MECÁNICA RACIONAL

PRIMERA PARTE

DEL PUNTO MATERIAL

CAPÍTULO III

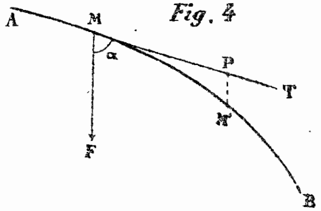
MOVIMIENTO JENERAL DE LOS PUNTOS MATERIALES

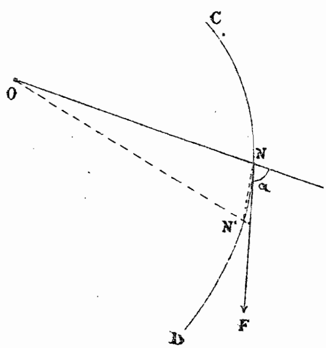
Sean (fig. 4): AB la trayectoria de un punto material; M su posicion en el momento t; m su masa; v su velocidad i F la fuerza. (La fuerza F podria ser la resultante jeométrica de algunas fuerzas que obren simultáneamente sobre el punto móvil.)

Durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño dt se puede siempre suponer que la fuerza F es constante en magnitud, direccion i sentido. Tracemos la tanjente MT a la trayectoria i tomemos sobre ella una lonjitud $MP=vdt$; MP es el movimiento elemental del punto material en el momento t, es decir, es el movimiento que tendria el punto móvil si, en el instante t i durante el tiempo dt, no estuviera sometido a la fuerza F.

Referimos las posiciones del móvil, en el momento t, a un sistema de comparacion animado de una traslacion recta i uniforme de velocidad v; respecto a este sistema i en el momento t, el punto M está en reposo relativo.

Fig. 4





Si la fuerza F no existiera, el punto M quedaria indefinidamente en reposo relativo, respecto al sistema de comparacion considerado i, en el momento $t+dt$, su posicion absoluta, en el espacio, seria precisamente el punto P

Ahora, segun el principio de mecánica establecido mas arriba, el efecto de la fuerza F sobre el punto material, en reposo relativo, no depende en nada del movimiento de traslacion recto i uniforme del sistema de comparacion; luego, respecto a este sistema, el punto material se moverá, durante el tiempo dt como si, estando en reposo, estuviera sometido a una fuerza constante F.

Hemos considerado este caso en el capítulo anterior i hemos visto que si se llaman Δv la velocidad i Δs el camino recorrido despues del tiempo dt, se tiene:

$$\Delta v = \frac{F}{m} dt$$

$$\Delta s = \frac{1}{2} \frac{F}{m} dt^2$$

El camino Δs tiene la direccion de la fuerza F; sea, en la figura 4, $PM' = \Delta s$; el punto M' será la posicion del punto material en el momento $t+dt$.

No se debe olvidar que la espresion de Δs supone que se han despreciado los infinitamente pequeños de órden superior a dt^2.

La velocidad absoluta $v+dv$ del punto material en M' será la resultante jeométrica de v i de Δv; i por consiguiente, tambien la cantidad de movimiento $m(v+dv)$ del punto material, en el momento $t+dt$, será la resultante jeométrica de mv i de $m\Delta v$, o bien la resultante jeométrica de mv i de la impulsion elemental Fdt.

Este último resultado ha sido ya establecido en el capítulo I.

Sea *(fig. 4)* O un punto fijo i arbitrario; tracemos un vector ON igual a la cantidad de movimiento mv i, por el punto N, un vector NN' igual a la impulsion Fdt; el vector ON', resultante jeométrica de ON i NN', representará la cantidad de movimiento $m(v+dv)$ del punto material en el momento $t+dt$.

TRAYECTORIA I CURVA DE LAS FUERZAS

Si, en los intervalos sucesivos e infinitamente próximos del tiempo, se repiten las mismas construcciones, se obtienen finalmente dos curvas: una, AB, es la *trayectoria* del punto material; la otra, CD, es la *curva de las fuerzas* i el punto fijo O, es el polo de esta curva.

A cada punto M de la trayectoria AB corresponde un punto N de la curva de las fuerzas CD i, a medida que M se mueve sobre AB, N se mueve sobre la curva CD; ademas la velocidad del punto N es, a cada momento, igual a la fuerza F.

En efecto, el arco infinitamente pequeño descrito por N en el tiempo dt es, por construccion, igual a Fdt i tiene la misma direccion i sentido que la fuerza F, luego la velocidad del punto N es precisamente igual a F.

Por otra parte, la cantidad infinitamente pequeña de impulsion que recibe el punto material durante el tiempo dt es igual al arco infinitamente pequeño correspondiente de la curva de las fuerzas, luego *la cantidad total de impulsion que recibe el punto material durante un intervalo de tiempo dado, tiene la misma medida que el arco correspondiente de la curva de las fuerzas.*

PROPIEDADES JEOMÉTRICAS RECÍPROCAS DE LA TRAYECTORIA I DE LA CURVA DE LAS FUERZAS

En primer lugar, la tanjente en M a la trayectoria es paralela al radio vector del punto correspondiente N de la curva de las fuerzas i la tanjente en N a la curva de las fuerzas es paralela a la línea de accion de la fuerza que obra en M.

Llamemos *cono de las velocidades* el cono formado con los radios vectores de la curva de las fuerzas; podremos decir: el plano osculador en un punto M de la trayectoria es paralelo al plano tanjente en N al cono de las velocidades i el plano osculador en N a la curva de las fuerzas, es paralelo a las líneas de accion de las fuerzas que obran en dos puntos infinitamente próximos correspondientes de la trayectoria.

TEOREMA I.—*Si la trayectoria de un punto material es plana, la curva de las fuerzas es plana i recíprocamente.*

En efecto, si la trayectoria es plana, las velocidades sucesivas del punto material estan contenidas en el mismo plano; luego, el cono de las velocidades se reduce a un plano i la curva de las fuerzas, situada sobre este cono, es plana.

