CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

SEGUNDA PARTE

INTRODUCCION

Esta segunda parte comprende la discusion completa de la serie de Taylor i la teoría de la curvatura de las curvas i de las superficies.

Se sabe la importancia que tiene, en la análisis, el célebre desarrollo de Taylor. Por su intermedio, una funcion cualquiera $f(x)$ puede representarse bajo la forma de una serie ordenada segun las potencias enteras i consecutivas de $x-a$. Sin embargo, la funcion i su desarrollo no son siempre iguales; en los casos mas numerosos, la variable debe quedar encerrada entre límites perfectamente determinados para que la igualdad exista.

Este punto capital no ha sido esplicado claramente hasta ahora; aunque se sabe perfectamente determinar los límites entre los cuales el desarrollo es igual a la funcion, no se dice el por qué de esta anomalía aparente.

La esplicacion es mui sencilla cuando se comparan las dos curvas cuyas ordenadas son representadas: 1.º por la funcion $f(x)$ i 2.º por el desarrollo de la funcion segun las potencias de $x-a$. Se demuestra entónces que estas dos curvas tienen, en el punto de abcisa a, un contacto de órden infinito. Un tal contacto no quiere decir que las dos curvas coinciden en toda la estension del plano; indica solamente que la coincidencia existe en la estension de cierto arco que puede ser finito o infinito.

La espresion de la resta de la serie se da bajo la forma de una integral definida de la cual se pueden deducir fácilmente las espresiones obtenidas por Lagrange i Cauchy.

CAPÍTULO PRIMERO

DERIVADAS I DIFERENCIALES DE ÓRDEN SUPERIOR

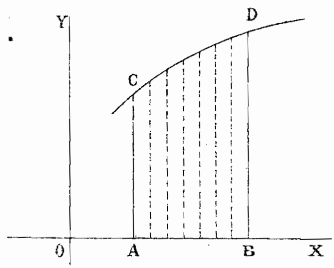
Derivadas.—Sea $f(x)$ cierta funcion continua de x i $f'(x)$ su derivada; esta derivada es tambien una funcion continua de x, por consiguiente tiene una derivada; ésta se designa por $f''(x)$ i se llama *derivada segunda* de $f(x)$. Del mismo modo $f''(x)$ tiene una derivada $f'''(x)$ que se llama *derivada tercera de x.* En jeneral, la funcion que resulta de n derivaciones consecutivas de $f(x)$ se designa por $f^{n}(x)$ i se llama *derivada de órden n* de $f(x)$.

Diferenciales.—Sea (fig. 1) CD una curva plana, $y=f(x)$ su ecuacion respecto a dos ejes de coordenadas rectangulares; consideremos dos ordenadas CA i DB i dividimos el intérvalo AB en cierto número de partes iguales; sean x_k, x_{k+1}, x_{k+2} tres abcisas consecutivas i dx el intervalo constante de ellas; sean tambien y_k, y_{k+1}, y_{k+2} las ordenadas correspondientes de la curva i Δy_k, Δy_{k+1} sus diferencias consecutivas, se tendrá:

$$x_{k+1}=x_k+dx \qquad y_{k+1}=y_k+\Delta y_k$$

$$x_{k+2}=x_{k+1}+dx \qquad y_{k+2}=y_{k+1}+\Delta y_{k+1}$$

En jeneral, si la curva es continua entre las abcisas OA i OB, la razon $\frac{\Delta y}{dx}$ tiende hácia un límite finito, igual a la derivada $f'(x)$ de la funcion $f(x.)$ Luego se puede escribir



$$(1)\quad \frac{\Delta y}{dx} = f'(x) + (dx)^p \, \phi(x)$$

En esta ecuacion, $\phi(x)$ será cierta funcion continua de x i p cierta cantidad positiva, pues el último término debe tender hácia cero cuando dx tiende hácia cero; apliquemos la fórmula (1) a las abcisas consideradas, tendremos:

$$\frac{\Delta y_k}{dx} = f'(x_k) + dx^p \, \phi(x_k)$$

$$\frac{\Delta y_{k+1}}{dx} = f'(x_{k+1}) + dx^p \, \phi(x_{k+1})$$

Restemos estas dos ecuaciones i dividamos los dos miembros de la resta por dx, se tendrá

$$(2)\quad \frac{\Delta y_{k+1} - \Delta y_k}{dx^2} = \frac{f'(x_{k+1}) - f'(x_k)}{dx} + dx^p \, \frac{\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)}{dx}$$

