, luego

$$\Sigma\, m\frac{dx'}{dt}=0$$

Se obtendria de la misma manera

$$\Sigma\, m\frac{dy'}{dt}=0$$

$$\Sigma\, m\frac{dz'}{dt}=0$$

Los primeros miembros representan las proyecciones de la resultante de traslacion del sistema de vectores $mv'$, luego esta resultante de traslacion es nula i el sistema de estos vectores es equivalente a un par único.

Se deduce de estos teoremas que, a un momento cualquiera, el sistema de vectores formado con las cantidades de movimiento absolutas de todos los puntos de un sistema material es equivalente: 1.º a un vector $R$, aplicado en el centro de gravedad, e igual a la cantidad de movimiento $Mw$ de este punto; 2.º a un par equivalente al sistema de las cantidades de movimiento relativas al rededor del centro de gravedad.

Como el vector $R$ es igual a $Mw$ su direccion es a cada momento tanjente a la trayectoria del centro de gravedad.

## MOVIMIENTO DEL CENTRO DE GRAVEDAD

En las fórmulas (2) se pueden reemplazar los segundos miembros por $R_x$, $R_y$, $R_z$; si se derivan de nuevo estas ecuaciones, se obtendrá, segun (1)

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{dR_x}{dt}=r_x$$

$$M\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{dR_y}{dt}=r_y$$

$$M\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{dR_z}{dt}=r_z$$

Estas ecuaciones espresan que *el centro de gravedad se mueve como un punto material, de masa $M$ igual a la masa total del sistema, i sometido a una fuerza igual a la resultante de traslacion $r$ de las fuerzas esteriores.*

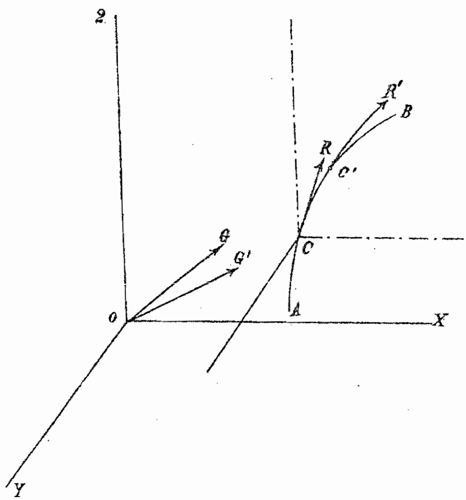
Segun esto, si las fuerzas esteriores son nulas o se hacen equilibrio o son equivalentes a un par único, el centro de gravedad tiene un movimiento recto i uniforme.

Las fuerzas interiores no intervienen en estas fórmulas, luego ellas no tienen ningun efecto sobre el movimiento del centro de gravedad. Supongamos, por ejemplo, que el centro de gravedad de un sistema material está en reposo i que las fuerzas esteriores son nulas o en equilibrio o equivalentes a un par único, el centro de gravedad permanecerá indefinidamente en reposo, cualesquiera que sean las fuerzas interiores que se desarrollen en el sistema.

### MOVIMIENTO DEL SISTEMA AL REDEDOR DE SU CENTRO DE GRAVEDAD

Sean fig. (5) $C'$ i $C'$ dos posiciones infinitamente próximas del centro de gravedad de un sistema material, en los momentos $t$ i $t+dt$; $R'$ i $R$ los vectores que representan, en estos momentos, la cantidad de movimiento del centro de gravedad ($R$ i $R'$ son tanjentes en $C$ i $C'$ a la trayectoria $AB$ del centro de gravedad); $G$ i $G'$ los ejes de los pares equivalentes a las cantidades de movimiento relativas en los mismos momentos.