Recíprocamente, si la curva de las fuerzas es plana, el cono de las velocidades se reduce a un plano i los planos osculadores en los diferentes puntos de la trayectoria son paralelos a este plano. Esto exije que la trayectoria sea plana.

En estos casos es bien evidente que los planos de las dos curvas son paralelos.

TEOREMA II.—*Si las líneas de accion consecutivas e infinitamente próximas de la fuerza F se cortan, la trayectoria es plana.*

En efecto, si esto sucede, las líneas de accion consecutivas de la fuerza en M i M' i la velocidad del punto material en M, estan en un mismo plano, luego el plano osculador en el punto correspondiente N de la curva de las fuerzas pasa por el punto fijo O.

Así, los planos osculadores en los diferentes puntos de las curvas de las fuerzas pasan todos por un mismo punto O. Esto exije que la curva de las fuerzas sea plana; luego, tambien la trayectoria es plana.

Es el caso, por ejemplo, en que la línea de accion de la fuerza pasa siempre por un punto fijo, o bien queda siempre paralela a una direccion fija. En estos dos casos la trayectoria del punto material es siempre plana.

FUERZA TANJENCIAL I FUERZA CENTRÍPETA

Se sabe que, a cada momento t, se puede reemplazar la fuerza F por otras fuerzas simultáneas con la condicion que la resultante jeométrica de estas últimas sea igual a F.

Reemplacemos la fuerza F por dos fuerzas simultáneas dirijidas: una F_t segun la tanjente a la trayectoria; la otra F_n segun la normal principal, es decir, la normal situada en el plano osculador. La componente F_t se llama *fuerza tanjencial* i la componente F_n *fuerza centrípeta.*

Estas dos componentes de la fuerza se relacionan de una manera mui sencilla con los elementos que definen el movimiento del punto material.

Escribamos, en efecto, que la cantidad de movimiento $m(v+dv)$ es la resultante jeométrica de mv i de Fdt; para esto consideremos el triángulo NON' (fig. 4); sean: $d\epsilon$ el ángulo infinitamente pequeño en O i α el ángulo que forma la prolongacion de ON con NN'; la proyeccion de $ON'=m\ (v+dv)$ sobre una direccion cualquiera es igual a suma de las proyecciones sobre la misma direccion, de $ON=mv$ i de $NN'=Fdt$.

Proyectemos sobre ON, tendremos

$$m\ (v+dv) \cos d\epsilon = mv + F\,dt \cos \alpha$$

O simplemente, si se desprecian los infinitamente pequeños de órden superior a dt.

$$mdv = F\,dt \cos \alpha$$

Proyectemos ahora sobre una perpendicular cualquiera a ON, situada en el plano del triángulo $N\ O\ N'$ tendremos

$$m\ (v+dv) \text{ sen } d\epsilon = Fdt \text{ sen } \alpha$$

O simplemente

$$mv\, d\epsilon = Fdt \operatorname{sen} \alpha$$

El ángulo α es tambien igual al ángulo que forman en M, la velocidad i la fuerza, luego

$$F \cos \alpha = F_t = m \frac{dv}{dt}$$

$$F \operatorname{sen} \alpha = F_n = mv \frac{d\epsilon}{dt}$$

El ángulo $d\epsilon$ es el que forman las velocidades en M i M' es decir el ángulo de las tanjentes en dos puntos infinitamente próximos de la trayectoria. Sea ρ el radio de curvatura de la trayectoria en M se tiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\epsilon}{ds} = \frac{d\epsilon}{vdt}$$

Luego

$$F_n = \frac{mv^2}{\rho}$$

Se ve que la fuerza tanjencial F_t hace variar la magnitud de la velocidad v i no cambia su direccion. Si la fuerza F que obra sobre el punto material, es normal a la trayectoria en uno de sus puntos, se tiene, en este punto, $F_t = 0$, i por consiguiente $\frac{dv}{dt} = 0$; esto prueba que, en el punto considerado, la velocidad es máxima o mínima. Si en todos los puntos la fuerza es normal a la trayectoria, se tiene, a cada momento, $\frac{dv}{dt} = 0$; luego la velocidad v es constante.

Recíprocamente, para que la velocidad de un punto sea constante, se necesita que $\frac{dv}{dt} = 0$, o bien que

$$F_t = F \cos \alpha = 0$$

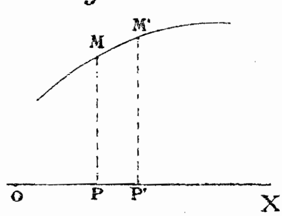
Si F no es nulo, α debe ser siempre recto.

La fuerza centrípeta F_n no cambia la magnitud de la velocidad, pero hace variar su direccion. Si, en un punto de la trayectoria, la fuerza F es dirijida segun la tanjente, se tiene en este punto, $\alpha=0$; luego $F_n=0$ i $\frac{d\epsilon}{dt}=0$; o bien $\rho=\infty$: luego, en este punto, la trayectoria presenta un punto de infleccion. Si en todos los puntos de la trayectoria la fuerza F es dirijida segun la tanjente, esta trayectoria tiene, en cada punto, un radio de curvatura infinito, luego es una recta. Es lo que se ha establecido directamente en el capítulo anterior.

ECUACIONES JENERALES DE LA DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

Para determinar el movimiento de un punto material, se determinan los movimientos de sus tres proyecciones sobre tres ejes rectangulares, fijos en el espacio. Estableceremos, en primer lugar, los teoremas siguientes:

Fig. 5



TEOREMA I.—*Cuando se proyecta un punto móvil sobre un eje fijo, la velocidad del punto proyectado es la proyeccion de la velocidad del punto en el espacio.*

Sean, en efecto (fig. 5): M i M' dos posiciones del móvil en los momentos t i $t+dt$; Δs el arco MM'; P i P' las proyecciones de M i M' sobre un eje fijo OX, i Δx la distancia PP'; v la velocidad de M i v_x la del punto proyectado P.