La diferencia $\Delta y_{k+1} - \Delta y_k$ se designa por $\Delta^2 y_k$ i se llama *diferencia segunda* de y_k; ahora, en el segundo miembro de (2), el primer término tiende hácia $f''(x_k)$ i el segundo término hácia cero, puesto que este término es el producto de dx^p, en el cual p es positivo, por un factor que tiende hácia un límite finito $\phi'(x_k)$. En resúmen, la ecuacion (2) conduce a la siguiente:

$$\lim \frac{\Delta^2 y_k}{dx^2} = f''(x_k)$$

O de una manera jeneral

$$\lim \frac{\Delta^2 y}{dx^2} = f''(x) \tag{3}$$

Se representa por $\frac{d^2y}{dx^2}$ el límite de $\frac{\Delta^2 y}{dx}$ i se dice que d^2y es la diferencial segunda de y; se escribe pues:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \tag{4}$$

Segun esto, la razon entre $\frac{d^2y}{dx^2}$ i $\frac{\Delta^2 y}{dx^2}$ o bien entre d^2y i $\Delta^2 y$ tiende hácia uno, cuando dx tiende hácia cero, luego d^2y o la diferencial segunda de y puede reemplazar la diferencia segunda $\Delta^2 y$ en todos los problemas en que se trata de buscar el límite de una razon de infinitamente pequeños o de una suma de un numero infinito de ellos.

Ademas, las dos ecuaciones (3) i (4) muestran que $\Delta^2 y$ i d^2y son infinitamente pequeños de segundo órden respecto a dx, pues su razon a dx^2 tiende hácia un límite finito. Como, por otra parte, dx i dy son de un mismo órden, se puede decir tambien que d^2y es infinitamente pequeño de segundo órden respecto a dy.

Todavía se debe notar que, para calcular $f''(x)$, es necesario conocer tres puntos infinitamente próximos de la curva; en efecto, esta derivada es el límite de $\frac{\Delta^2 y}{dx^2}$ i para conocer $\Delta^2 y$ se necesitan tres ordenadas sucesivas; recíprocamente si se conocen tres puntos infinitamente próximos de la curva $y=f(x)$ se puede determinar la derivada segunda $f''(x)$, es decir la derivada segunda de la ordenada respecto a la abcisa.

Si se repite con la fórmula (3) la serie de trasformaciones efectuadas con la fórmula (1) se llega de la misma manera, a la relacion siguiente:

$$\lim \frac{\Delta^3 y}{dx^3} = f'''(x)$$

I así en seguida. De una manera jeneral se obtiene la fórmula:

$$\lim \frac{\Delta^p y}{dx^p} = f^p(x)$$

Este límite se representa por $\frac{d^p y}{dx^p}$ i se dice que $d^p y$ es la diferencial de órden p de y. Se ve, como mas arriba, que $d^p y$ es infinitamente pequeño de órden p respecto a dx i que esta diferencial puede reemplazar la diferencia de mismo órden $\Delta^p y$ en todas las relaciones del cálculo diferencial i del cálculo integral. Así se tiene por definicion:

$$\frac{d^p y}{dx^p} = f^p(x) \tag{5}$$

Ademas, para calcular $\Delta^p y$ se necesita conocer $p+1$ puntos infinitamente próximos de la curva, por consiguiente tambien, para determinar la diferencial o la derivada de órden p, se deben conocer $p+1$ puntos de la curva.

Recíprocamente, si se conocen $p+1$ puntos infinitamente próximos sobre una curva se puede determinar la derivada de órden p de la ordenada respecto a la abcisa.