*Fig. 5*




Consideremos un sistema de tres ejes fijos en el espacio; respecto al eje $OX$ se tiene la fórmula

$$\Sigma M_x^t \, m(v+dv) - \Sigma M_x^t \, mv = \Sigma M_x^t \, F \, dt$$

Apliquemos esta fórmula, tendremos

$$\Sigma M_x^t \, m(v+dv) = G'_x + M_x^t \, R'$$

$$\Sigma M_x^t \, mv = G_x + M_x^t \, R$$

Luego

$$G'_x - G_x + M_x^t \, R' - M_x^t \, R = \Sigma M_x^t \, F \, dt$$

Como la posicion de los ejes fijos es completamente arbitraria podemos suponer que ellos coinciden con la posicion, en el momento $t$, de un sistema de comparacion, móvil con el centro de gravedad, i cuyo oríjen está en este punto. En este caso, $M_x^t R$ es igual a cero i $M_x\ R'$ es infinitamente pequeño de segundo órden, puesto que este momento es del mismo órden que la distancia del punto $C$ a la tanjente en $C'$. La fórmula anterior se reduce entónces a la siguiente

$$G'_x - G_x = \Sigma M_x^t\ F dt$$

O bien

$$d\,G_x = dt\,\Sigma\, M_x^t\ F = g_x\,dt$$

Respecto de los tres ejes se obtendrán fórmulas análogas; finalmente se tendrá

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dG_x}{dt} &= g_x \\ \frac{dG_y}{dt} &= g_y \\ \frac{dG_z}{dt} &= g_z \end{aligned} \right.$$

Estas fórmulas son idénticas a las fórmulas (1). Sin embargo en (3), los momentos $g_x$, $g_y$, $g_z$ de las fuerzas esteriores se refieren a tres ejes rectangulares de direccion invariable i que pasan por el centro de gravedad.

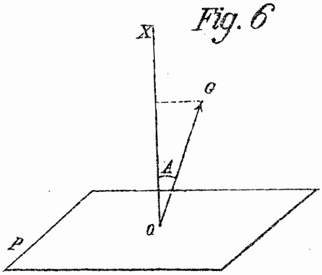
En resúmen, *cuando se refiere el movimiento de un sistema material a un sistema de comparacion, animado de una traslacion igual al movimiento del centro de gravedad, la estremidad del eje G del par resultante de las cantidades de movimiento relativas, tiene una velocidad relativa igual al eje g del par resultante de las fuerzas esteriores;* el centro de reduccion de estas fuerzas es entónces a cada instante el centro de gravedad del sistema móvil.

Las tres ecuaciones en las cuales intervienen los momentos se llaman jeneralmente *ecuaciones de rotacion;* ellas conservan la misma forma cuando el movimiento del sistema material se refiere a un sistema de comparacion fijo en el espacio ó móvil con el centro de gravedad; en el primer caso, se dice que el movimiento del sistema se efectúa al rededor de un punto fijo i, en el segundo caso, al rededor del centro de gravedad. Como se ve, la teoría i las propiedades jenerales de estos dos movimientos serán idénticas puesto que las ecuaciones correspondientes tienen exactamente la misma forma.

### TEOREMA DE LAS ÁREAS

Sea (fig. 6) $OX$ un eje cualquiera i $P$ un plano perpendicular a $OX$; el punto $O$ es indiferentemente un punto fijo en el espacio o el centro de gravedad de un sistema material. Unamos todos los puntos del sistema material con el punto $O$, los radios vectores describirán ciertas áreas durante el movimiento del sistema; proyectemos estas áreas sobre el plano $P$, tendremos, para todos los puntos del sistema

Fig. 6




$$\Sigma M_x^t \, mv = 2 \, \Sigma m \frac{da}{dt}$$

Sea, en el punto $O$, $G$ el eje del par resultante de las cantidades de movimiento i $\theta$ el ángulo de $G$ con $OX$, se tendrá

$$\Sigma M_x^t \, mv = G \cos \theta$$

Luego

$$2 \, \Sigma m \frac{da}{dt} = G \cos \theta$$

A un mismo momento $t$, el primer miembro de esta ecuacion será máxima si el plano $P$ es perpendicular a $OG$, por esta razon, esta última posicion del plano $P$ se llama *plano del máximo de las áreas.*