Δx es la proyeccion de Δs sobre OX, luego $\frac{\Delta x}{dt}$ será tambien la proyeccion de $\frac{\Delta s}{dt}$ i esto cualquiera que sea el órden de pequeñez de dt. El límite de $\frac{\Delta x}{dt}$ es $\frac{dx}{dt}$ o v_x; por otra parte, el límite de $\frac{\Delta s}{dt}$ es v, luego v_x es tambien la proyeccion de v; lo que demuestra el teorema.

TEOREMA II.—*Cuando un punto móvil, de masa m i sometido a una fuerza F, se proyecta a cada instante sobre un eje fijo, el punto proyectado se mueve como un punto material de masa m i sometido a una fuerza igual a la proyeccion de F sobre el eje de proyeccion.*

Sean, en efecto, (fig. 5), mv i $m\ (v+dv)$ las cantidades de movimiento del punto considerado en los momentos t i $t+dt$, se tiene

$$\overline{m\ (v+dv)}=\overline{mv}+\overline{Fdt}$$

Segun esto, la proyeccion de $m\ (v+dv)$ sobre OX es igual a la suma de las proyecciones de mv i Fdt sobre el mismo eje.

La proyeccion de $m\ (v+dv)$ es $m\ (v_x+dv_x)$; la de mv es mv_x. Sea X la proyeccion de F, la proyeccion de Fdt será Xdt; luego

$$m\ (v_x+dv_x)=mv_x+Xdt$$

O bien

$$m\,dv_x=Xdt$$

I tambien

$$m\frac{dv_x}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}=X$$

Esta fórmula demuestra el teorema; en efecto el punto proyectado se mueve como un punto de masa m sometido a la fuerza X.

Las ecuaciones jenerales de la mecánica se deducen inmediatamente; sea, en efecto, un punto material de masa m, sometido a una fuerza F; x, y, z las tres coordenadas del punto, respecto a un sistema fijo de tres ejes rectangulares i X, Y, Z las tres proyecciones de F; las tres coordenadas x, y, z definen a cada momento las proyecciones del punto móvil sobre los tres ejes, se tiene por consiguiente

$$(1)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=X \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=Y \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2}=Z \end{cases}$$

Tales son las ecuaciones jenerales de la dinámica del punto material.

Estas mismas ecuaciones se podian deducir de la consideracion de la curva de las fuerzas; supongamos en efecto, en la fig. 4, que O sea el oríjen de las coordenadas i sean ξ, η ζ las coordenadas del punto N de la curva de las fuerzas, conjugado del punto móvil M; ON es igual, por construccion a la cantidad de movimiento del punto M, luego

$$(2)\quad \begin{cases} \xi=m\dfrac{dx}{dt} \\ \eta=m\dfrac{dy}{dt} \\ \zeta=m\dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

Por otra parte, la velocidad del punto N es precisamente igual a la fuerza F, luego

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt}=X \\ \dfrac{d\eta}{dt}=Y \\ \dfrac{d\zeta}{dt}=Z \end{cases}$$

La eliminacion de ξ, η, ζ entre (2) i (3) da otra vez las ecuaciones (1).

Las ecuaciones jenerales (1) demuestran qne la proyeccion del punto móvil sobre cada uno de los planos de coordenadas se mueve como un punto de la misma masa m, i sometido a una fuerza igual a la proyeccion de F sobre el plano de coordenadas considerado. Esta propiedad puede, por lo demas, demostrarse directamente de la misma manera como se han establecido los teoremas I i II.

Es bien evidente que, en el caso de un punto material, móvil en un plano, se considera simplemente un sistema de dos ejes rectangulares situados en el plano de la trayectoria. Las ecuaciones (1) se reducen entónces a dos solamente.

APLICACIONES

I

MOVIMIENTO DE LOS PROYECTILES SIN TOMAR EN CUENTA LA RESISTENCIA DEL AIRE

Consideraremos el proyectil como un punto material; sea m su masa; la fuerza F es, en este caso, vertical e igual a mg, luego la curva de las fuerzas se reduce a una recta vertical i la trayectoria del móvil estará situada en el plano vertical que contiene la velocidad inicial.

Tomaremos este plano como plano de coordenadas i elejiremos dos ejes rectangulares: uno OX horizontal; el otro OY vertical i dirijido desde abajo hácia arriba. Las ecuaciones del movimiento serán.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X=0$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y=-mg$$

O bien

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g$$

Una primera integracion da

$$\frac{dx}{dt} = C$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C'$$

Sea v_0 la velocidad inicial i α el ángulo que esta velocidad hace con OX; las dos proyecciones de v_0 sobre los dos ejes serán $v_0 \cos \alpha$ sobre OX i v_0 sen α sobre OY. Como la proyeccion $\frac{dx}{dt}$ de la velocidad sobre OX queda constante e igual a C se deberá tener

$$C = v_0 \cos \alpha$$

Ademas $\frac{dy}{dt}$ debe ser igual a v_0 sen α, cuando $t=0$, luego

$$C' = v_0 \operatorname{sen} \alpha$$

En resúmen, la primera integracion nos da

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_0 \cos \alpha \\ \frac{dy}{dt} &= -gt + v_0 \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \right.$$

Se deduce en seguida

$$x = v_0\, t \cos \alpha + B$$

$$y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0\, t \operatorname{sen} \alpha + B'$$

Supondremos que se hayan elejido los ejes de tal manera que en el momento $t=o$ el punto móvil esté situado en el orí-

El punto B de caida del proyectil es a una distancia de O doble de OC pues el eje AC es eje de simetría de la parábola; luego tenemos

$$OB = \frac{v_0^2}{g} \text{ sen } 2\,\alpha$$

Para una misma velocidad inicial v_0, la distancia OB será máxima cuando sen $2\alpha = 1$ o bien $\alpha = 45°$; se ve por consiguiente que el máximo de OB es igual a $\frac{v_0}{g}$.

Del mismo modo, el máximo de la altura AC a la cual se eleva el punto material tendrá lugar cuando sen α es igual a 1, es decir, cuando $\alpha = 90°$; entónces el valor de AC es igual a $\frac{v_0^2}{2g}$; es la mitad del valor máximo de OB.