Otra manera de obtener las fórmulas (4) i (5).—Variable independiente

En la primera parte de este tratado se ha establecido la fórmula siguiente:

$$dy = f'(x)\, dx \tag{6}$$

Una cualquiera de las dos diferenciales dx o dy se puede elejir arbitrariamente, la otra es entónces fijada por la fórmula anterior. Si dx se elije arbitrariamente se dice que x es *variable independiente;* lo mas sencillo es de tomar dx constante, entónces la diferencial dy será cierta funcion de x definida por la relacion (6.) La diferencial de dy se obtendrá por medio de la regla conocida i, como dx se supone constante se tendrá:

$$d\,(dy) = f''\,(x)\,dx^2$$

Para simplificar la escritura se representa $d\,(dy)$ por el símbolo d^2y i se tiene entónces:

$$d^2y = f''\,(x)\,dx$$

O bien

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''\,(x)$$

Es la fórmula (4). Se obtendria de la misma manera la fórmula (5).

Si x no es variable independiente, dx no es constante i su diferencial se representará por d^2x; de la fórmula (6) se deducirá entónces:

$$d^2y = f''\,(x)\,dx^2 + f'\,(x)\,d^2x = f''\,(x)\,dx^2 + \frac{dy}{dx}\,d^2x$$

De ahí se deduce:

$$\text{(4 bis)} \qquad f''\,(x) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

Esta fórmula se reduce naturalmente a (4) cuando $d^2x = 0$, es decir cuando x es variable independiente.

Aplicaciones.

1.º *Cambio de la variable independiente en una ecuacion.*

Sea la ecuacion siguiente en la cual se supone que x es variable independiente:

$$\text{(7)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0$$

Se quiere trasformar esta ecuacion, tomando otra variable independiente t ligada a x por la ecuacion:

$$x=\cos t$$

La primera operacion que se debe hacer es de trasformar la ecuacion (7) en otra equivalente i en la cual x no sea variable independiente; esta nueva ecuacion será, en el caso presente, segun lo que se ha visto mas arriba.

$$(8) \qquad \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3} - \frac{x}{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0$$

Se tiene ahora,

$$dx = -\text{sen}\; t\; dt$$

$$d^2x = -\cos t\; dt^2$$

Llevando estos valores en (8) se obtiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$$

Derivadas sucesivas de un producto.

Sean u i v dos funciones de x, se quiere calcular las derivadas sucesivas del producto:

$$y = u\, v$$

La regla conocida de la derivada de un producto nos da

$$\frac{dy}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u\,\frac{d^2v}{dx^2} + 2\,\frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{d^2u}{du^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = u\,\frac{d^3v}{dx^3} + 3\,\frac{du}{dx}\,\frac{d^2v}{dx^2} + 3\,\frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{d^3u}{dx^3}$$

Se induce ya que la derivada de órden n será dada por la fórmula siguiente:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u\frac{d^n v}{dx^n} + \frac{n}{1}\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} \tag{9}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2 u}{dx^2}\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots\ldots + v\frac{d^n u}{dx^n}$$

Para demostrar que esta última fórmula es exacta, se admite que lo es para la derivada de órden n, i se demuestra que entónces lo será tambien para la derivada de órden $n+1$. Se deduce de la ecuacion (9).

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \left(u\frac{d^{n+1} v}{dx^{n+1}} + \frac{du}{dx}\frac{d^n v}{dx^n}\right) +$$

$$\frac{n}{1}\left(\frac{du}{dx}\frac{d^n v}{dx^n} + \frac{d^2 u}{dx^2}\frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}}\right)$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \frac{d^3 u}{dx^3}\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}}\right) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \left(\frac{dv}{dx}\frac{d^n u}{dx^n} + v\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}}\right)$$

Si se reduce el segundo término de cada paréntesis, con el primero del paréntesis siguiente se averigua fácilmente que se obtiene una fórmula análoga a (9) i en la cual n se ha cambiado en $n+1$. Luego la fórmula (9) es jeneral, pues se averigua para las primeras derivadas i por consiguiente para todas las demas.

Derivadas i diferenciales de órden cualquiera en las funciones de mas de una variable

En la primera parte (Cap. III), hemos visto que en caso de una funcion de varias variables:

$$y = f(u, v, w\ldots\ldots)$$

se puede escribir:

$$dy = \frac{dy}{du}\,du + \frac{dy}{dv}\,dv + \frac{dy}{dw}\,dw + \ldots\ldots$$

Se ha supuesto, para obtener esta fórmula, que $u, v, w\ldots\ldots$ eran funciones de una misma variable x.