Consideremos especialmente el caso en que el eje $G$ queda constante, es el caso, en que las fuerzas esteriores son equivalentes a una resultante de traslacion única que pasa por el punto $O$, o bien el caso en que las fuerzas esteriores se hacen equilibrio; se tiene entónces

$$2 \Sigma m a = G t \cos \theta + \text{Cons.}$$

Así la suma de los productos de la masa de cada punto, por la proyeccion, sobre el plano $P$, del área que describe su radio vector, varia proporcionalmente al tiempo; en este caso, el plano del máximo de las áreas permanece en una direccion invariable; es el *plano invariable de Laplace.*

La constante de integracion puede suponerse nula si las áreas se cuentan desde las posiciones que ocupan los radios vectores en el momento $t=0$.

Si, en el momento inicial, el eje $G$ es igual a cero, la fórmula anterior se reduce a

$$\Sigma m a = 0$$

Así la suma de los productos de la masa de cada punto por la proyeccion, sobre un plano fijo cualquiera, del área que describe su radio vector, queda siempre igual a cero.

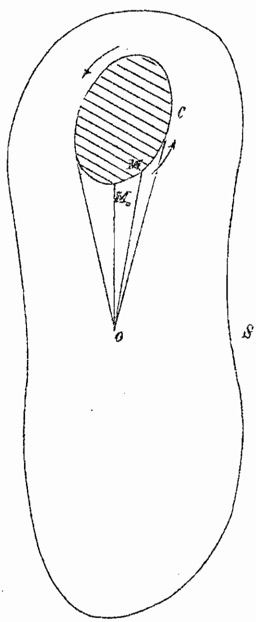
*Un cuerpo vivo, en reposo, abandonado a sí mismo en el espacio, puede tomar espontáneamente un movimiento de rotacion al rededor de su centro de gravedad inmóvil sin que intervengan acciones esteriores.*

Un cuerpo vivo en reposo es un sistema material, dotado de cierta cantidad de enerjía potencial interior i capaz de trasformar, por sí mismo, una parte de esta enerjía potencial en enerjia cinética interior. Si un cuerpo vivo en reposo opera esta trasformacion de enerjía, ciertos puntos del sistema se mueven respecto de los demas i estos movimientos se efectúan de tal manera que el centro de gravedad permanezca invariable i de tal manera tambien que la suma de las proyecciones, sobre un plano cualquiera, de los productos de la masa de cada punto por el área que describe su radio vector, quede nula.

La forma del cuerpo será variable durante estos movimientos, pero podemos suponer que en dos momentos $t_1$ i $t_2$ el cuerpo vuelve a tomar la misma forma; entónces las dos posiciones correspondientes del cuerpo serán jeneralmente distintas, es decir, que el cuerpo mismo habrá tenido un movimiento de rotacion.

Para demostrarlo, examinaremos un caso sencillo: sea (fig. 7) $S$ un sistema material, $O$ su centro de gravedad i $M$ uno de sus puntos de masa $\mu$. A cierto momento $t_1$ el punto $M$ toma cierto movimiento, respecto de los demas puntos de $S$ i sale de la posicion $M_0$ para volver a la misma posicion en otro momento $t_2$; en los dos momentos $t_1$ i $t_2$ el sistema $S$ ha vuelto a tomar la misma forma i, respecto de este sistema, el punto $M$ ha descrito cierta curva cerrada $C$, en un sentido determinado.