NOTA.—Las fórmulas (4) podian obtenerse directamente por medio de la consideracion de la curva de las fuerzas. En el caso considerado, esta es una recta vertical i, para construirla, basta tomar, sobre la direccion de la velocidad inicial, una lonjitud $OH = mv_0$; la recta vertical que pasa por H es la curva de las fuerzas. El punto N correspondiente de M tiene, a cada instante, una velocidad igual a la fuerza $F = mg$, como ésta es constante se ve que el movimiento de N es uniforme i sus coordenadas ξ i η satisfacen a las ecuaciones

$$\xi = mv_0 \cos \alpha$$

$$\eta = mv_0 \text{ sen } \alpha - mg\,t$$

Por otra parte ξ i η son los valores de $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$; se obtienen por consiguiente las fórmulas (4).

Se ve que, en el punto A, la cantidad de movimiento es representada por el vector $OE = mv_0 \cos \alpha$; éste es un mínimo, luego, en A, la velocidad del punto es mínima, lo que es conforme a la teoría jeneral, pues, en este punto A, la fuerza es perpendicular a la velocidad.

jen; entónces, cuando $t=o$ se debe tener $x=y=0$; se ve que las dos constantes B i B' deben ser nulas.

En resúmen, las coordenadas x, y del punto móvil, en un momento cualquiera t, satisfacen a las relaciones

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha \\ y &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \right.$$

Trayectoria del punto.—La ecuacion de la trayectoria resultará de la eliminacion de t entre las ecuaciones (5); se obtiene asi

$$y = x \, tg \, \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

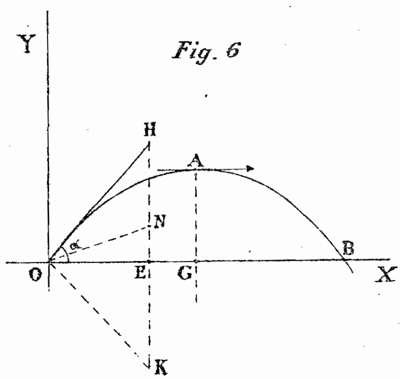


Fig. 6

Es la ecuacion de una *parábola* de eje vertical.

Para obtener el punto A en el cual la velocidad es horizontal, basta considerar las ecuaciones (4) i buscar cual es el valor de t que corresponde a una velocidad horizontal; sea T este valor. Cuando t es igual a T se debe tener $\frac{dy}{dt}=0$, luego

$$-g \, T + v_0 \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$T = \frac{v_0}{g} \operatorname{sen} \alpha$$

Las coordenadas del punto A son entónces, segun (5).

$$x = OG = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$y = AG = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \alpha$$

II

MOVIMIENTO DE LOS PROYECTILES CUANDO SE TOMA EN CUENTA LA RESISTENCIA DEL AIRE

La trayectoria del proyectil es todavia plana; en efecto, el plano tanjente al cono de las velocidades, en un punto cualquiera de la curva de las fuerzas, es vertical, luego el cono mismo se reduce a un plano vertical. Asi la trayectoria es contenida en el plano vertical que pasa por la velocidad inicial.

La solucion del problema es, en jeneral, mui complicada; trataremos, en primer lugar, de determinar la forma de la curva de las fuerzas.

Para mas sencillez, supondremos la masa del proyectil igual a la unidad; sean ξ, η las coordenadas de un punto de la curva de las fuerzas, respecto a un sistema de ejes rectangulares, uno horizontal, otro vertical i dirijido hácia arriba; sea tambien $f(v)$ la funcion que representa el efecto de la resistencia del aire, tendremos las ecuaciones

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{\xi}{v}f(v) \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\eta}{v}f(v)-g \\ v^2 &= \xi^2+\eta^2 \end{aligned}\right.$$

La eliminacion de t es evidente i se obtiene

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\eta}{\xi}+\frac{gv}{\xi f(v)}$$

O bien

$$d\left(\frac{\eta}{\xi}\right)=\frac{gv}{f(v)}\,\frac{d\xi}{\xi^2}$$

Supondremos que la resistencia del aire es proporcional a la potencia n de la velocidad; sea

$$f(v)=g\frac{v^n}{K^n}$$

Tendremos la ecuacion diferencial

$$(7) \qquad d\left(\frac{\eta}{\xi}\right)=\frac{K^n}{v^{n-1}}\,\frac{d\xi}{\xi^2}$$

Hagamos

$$\frac{\eta}{\xi}=u$$

Entonces

$$v=\xi\sqrt{1+u^2},$$

I la ecuacion (7) se trasforma en la siguiente

$$(8) \qquad du\,(1+u^2)^{\frac{n-1}{2}}=\frac{K^n\,d\xi}{\xi^{n+1}}$$

Esta ecuacion permite espresar ξ en funcion de u; en seguida la primera de las ecuaciones (6), combinada con (8), da simplemente

$$(9) \qquad \frac{du}{dt}=-\frac{g}{\xi}$$

Si en esta, se reemplaza ξ por su valor en funcion de u, la integracion permitirá espresar u en funcion de t; finalmente se obtendrán los valores de ξ i η en funcion de t.

La ecuacion de la trayectoria se deducirá en seguida de las dos ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=\xi$$

$$\frac{dy}{dt}=\eta$$

Estas se podrán integrar, luego el problema está teóricamente resuelto. Aplicaremos este método a los dos casos $n=1$, $n=3$.