Se ha llamado *derivadas parciales* de y respecto a $u, v\ w\ldots\ldots$ las espresiones $\frac{dy}{du}, \frac{dy}{dv}, \frac{dy}{dw}\ldots\ldots$; estas derivadas son tambien funciones de u, v, $w\ldots\ldots$ i tienen, por consiguiente derivadas parciales respecto a estas variables; por analojía con las funciones de una variable se designa por $\frac{d^2y}{du^2}$ la derivada parcial de $\frac{dy}{du}$ respecto a u; por $\frac{d^2y}{du\,dv}$ la derivada parcial de $\frac{dy}{du}$ respecto a v i así en seguida.

En jeneral, si se deriva sucesivamente y, m veces respecto a u, n veces respecto a v, p veces respecto a w, se designa la derivada final por

$$\frac{d^{m+n+p}\,y}{d^m u\, d^n v\, d^p w}$$

Teorema.—*Se puede cambiar el órden de las derivadas sucesivas sin que cambie el resultado final.*

Demostraremos en primer lugar que

$$\frac{d^2y}{du\,dv} = \frac{d^2y}{dv\,du}$$

Se tiene por definicion:

$$\frac{dy}{du} = \lim \frac{f(u+du, v, w\ldots\ldots) - f(u, v, w\ldots\ldots)}{du}$$

O bien, como mas arriba, i siendo k una cantidad positiva:

$$\frac{dy}{du} = \frac{f(u+du, v, w\ldots\ldots) - f(u, v\ldots\ldots)}{du} + (du)^k\,\phi\,(u, v, w\ldots.)$$

La funcion ϕ es cierta funcion finita de u, $v\ldots\ldots$

De aquí se deduce

$$\frac{d^2y}{du\,dv}=$$

$$\lim \frac{f(u+du,v+dv,\mathrm{w}\ldots)-f(u+du,v,\mathrm{w}\ldots)-f(u,v+dv,\mathrm{w}\ldots)+f(u,v\ldots)}{du\,dv}$$

$$+\lim\,(du)^{\mathrm{k}}\,\frac{\phi\,(u,\,v+dv,\ldots)-\phi\,(u,\,v\ldots)}{dv}$$

Del mismo modo se obtendria:

$$\frac{d^2y}{dv\,du}=$$

$$\lim \frac{f(u+du,v+dv,\mathrm{w}\ldots)-f(u,v+dv,\mathrm{w}\ldots)-f(u+du,v,\mathrm{w}\ldots)+f(u,v\ldots)}{dv\,du}$$

$$+\lim\,(dv)^{\mathrm{h}}\,\frac{\psi(u+du,\,v\ldots)-\psi(u,\,v\ldots)}{du}$$

h′ es cierta cantidad positiva i ψ cierta funcion finita de u, v, w......

Se ve que los límites de los segundos miembros de estas fórmulas son iguales, pues los primeros términos son idénticos i los segundos tienen por límite cero; luego tenemos:

$$\frac{d^2y}{du\,dv}=\frac{d^2y}{dv\,du}$$

Se deduce inmediatamente que, en el caso jeneral, el órden en que se hacen las derivaciones sucesivas es indiferente. El teorema está pues demostrado.

Consideremos, la funcion de dos variables

$$y=f(u,v)$$

Se tiene

$$dy=\frac{dy}{du}\,du+\frac{dy}{dv}\,dv \tag{10}$$

dy la *diferencial total de* y.

Supongamos, como en el capítulo III (1.ª parte), que u i v

sean funciones de cierta variable x que elejimos como variable independiente; podemos tomar las diferenciales de los dos miembros de (10), se tendrá:

$$d^2y = d\left(\frac{dy}{du}\right)du + \frac{dy}{du}d^2u + d\left(\frac{dy}{dv}\right)dv + \frac{dy}{dv}d^2v$$

Pero:

$$d\left(\frac{dy}{du}\right) = \frac{d^2y}{du^2}du + \frac{d^2y}{du\,dv}dv$$

$$d\left(\frac{dy}{dv}\right) = \frac{d^2y}{dv\,du}du + \frac{d^2y}{dv^2}dv$$

Luego:

$$(11) \qquad d^2y = \frac{d^2y}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2y}{du\,dv}du\,dv + \frac{d^2y}{dv^2}dv^2 + \frac{dy}{du}d^2u + \frac{dy}{dv}d^2v$$

Esta fórmula queda exacta cualesquiera que sean las relaciones que espresan u i v en funcion de x.