Fig. 7




Contemos las áreas que describen los radios vectores desde la posicion que tienen estos radios vectores en el momento $t_1$, i sea, a cierto momento $t$, $A$ el área descrita, en proyeccion sobre un plano fijo, por el radio vector del punto $M$, i $a$ el área descrita, en proyeccion sobre el mismo plano por el radio vector de uno de los demas puntos del sistema; tendremos a cada momento

$$\mu A + \Sigma\, m a = 0 \tag{4}$$

En el momento inicial $t_1$ las áreas $A$ i $a$ son nulas por hipótesis; supongamos ahora que, en el momento $t_2$, el sistema $S$

haya vuelto a ocupar su posicion primitiva, se tendria entónces

$$\Sigma\, m\, a = 0$$

i por consiguiente tambien

$$\mu\, A = 0$$

Pero el área $A$ no es nula puesto que el radio vector del punto $M$ ha descrito durante el intervalo $t_2 - t_1$ el área de la curva cerrada $C$, luego es imposible que el sistema $S$ no haya jirado al rededor del punto $O$ i en un sentido tal que la condicion (4) sea satisfecha.

TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS EN EL MOVIMIENTO RELATIVO DE UN SISTEMA AL REDEDOR DE SU CENTRO DE GRAVEDAD.

Hemos establecido, en el capítulo I, la fórmula

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\Sigma\, mv^2 - \frac{1}{2}\,\Sigma\, mv_0{}^2 = \Sigma\, \mathfrak{T}F + \Sigma\Sigma\, \mathfrak{T}f_i$$

Trataremos de trasformar esta fórmula i avaluar el aumento de la fuerza viva en el movimiento relativo del sistema al rededor de su centro de gravedad.

Sea, como mas arriba, $w$ la velocidad del centro de gravedad en el momento $t$, se tiene

$$\overline{v} = \overline{v'} + \overline{w}$$

Luego

$$v^2 = v'^2 + w^2 + 2\, v'\, w \cos(v',\, w)$$

I tambien

$$\Sigma\, mv^2 = \Sigma\, mv'^2 + M\, w^2 + 2\, w\, \Sigma\, mv' \cos(v',\, w)$$

Se sabe que el sistema de los vectores $mv'$ es equivalente a un par único, luego la suma de las proyecciones de estos vectores sobre la direccion de la velocidad $w$ es igual a cero i la fórmula anterior se reduce a la siguiente

$$(6) \qquad \Sigma\, mv^2 = \Sigma\, mv'^2 + M\, w^2$$

Del mismo modo, en el momento inicial

$$\Sigma\, m v_0{}^2 = \Sigma\, m v_0'^2 + M w_0{}^2$$

Luego la fórmula (5) se trasforma en la siguiente

$$(7) \qquad \frac{1}{2}\Sigma\, m v'^2 - \frac{1}{2}\Sigma\, m v'_0{}^2 + \frac{1}{2} M w^2 - \frac{1}{2} M w_0{}^2 =$$

$$\Sigma\, \mathfrak{T} F + \Sigma\,\Sigma\, \mathfrak{T} f_i$$

El trabajo elemental de cada fuerza esterior $F$ se refiere aquí al cambio de lugar absoluto del punto en el espacio; proyectemos las velocidades $v$, $w$ i $v'$ de un punto sobre la direccion de la fuerza $F$ que obra en este punto, tendremos

$$v \cos(F, v) = v' \cos(F, v') + w \cos(F, w)$$

Multipliquemos esta relacion por $F\,dt$, obtendremos la siguiente

$$F\, v\, dt \cos(F, v) = F\, v'\, dt \cos(F, v') + F\, w\, dt \cos(F, w)$$

El primer miembro es el trabajo elemental de la fuerza $F$ para el cambio de lugar absoluto $v\,dt$ del punto, es el que figura en las fórmulas (5) i (7); en el segundo miembro, el primer término es el trabajo elemental de la fuerza $F$ para el cambio de lugar relativo $v'\,dt$ del punto; designemos este último por $d\,\mathfrak{T}'\,F$, tendremos

$$d\,\mathfrak{T} F = d\,\mathfrak{T}' F + F\, w\, dt \cos(F, w)$$

I, para todos los puntos del sistema

$$\Sigma\, d\,\mathfrak{T} F = d\,\mathfrak{T}' F + w\, dt\, \Sigma\, F \cos(F, w)$$