Caso de $n=1$

La resistencia del aire es proporcional a la velocidad

La ecuacion (8) se reduce a

$$du = \frac{K\,d\xi}{\xi^2}.$$

Luego

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{C} - \frac{u}{K}$$

Esta ecuacion muestra que la curva de las fuerzas es una recta, se deduce, en efecto, de ella

$$1 = \frac{\xi}{C} - \frac{\eta}{K}$$

La ecuacion (9) da ahora

$$\frac{du}{dt} = \frac{g}{K}\left(u - \frac{K}{C}\right)$$

Luego

$$u = \frac{K}{C} - B\,e^{\frac{g}{K}t}$$

$$\xi = \frac{K}{B}e^{-\frac{gt}{K}}$$

$$\eta = \frac{K^2}{BC}e^{-\frac{gt}{K}} - K$$

Sea v_0 la velocidad inicial i α su inclinacion, tendremos

$$B = \frac{K}{v_0 \cos \alpha}$$

$$C = \frac{K\,v_0 \cos \alpha}{K + v_0 \operatorname{sen} \alpha}.$$

Los valores de x e y se obtienen en seguida; supongamos que $x=0$, $y=0$, en el momento $t=0$, tendremos

$$x=\frac{K}{g}v_0 \cos\alpha\left(1-e^{-\frac{gt}{K}}\right)$$

$$y=\frac{K(K+v_0 \operatorname{sen}\alpha)}{g}\left(1-e^{-\frac{gt}{K}}\right)-Kt$$

Estas ecuaciones muestran que la trayectoria tiene una asintota vertical i ésta tiene por abcisa

$$\frac{K v_0 \cos\alpha}{g}$$

Caso de $n=3$

La resistencia del aire es proporcional al cubo de la velocidad

La ecuacion (8) da entónces

$$du(1+u^2)=\frac{K^3\,d\xi}{\xi^4}$$

Luego

$$\frac{1}{\xi^3}=\frac{1}{C^3}-\frac{3u}{K^3}-\frac{u^3}{K^3}$$

La ecuacion de la curva de las fuerzas es, en este caso,

$$1=\frac{\xi^3}{C^3}-3\frac{\xi^2\eta}{K^3}-\frac{\eta^3}{K^3}$$

Es una curva de tercer grado. No daremos mas desarrollo a la solucion de este problema, solo buscaremos la espresion de la velocidad v del proyectil en funcion de la inclinacion θ de esta velocidad; se tiene

$$\xi=v\cos\theta$$

$$\eta=v\operatorname{sen}\theta$$

Luego

$$\frac{1}{v^3} = \frac{\cos^2\theta}{C^3} - \frac{\sin\theta\,(3\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}{K^3}$$

Sea γ el valor de θ para el cual v es un mínimo; este valor será determinado por la relacion

$$tg\, 2\gamma = -\frac{2\,C^3}{K^3}$$

El valor correspondiente v_1 de la velocidad, es por consiguiente

$$v_1{}^3 = \frac{C^3 \cos 2\gamma}{\cos\gamma}$$

La constante C es funcion de la velocidad inicial i de su inclinacion inicial.

CAPÍTULO IV

TEORÍA DE LOS MOMENTOS

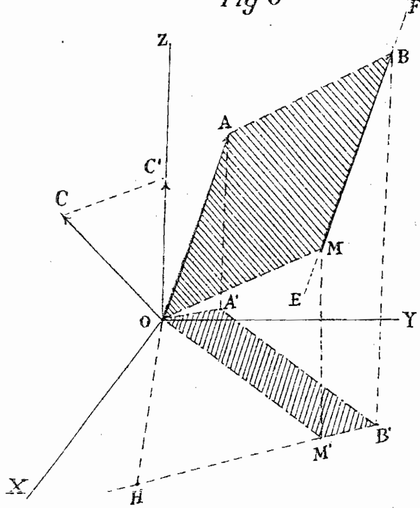
TEOREMA DE LAS ÁREAS

Para definir un vector en el espacio se necesitan *seis* condiciones: las tres coordenadas del punto de aplicacion i las tres proyecciones del vector.

Cinco condiciones bastarán para definir todos los vectores iguales i de mismo sentido, situados sobre la misma línea de accion: las tres proyecciones de uno de ellos i dos elementos mas para fijar la posicion de la línea de accion comun.

Sea (fig. 8) MB uno de los vectores considerados i EF su línea de accion; las tres proyecciones de MB definen otro vector OA, igual al primero i que tiene su punto de aplicacion en el oríjen.

Sea OC una recta perpendicular al plano OEF i tal que su lonjitud tenga la misma medida que el área del paralelógramo $OABM$; esta recta se llama el *eje del vector* MB. Su sentido es tal que un observador, colocado segun OC, los piés en O i la cabeza en C vea el sentido del vector MB en un sentido determinado que llamaremos *sentido positivo.*



Es bien evidente que todos los vectores iguales a MB, de mismo sentido i situados sobre la misma línea de accion EF tienen el mismo eje OC; inversamente, el eje OC i el vector OA definen completamente la línea de accion EF; en efecto, EF es paralelo a OA i se encuentra en un plano perpendicular a OC; su distancia al oríjen tiene por medida el cociente de OC por OA, i el sentido en el cual se deberá contar esta distancia es fijado por el sentido de OC.

En resúmen, todos los vectores iguales a MB, situados sobre la línea de accion EF, son definidos por los dos vectores OA i OC. Como OC es evidentemente perpendicular a OA, las seis proyecciones de estos dos vectores satisfacen a una ecuacion de condicion i equivalen, por consiguiente, a cinco condiciones distintas; es conforme a lo que se ha establecido mas arriba.

La proyeccion OC' del eje OC, sobre OZ, se llama *momento* del vector MB respecto a OZ; como todos los vectores iguales a MB i situados sobre EF tienen el mismo eje, sus momentos respecto a OZ serán iguales.

Sea α el ángulo OC con OZ, se tiene

$$OC' = OC \cos \alpha$$

Pero OC tiene por medida el área del paralelógramo $OABM$, luego OC' tendrá por medida el producto de la misma área por cos α; como el plano del paralelógramo $OABM$ hace con XOY el mismo ángulo α, se ve que el producto de su área por cos α es el área del paralelógramo $OA'B'M'$, proyeccion de $OABM$ sobre XOY. Así, el momento del vector MB respecto a OZ tiene tambien por medida el área del paralelógramo $OA'B'M'$; sea OH una perpendicular bajada desde el punto O sobre $M'B'$, la medida del paralelógramo $OA'B'M'$ es el producto $M'B' \times OH$, luego *el momento de un vector respecto a un eje es igual al producto de la proyeccion del vector sobre un plano perpendicular al eje, por la distancia del eje a esta proyeccion.* Es otra definicion equivalente del momento. Segun esta definicion, el momento de un vector MB, respecto a un eje OZ, es el mismo que el momento, respecto al mismo eje, de la proyeccion $M'B'$ de MB en un plano perpendicular a OZ.