Cuando estas relaciones no son dadas, se puede considerar u i v como variables enteramente independientes entre sí; se elejirá entónces las diferenciales du i dv de tal manera que $d^2u=0$, $d^2v=0$ i la fórmula (11) se reducirá a la siguiente:

$$(12) \qquad d^2y = \frac{d^2y}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2y}{du\,dv}du\,dv + \frac{d^2y}{dv^2}dv^2$$

Se formará de la misma manera d^3y i así en seguida; es fácil de ver que, si u i v son variables independientes, la espresion de $d^n y$ se puede poner bajo la forma figurada siguiente:

$$(13) \qquad d^n y = \left(\frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv\right)^n$$

Con la condicion que, en el segundo miembro de esta fórmula, se reemplaza un término del desarrollo como

$$A\left(\frac{du}{du}\right)^p \left(\frac{dy}{dv}\right)^q \text{ por } A\,\frac{d^{p+q}y}{du^p\,dv^q}$$

Vamos a demostrar que si la fórmula (13) es exacta, la espresion figurada de $d^{n+1}y$ tiene misma forma.

Consideremos un término del segundo miembro de (13), tal como

$$(14) \qquad A\,\frac{d^{p+q}y}{du^p\,dv^q}$$

o de una manera figurada

$$A\left(\frac{dy}{du}\right)^p\left(\frac{dy}{dv}\right)^q.$$

Cuando se busca $d^{n+1}y$ el término (14) da los dos términos siguientes:

$$A\,\frac{d^{p+q+1}y}{du^{p+1}\,dv^q}\,du + A\,\frac{d^{p+q+1}}{du^p\,dv^{q+1}}\,dv$$

O de una manera figurada:

$$A\left(\frac{dy}{du}\right)^p\left(\frac{dy}{dv}\right)^q\left(\frac{dy}{du}\,du+\frac{dy}{du}\,dv\right)$$

Así cada término del segundo miembro de (13) debe ser multiplicado figuradamente por el binomio $\frac{dy}{du}\,du+\frac{dy}{dv}\,dv$ para formar la espresion de $d^{n+1}y$; luego se puede escribir figuradamente tambien:

$$d^{n+1}y=\left(\frac{dy}{du}\,du+\frac{dy}{dv}\,dv\right)^{n+1}$$

Como la fórmula (13) es exacta para $n=1$, $n=2$ se ve que es jeneral.

CAPÍTULO II

DE LAS CURVAS OSCULATRICES

La interpretacion jeométrica que hemos dado de las derivadas de órden superior conduce naturalmente a la concepcion de las curvas osculatrices. Segun esta interpretacion, dos curvas que tienen $n+1$ puntos sucesivos e infinitamente próximos comunes, tendrán, en el primero de estos puntos, la misma ordenada i las n primeras derivadas de esta ordenada respecto a la abcisa iguales. En efecto, cuando se conoce un punto de la curva $y=f(x)$, i al mismo tiempo, n otros puntos infinitamente próximos del primero se pueden determinar las n primeras derivadas de $f(x)$; luego si estos $n+1$ puntos se encuentran igualmente sobre otra curva $y=\phi(x)$ las n primeras derivadas de $\phi(x)$ serán iguales a las de mismo órden de $f(x)$.

La recíproca es evidente: si dos curvas $y=f(x)$, $y=\phi(x)$ tienen, para un mismo valor de x, misma ordenada i las n primeras derivadas iguales, estas dos curvas tendrán $n+1$ puntos sucesivos e infinitamente próximos comunes.

Se dice que estas dos curvas son osculatrices i el punto comun considerado se llama punto de contacto. Es claro que el contacto de dos curvas será tanto mas íntimo cuanto mas puntos infinitamente próximos comunes tendrán. Por esto se considera el *órden* de un contacto i se dice que dos curvas que tienen un punto comun i n otros puntos infinitamente próximos del primero comunes tambien, tienen entre sí un contacto de órden n.