Integremos entre dos momentos $t_0$ i $t$, tendremos

$$\Sigma\, \mathfrak{T} F = \Sigma\, \mathfrak{T}' F + \int_{t_0}^{t} w\, dt\, \Sigma\, F \cos(F, w)$$

Sea $r$ la resultante de traslacion de las fuerzas esteriores, se tiene

$$\Sigma\ F\cos(F, w) = r\cos(r, w)$$

I tambien

$$\int_{t_0}^{t} w\,dt\,\Sigma\ F\cos(F_1\ w) = \int_{t_0}^{t} w\,dt\,r\cos\ (r,\ w)$$

El centro de gravedad se mueve como un punto material de masa $M$ i sometido a la fuerza $r$, luego

$$\int_{t_0}^{t} w\ dt\ r\ \cos\ (r,\ w) = \frac{1}{2} M\,w^2 - \frac{1}{2} M\,w_0^2$$

En resúmen

$$\Sigma\ \mathfrak{T} F = \Sigma\ \mathfrak{T}'\,F + \frac{1}{2} M\,w^2 - \frac{1}{2} M\,w_0^2$$

Llevemos este valor en la ecuacion (7), ésta se reducirá a la siguiente

$$(8) \qquad \frac{1}{2}\Sigma\,m\,v'^2 - \frac{1}{2}\Sigma\,m\,v_0'^2 = \Sigma\ \mathfrak{T}'\,F + \Sigma\,\Sigma\ \mathfrak{T} f_i$$

Esta ecuacion tiene exactamente la misma forma como (5); por consiguiente, *el teorema de las fuerzas vivas se aplica de la misma manera cuando se refiere la posicion del sistema material a un sistema de comparacion fijo en el espacio o a un sistema de comparacion animado de una traslacion igual al movimiento del centro de gravedad.*

## APLICACION AL SÓLIDO INVARIABLE

El sólido invariable es por definicion un sistema material en el cual las distancias respectivas de los diferentes puntos permanecen invariables. Segun esta definicion, *seis ecuaciones, entre* *las coordenadas de los puntos de un sólido invariable, bastan para fijar completamente su situacion en el espacio.*

En efecto, la posicion de un sólido está determinada cuando se conoce la posicion de tres de sus puntos, no situados en línea recta; estos tres puntos son definidos por *nueve* coordenadas i, entre ellas, existen *tres* relaciones que espresan que las distancias recíprocas de los tres puntos quedan invariables; luego *seis* condiciones serán necesarias i suficientes para determinar completamente la posicion de los tres puntos i por consiguente tambien la de todo el sólido.

Se han establecido precisamente seis ecuaciones fundamentales, comunes a todos los sistemas materiales; estas seis ecuaciones se aplican tambien al sólido invariable i bastan para fijar completamente su posicion a cada momento.

Como, en estas ecuaciones, las fuerzas esteriores figuran solo por los elementos que definen el sistema equivalente mas sencillo, se ve que *dos sistemas de fuerzas esteriores, representados por sistemas de vectores equivalentes, producen el mismo efecto sobre el sólido invariable.*

Así, para estudiar el efecto de un sistema cualquiera de fuerzas sobre el sólido invariable, se podrá siempre reemplazar este sistema por otro equivalente. Un sistema de fuerzas en equilibrio no producirá ningun efecto sobre este sólido i si el sólido está en reposo a cierto momento inicial, el sistema de fuerzas en equilibrio lo dejará en reposo.

En resúmen, las seis ecuaciones fundamentales se aplican directamente al sólido invariable i bastan para determinar completamente su movimiento, lo que no sucede con los demas sistemas materiales.

A. Obrecht

*(Continuará)*