La proyeccion OC' del eje OC sobre OZ tiene un signo determinado; luego el momento es susceptible tambien de un signo, este puede obtenerse directamente: basta suponer un observador, colocado segun OZ, los piés en O; este observador verá la proyeccion $M'B'$ en un sentido determinado; si este sentido es positivo, el momento es positivo, i si es negativo, el momento es negativo.

De las definiciones establecidas se deduce inmediatamente: 1.° que el momento de un vector, respecto a un eje, es nulo cuando el vector encuentra el eje o es paralelo al eje; 2.° que la suma de los momentos, respecto a un eje cualquiera, de dos vectores iguales, situados sobre la misma línea de accion i de sentido opuesto, es igual a cero; 3.° que, si se multiplica la lonjitud de un vector por cierto coeficiente, el momento del vector se multiplica por el mismo coeficiente.

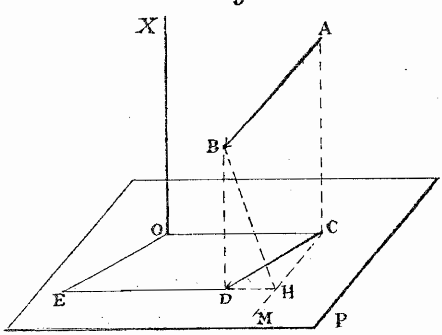
Nota importante.—Cuando se refiere la posicion de un vector a un sistema de tres ejes rectangulares, el sentido positivo es siempre indicado por la disposicion misma de los ejes de coordenadas: es el sentido de la rotacion que debe efectuar un observador colocado segun OZ, los piés en O i la cabeza en Z, para pasar de OX a OY por una rotacion de 90°. Así, en la figura 8, el sentido positivo es el de derecha a izquierda.

TEOREMA

Cuando un vector es la resultante jeométrica de otros vectores concurrentes, el momento de la resultante, respecto a un eje cualquiera, es igual a la suma de los momentos de las componentes.

Sea A (fig. 9) el punto de aplicacion comun de los vectores considerados, i AB uno de ellos; OX el eje de los momentos i P un plano perpendicular a OX; CD la proyeccion de AB sobre el plano P.

Fig. 9



El momento de AB, respecto a OX, tiene por medida el área del paralelógramo $OCDE$ construido sobre CD i el punto O; sea CM una perpendicular trazada, en el plano P, a la recta OC i H su punto de encuentro con ED; el área del paralelógramo $OCDE$ tiene por medida el producto $OC \times CH$. Segun el *teorema de las tres perpendiculares*, BH es perpendicular sobre CM, por consiguiente, el momento de AB, respecto a OX es igual al producto de OC por la proyeccion CH de AB sobre CM. La lonjitud OC es constante para todos los vectores que tienen su punto de aplicacion en A i, por otra parte, la proyeccion, sobre CM, de la resultante jeométrica de algunos vectores es igual a la suma de las proyecciones de los componentes; luego, si se multiplican estas proyecciones por la constante OC, *el momento de la resultante, respecto a* OX, *es igual a la suma de los momentos de las componentes.*

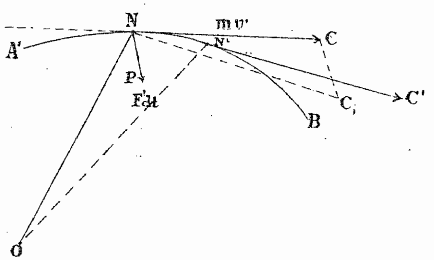
PROPIEDADES DE LOS MOMENTOS DE LAS CANTIDADES DE MOVIMIENTO

Sea (fig. 10) O el pié de un eje OZ perpendicular al plano de la figura i, en este plano, $A'B'$ la proyeccion de la trayectoria de un punto material de la masa m; N, N' las proyecciones de este punto en los momentos t i $t+dt$; $NC=mv'$ i $N'C'=m(v'+dv')$ las proyecciones de las cantidades de movimiento mv i $m(v+dv)$ en los mismos momentos i F′ la proyeccion de la fuerza F que obra sobre el punto considerado en el momento t.

Se sabe que, respecto al eje OZ, los momentos de mv, $m(v+dv)$ i F son respectivamente iguales a los momentos de las proyecciones mv', $m(v'+dv')$ i F'.

Tracemos por N una recta NC_1 igual en lonjitud, direccion i sentido a $N'C'$; los momentos de los dos vectores NC_1 i $N'C'$ pueden sustituirse uno a otro; en efecto, el momento de $N'C'$ es el paralelógramo construido sobre ON' i $N'C'$ i el momento de NC_1 es el paralelógramo construido sobre ON i NC_1; la diferencia entre las áreas de estos paralelógramos es del mismo órden que el área del paralelógramo construido sobre NC_1 i $N'C'$ i el área de este último es infinitamente pequeña de segundo órden respecto a dt; luego el momento de la cantidad de movimiento $m\ (v'+dv')$ aplicada en N' puede reemplazarse por el momento de NC_1; por otra parte, sea $NP=F'dt$; se sabe qne NC es la resultante jeométrica de NC i de NP, luego, si se designan los momentos con el símbolo M^t , se tendrá

Fig. 10



$$M.^t\ NC_1 = M.^t\ NC + M.^t\ NP$$

O bien

$$M_{\cdot}^{t}\ m\,(v'+dv')=M_{\cdot}^{t}\ mv'+M_{\cdot}^{t}\ F'\,dt$$

O todavia

$$M_{\cdot}^{t}\ m\,(v+dv)=M_{\cdot}^{t}\ mv+M_{\cdot}^{t}\ F\,dt$$

El momento de mv respecto a OZ es una funcion del tiempo i cuando t se cambia en $t+dt$, $M_{\cdot}^{t}\ mv$ se cambia en $M_{\cdot}^{t}\ m(v+dv)$, luego podemos escribir

$$d\,M_{\cdot}^{t}\ mv=M_{\cdot}^{t}\ F\,dt=dt\,M_{\cdot}^{t}\ F$$

O bien

(1) $$\frac{d\,M_{\cdot}^{t}\ mv}{dt}=M_{\cdot}^{t}\ F$$

Como se ha dicho mas arriba, el momento, respecto a un eje fijo, de la cantidad de movimiento de un punto móvil, es una funcion del tiempo; segun la relacion (1), la derivada de esta funcion es igual al momento, respecto al mismo eje, de la fuerza que obra sobre este punto.