TEOREMA—*Si se considera un punto de una curva, se puede, por este punto, trazar una infinidad de curvas osculatrices a la primera i que tienen con ésa un contacto de órden n.*

En efecto, por n puntos de un plano, se puede hacer pasar una infinidad de curvas; basta para esto tomar la ecuacion jeneral de una familia de curvas en la cual figuran n constantes arbitrarias, i espresar que esta ecuacion es satisfecha cuando se sustituyen sucesivamente en ella, los coordenados de los puntos dados a los coordenados variables. Cada punto da entónces una relacion entre las constantes arbitrarias i, con los n puntos, se podrán formar n ecuaciones que permitiran determinar las n constantes.

Si las n ecuaciones son compatibles se podrá obtener uno o mas sistemas de soluciones; a cada sistema corresponderá entónces una curva de la familia considerada que pasara por los n puntos.

Desde luego se concibe que ciertas familias de curvas, a pesar de tener en su ecuacion jeneral n constantes arbitrarias, no podrán sin embargo satisfacer al problema; esto dependerá de la disposicion de los n puntos en el plano.

Se concibe tambien que si el número de constantes arbitrarias de la ecuacion jeneral de la familia de curvas consideradas, es superior a n, podrán existir una infinidad de curvas de la misma familia que pasen por los n puntos dados.

Así el problema de hacer pasar una curva por n puntos dados es esencialmente indeterminado.

Jeneralmente se elije, en cada caso particular, la curva mas usual o de ecuacion mas sencilla que satisface a la cuestion.

Por ejemplo, para trazar, en un punto de una curva, otra curva que tenga con la primera un contacto de primer órden, se busca cuál es la curva mas sencilla que pueda pasar por dos puntos infinitamente próximos dados i se elije la recta; ésta se llama entónces *tanjente*.

Si el contacto debe ser de segundo órden, se busca la curva de forma mas sencilla que pueda pasar por tres puntos dados i se elije el círculo; este se llama entónces *círculo osculador*.

Cuando el contacto debe ser de órden superior al segundo, de órden n por ejemplo, se elije tambien la curva de ecuacion mas sencilla que pueda pasar por $n+1$ puntos; esta curva pertenecerá a una familia de curvas que tendrá $n+1$ constantes arbitrarias por lo ménos en su ecuacion jeneral.

La ecuacion mas sencilla que contiene $n+1$ constantes arbitrarias es la siguiente:

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots\dots + C_n x^n$$

Llamaremos *parabólicas* las curvas que satisfacen a esta ecuacion.

APLICACIONES

Tanjente a una curva en un punto dado

Sea $Y = f(X)$ la ecuacion de la curva i x, y, las coordenadas de uno de sus puntos. La ecuacion jeneral de las rectas es:

$$Y = aX + b$$

Esta contiene dos constantes arbitrarias i para determinarlas se escribirá: 1.° que la recta pasa por el punto x, y; 2.° que, en este punto, la derivada de Y respecto a X es igual a $f'(x)$.

Aquí se tiene

$$\frac{dY}{dX} = a$$

Luego las dos ecuaciones de condicion son

$$y = ax + b$$

$$a = f'(x)$$

Segun esto, la ecuacion de la tanjente será

$$Y - y = f'(x)(X - x)$$

Círculo osculador.

Sea todavía $Y = f(X)$ la curva considerada i x, y uno de sus puntos.

La ecuacion jeneral de los círculos es

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 = R^2$$

Las tres constantes arbitrarias se determinaran por las tres condiciones siguientes: 1.° el círculo pasa por el punto x, y; 2.° la primera derivada de Y respecto a X será igual, en este punto, a $f'(x)$; 3.° la segunda derivada será igual a $f''(x)$.

De la ecuacion del círculo se deduce:

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{X-a}{Y-b}$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -\frac{R^2}{(Y-b)^3}$$

Luego las tres ecuaciones de condicion entre las constantes arbitrarias a, b, R son

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

$$-\frac{x-a}{x-b}=f'(x)$$

$$-\frac{R^2}{(y-b)^3}=f''(x)$$

De éstas se deduce

(15) $$R=\frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$

O bien

(16) $$R=\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Otra espresion de R.—La fórmula (16) supone que x es variable independiente; si esta variable no es independiente se deberá, reemplazar, en la fórmula (15), $f''(x)$ por el valor (4 bis) i se tendrá

(17) $$R=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}$$

Si se toma, por ejemplo. el arco s como variable independiente se obtendrá

$$\frac{1}{R}=\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}$$

O bien si se elevan los dos miembros al cuadrado

(18) $$\frac{1}{R^2}=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$
$$-2\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^2y}{ds^2}$$

Se tiene ahora

$$1=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

Luego

$$0=\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}$$

O bien, elevando al cuadrado

$$(19)\qquad 0=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 +2\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^2y}{ds^2}$$

Si ahora se suman, miembro a miembro, las ecuaciones (18) i (19) se obtiene

$$(20)\qquad \frac{1}{R^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

Ecuacion de la parabólica que pasa por $n+1$ puntos infinitamente próximos de una curva.

Sea a la abcisa del primero de los $n+1$ puntos considerados; pondremos la ecuacion de la parabólica bajo la forma siguiente:

$$(21)\qquad Y=A_0+A_1\,(X-a)+A_2\,(X-a)^2+\ldots.+A_n(X-a)^n$$

Sea

$$(22)\qquad Y=f(X)$$

la ecuacion de la curva dada. En el punto de abcisa a, la curva (21) debe tener $n+1$ puntos infinitamente próximos comunes con la curva (22); luego, cuando $x=a$, los valores de Y i los de las n primeras derivadas, deducidas respectivamente de las ecuaciones (21) i (22), deben ser iguales entre sí.

De la ecuacion (21) se deduce

$$\frac{dY}{dX}=A_1+2A_2(X-a)+\ldots\ldots+nA_n(X-a)^{n-1}$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2}=+2A_2+\ldots\ldots+n(n-1)A_n(X-a)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^nY}{dX^n}=n(n-1)(n-2)\ldots2.1.A_n$$

Por consiguiente, si se hace $X=a$, se deberá tener

$$f(a)=A_0$$
$$f'(a)=A_1$$
$$f''(a)=2A_2$$
$$\vdots$$
$$f^n(a)=1.2.\ldots..nA_n$$

Así la ecuacion de la parabólica será

$$(23)\qquad Y=f(a)+\frac{(X-a)}{1}f'(a)+\ldots\ldots+\frac{(X-a)^n}{1.2\ldots\ldots n}f^n(a)$$

CAPÍTULO III

DE LAS SERIES

Recordaremos en este capítulo, las reglas mas usuales de converjencia de las series.

Reglas de converjencia de las series.—Por comparacion de los términos de una serie con los de una progresion jeométrica se deduce que una serie es *converjente* cuando el límite de la razon entre un término i el anterior es menor que uno, *diverjente* cuando este límite es mayor que uno.

Supongamos ahora que la razon entre un término i el anterior tiende hácia uno; es evidente, en primer lugar, que si la razon queda siempre mayor que uno i tiende hácia uno, los términos crecen indefinidamente i la serie es diverjente. Cuando la razon queda siempre menor que uno i tiende hácia uno, se obtiene una regla de converjencia por la comparacion de la serie propuesta con la siguiente:

$$S = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots\dots\dots$$

Sea S_n^{2n} la suma de los n términos de esta serie, contados desde el de rango n hasta el de rango $2n$, se tiene

$$S_n^{2n} = \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \dots\dots\dots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha}$$

La serie S no puede ser converjente sino en caso que α sea positivo, pues si α fuera negativo, los términos de la serie irian creciendo indefinidamente con su rango.

Si α es positivo se tiene

$$\frac{n}{(2n)^\alpha} < S_n^{2n} < \frac{n}{n^\alpha}$$

En efecto, como los términos van disminuyendo, S_n^{2n} es menor que n veces el primer término i mayor que n veces el término $\frac{1}{(2n)^\alpha}$.

Del mismo modo se tiene

$$\frac{2n}{(4n)^\alpha} < S_{2n}^{4n} < \frac{2n}{(2n)^\alpha}$$

$$\frac{4n}{(8n)^\alpha} < S_{4n}^{8n} < \frac{4n}{(4n)^\alpha}$$

....