Supongamos que la línea de accion de la fuerza F encuentre siempre el eje de los momentos, entonces

$$M_{\cdot}^{t}\ F=0$$

Luego, en este caso

$$M_{\cdot}^{t}\ mv=\text{const.}$$

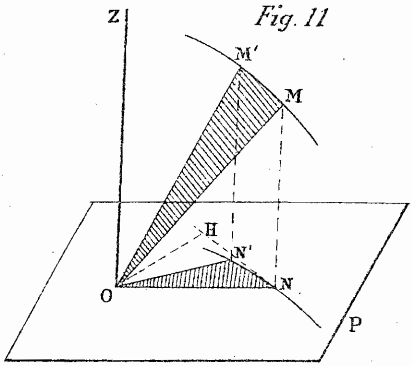
Recíprocamente, si el momento de la cantidad de movimiento de un punto móvil, respecto a cierto, eje es constante, la fuerza que obra sobre el punto encuentra constantemente el eje.

TEOREMA DE LAS ÁREAS

Sea, (fig. 11), M un punto material de masa m, v su velocidad en el momento t; busquemos el momento de su cantidad de movimiento respecto a un eje OZ.

Sea N la proyeccion de M en un plano P, perpendicular a OZ i v' la velocidad del punto proyectado N; se sabe que v' es la proyeccion de v, luego el momento de la cantidad de movimiento mv del punto M es igual al momento de mv'.

Fig. 11



En el momento $t+dt$, los puntos M i N han venido en M' i N' i se tiene

$$m\,v' = m \lim \frac{N\,N'}{dt}$$

Sea NH una tanjente a la trayectoria de N i OH su distancia al eje OZ, se tiene

$$M.^t\ mv = M.^t\ mv' = OH \times m \lim \frac{N\,N'}{dt}$$

I se puede escribir tambien

$$M.^t\ mv = m. \lim \frac{O\,H \times N\,N'}{dt}$$

Sea $\Delta\,a'$ el área del triángulo infinitamente pequeño ONN' se tiene

$$\Delta\,a' = \frac{1}{2} NN' \times OH$$

Luego

$$M.^t\ mv = 2\,m \lim \frac{\Delta\,a'}{dt} = 2\,m\,\frac{d\,a'}{dt} \qquad (2)$$

El área $\Delta\,a'$ es la proyeccion del área $\Delta\,a$ del triángulo MOM', luego $\frac{da'}{dt}$ es tambien la proyeccion de $\frac{da}{dt}$ sobre el plano P perpendicular a OZ.

El producto $m\frac{da}{dt}$ se llama *cantidad de movimiento areolar* del punto M respecto al punto O; se ve, por consiguiente, que *el momento de la cantidad de movimiento de un punto móvil M, respecto a un eje OZ, es igual a la proyeccion sobre un plano P, perpendicular a OZ, de la cantidad de movimiento areolar de M, respecto a un punto cualquiera del eje OZ.*

Si la fuerza que obra sobre el punto M encuentra constantemente el eje OZ, el momento de mv respecto a este eje queda constante; se tiene, por consiguiente, tambien en este caso i segun (2).

$$\frac{da'}{dt} = C$$

luego

$$a' = Ct + C'$$

Así, la proyeccion, sobre el plano P, del área descrita por el radio vector OM varía proporcionalmente al tiempo.

Recíprocamente *si la proyeccion sobre el plano P, del área descrita por el radio vector que une el punto móvil con cierto punto O, varia proporcionalmente al tiempo, la fuerza que obra sobre el punto móvil encuentra constantemente un eje OZ, perpendicular al plano P.*

En efecto, se tiene en este caso

$$a' = Ct + C'$$

Luego

$$\frac{da'}{dt} = C$$

I por consiguiente, segun (2)

$$M_{\cdot}^{t}\ mv = \text{const.}$$

La ecuacion (1) da entónces

$$M_{\cdot}^{t}\ F = 0$$

Luego la fuerza F encuentra OZ.

Aplicacion al movimiento de los planetas

Se sabe que las trayectorias de los planetas, al rededor del Sol, son planas i que los planos pasan por el Sol. Ademas, una de las leyes de Kepler dice que el radio vector, que une el planeta con el Sol, describe áreas proporcionales al tiempo. Sea, en la figura (11), P el plano de la trayectoria i O el Sol; la fuerza que obra sobre el planeta está situada en el plano P i ademas encuentra siempre el eje OZ, perpendicular a este plano; luego la fuerza pasa siempre por el punto O, es decir, por el Sol.

PROPIEDADES JEOMÉTRICAS DE LA CURVA DE LAS FUERZAS, CUANDO LA LÍNEA DE ACCION DE LA FUERZA PASA SIEMPRE POR UN PUNTO FIJO.

Sean (fig. 12) O el punto fijo; AB la trayectoria; M la posicion del móvil; MT su cantidad de movimiento; CD la curva de las fuerzas; N el punto de esta curva, conjugado de M.

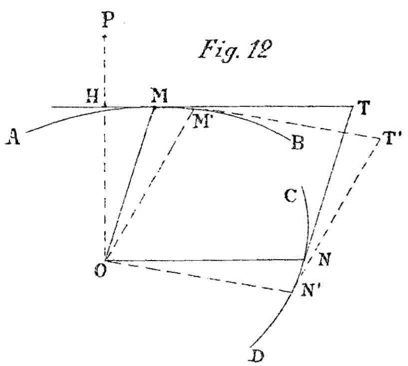


Fig. 12

Por hipótesis, la fuerza que obra en M es dirijida segun MO i, por definicion, la tanjente en N a la curva de las fuerzas es paralela a OM. Ademas, como el momento de la cantidad de movimiento, respecto a un eje perpendicular, en O, al plano de la figura, es constante, el área del paralelógramo $OMTN$, que mide este momento, es constante.

Para deducir la posicion del punto N conjugado de M, se trazará, por consiguiente ON paralelo a la tanjente en M a la curva AB i se tomará una lonjitud ON tal que el área del paralelógramo construido sobre OM i ON tenga un área constante.

Se ve, desde luego, que las propiedades de las curvas AB i CD son recíprocas.

Sea OH una perpendicular bajada desde O sobre MT i $OP = ON$; el lugar jeométrico de N se deducirá del lugar jeométrico de P, haciendo jirar este último de un ángulo de 90° al rededor de O.

Ahora el lugar jeométrico de los puntos H es la *podar* de la curva AB i, como el producto $OH \times OP$ mide tambien el área constante del paralelógramo $OMTN$, se ve que el lugar jeométrico de P es una trasformada por radios vectores recíprocos de la curva, lugar jeométrico es H.

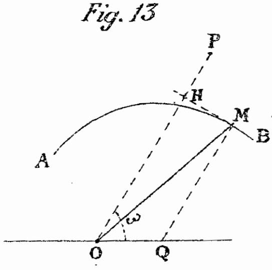
En resúmen, *una cualquiera de las dos curvas es, respecto al punto fijo, una trasformada, por radios vectores recíprocos de la podar de la otra.*

Este resultado permite deducir fácilmente la forma de una de las curvas cuando se conoce la otra; consideremos los casos siguientes:

1.° *La curva AB es una circunferencia de centro O.* La podar AB será confundida con AB i el lugar jeométrico de los puntos P será tambien una circunferencia de centro O; luego la curva CD es una circunferencia concéntrica con AB.

2.° *La curva AB es una circunferencia escéntrica a O.* Sea (fig. 13), Q el centro de la circunferencia, R el radio, ρ la distancia OH i r la distancia OP, ω el ángulo POQ i $OQ = a$.

Fig. 13



El lugar jeométrico de los puntos H tiene por ecuacion

$$\rho = R + a \cos \omega$$

Sea K^2 el valor del producto constante $\rho\, r$; el lugar jeométrico de los puntos P tendrá por

$$r = \frac{K^2}{R + a \cos \omega}$$

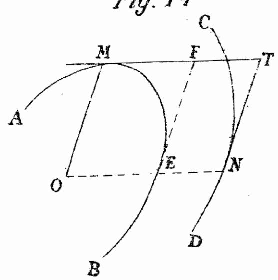
Es la ecuacion de una cónica que tiene su foco en el punto O. i su eje mayor dirijido segun OQ.

La curva de las fuerzas CD es tambien una cónica cuyo foco está en el punto fijo i cuyo eje mayor es perpendicular a OQ. Ademas, la curva CD es una elipse si a es menor que R, una parábola si $a=R$ i una hipérbole si a es mayor que R.

3.° *La curva AB es una cónica cuyo foco está en el punto fijo O.* Segun el resultado obtenido en el caso anterior, se sabe ya que CD es una circunferencia; sin embargo, la demostracion directa es mui sencilla. Supongamos que, en la fig. (12), AB sea una cónica, cuyo foco está en O; el lugar jeométrico de los puntos H será una circunferencia i, como caso particular, una recta cuando AB es una parábola; la trasformada por radios vectores recíprocos es por consiguiente una circunferencia.

4.° *La curva AB es una elipse de centro o.* Es fácil de ver que la curva CD es una elipse semejante. Sea, en efecto (fig. 14) AB una elipse de centro O; el punto N de la curva CD es determinado por la condicion que el paralelógramo $MONT$ tenga un área constante; sea E el punto de encuentro de ON con AB i EF una paralela a OM, se sabe que el área del paralelógramo $OMFE$ queda constante cualquiera que sea el punto M; las áreas constantes de los paralelógramos $OMTN$ i $OMFE$ son entre si como ON es a OE, luego la razon $\frac{ON}{OE}$ es constante i el lugar de los puntos N es una elipse semejante de la primera.

Fig. 14



OTRA ESPRESION DE LA FUERZA CUANDO SU LÍNEA DE ACCION PASA POR UN PUNTO FIJO

Sea, (fig. 12), M' la posicion del móvil en el momento $t+dt$ i N' el punto conjugado de la curva de las fuerzas; $d\theta$ el ángulo MOM' i r el radio vector OM. Las tanjentes en N i N' a la curva de las fuerzas hacen entre si el ángulo $d\theta$, luego si R es el radio de curvatura de la curva de las fuerzas en N se tiene

$$R\, d\theta = NN' = F\, dt$$

El radio vector OM describe áreas proporcionales al tiempo, luego

$$r^2\, d\theta = C\, dt$$

I, de estas dos relaciones se deduce

$$\frac{R}{r^2} = \frac{F}{C}$$

O bien

$$F = \frac{CR}{r^2} \tag{3}$$

Apliquemos esta fórmula a los casos principales considerados mas arriba:

1.° Si, como en el caso de los planetas, la trayectoria es una cónica cuyo foco está en el punto fijo, la curva de las fuerzas es una circunferencia i su radio de curvatura R es constante; luego, si μ es una constante, se tiene:

$$F = \frac{\mu}{r^2}$$

La fuerza es en razon inversa del cuadrado de la distancia r.

2.° Si la trayectoria es una elipse, cuyo centro está en el punto fijo, la curva de las fuerzas es una elipse semejante; en la figura 14, el radio de curvatura en N de la curva de las fuerzas es proporcional al cubo de OM o a r^3, luego, en este caso, si K es una constante:

$$F = K\, r$$

La fuerza es proporcional a la distancia r.

A. Obrecht

(Continuará)