....

Sea S_n^∞ la suma total de los términos de la serie S contados desde el de rango n, se deduce de las relaciones precedentes

$$\frac{1}{2^a n^{a-1}}\left\{1+\frac{1}{2^{a-1}}+\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^3+\ldots\ldots\right\}$$
$$< S_n^\infty < \frac{1}{n^{a-1}}\left\{1+\frac{1}{2^{a-1}}+\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^2+\ldots\ldots\right\}$$

La progresion jeométrica que figura en esta relacion es converjente si a es mayor que uno e diverjente si a es menor que uno o igual a uno; por consiguiente tambien *la serie S será converjente si a es mayor que uno e diverjente si a es igual a uno o menor que uno.*

Cuando $a=1$ la serie S toma la forma sencilla

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

Es la *serie armónica;* segun la regla establecida esta serie es diverjente.

Regla de converjencia de una serie cualquiera

Sea la serie a términos positivos.

$$U=u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots$$

Se supondrá que el límite de la razon entre un término i el anterior tiende hácia uno, de tal manera que se puede escribir

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\phi(n)}{n}$$

La funcion $\phi(n)$ debe ser positiva para que los términos de la serie U vayan disminuyendo a medida que su rango aumenta i la razon $\frac{\phi(n)}{n}$ debe tender hácia cero para que el límite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tienda hácia uno.

1.º Supondremos, en primer lugar, que el límite de ϕ (n) es finito e igual a a, entónces se podrá escribir, para n mui grande,

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n}$$

En la serie S estudiada mas arriba, la razon entre los términos s_{n+1} i s_n de rango $n+1$ i n es

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^a$$

I se puede escribir tambien, cuando n es mui grande

$$\lim \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1 - \frac{a}{n}$$

Luego

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{s_{n+1}}{s_n}$$

De tal manera que si se desprecian cantidades infinitamente pequeñas respecto a las que se conservan se puede escribir

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{s_{n+1}}{s_n}$$

O bien

$$\frac{u_n}{s_n} = \frac{u_{n+1}}{s_{n+1}} = \frac{u_{n+2}}{s_{n+2}} = \ldots\ldots$$

Si se suman los numeradores i los denominadores se obtiene

$$\frac{u_n}{s_n} = \frac{U_n^\infty}{S_n^\infty}$$

O bien

$$U_n^\infty = S_n^\infty \frac{u_n}{s_n}$$

Esta ecuacion no es rigorosamente exacta, sin embargo el error debe ser considerado como infinitamente pequeño respecto a las cantidades que figuran en ella.

S_n^∞ es finito cuando α es mayor que uno e infinito cuando α es menor que uno o igual a uno, luego U_n^∞ será finito o infinito en los mismos casos, así *la serie U es converjente si el límite de ϕ (n) es mayor que uno i diverjente si este límite es igual a uno o menor que uno.*

2.° Si la funcion $\phi(n)$ crece indefinidamente la serie U es a fortiori converjente; en efecto, desde cierto rango n en que $\phi(n)$ tendrá cierto valor α mayor que uno los términos de U serán todos menores que los de la serie converjente en la cual $\phi(n)$ conservaria el valor α, luego la serie será a fortiori converjente.

En resúmen la serie U, en la cual el límite de la razon de los términos consecutivos tiende hácia uno, es converjente cuando

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 - \frac{1}{n}$$

i es diverjente cuando

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1 - \frac{1}{n}$$

En este último caso, se dice que la serie es *estrictamente diverjente.* Segun esto una serie estrictamente diverjente tiene una suma infinita aunque los términos disminuyen constantemente a medida que su rango aumenta.

Así la serie armónica es estrictamente diverjente.

Series con términos de signos alternados

Consideremos las dos series

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots$$
$$W = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots\ldots$$

En la serie U, se supone que todos los términos son positivos de tal manera que, en la serie W, los signos de los términos son alternados.

1.° *Si la serie U es converjente, la serie W lo es tambien.* En efecto, las sumas de los términos de rango par e impar de U tienen cada una un límite finito i su diferencia tiene que ser tambien finita.

2.° *Si la serie U es diverjente, la serie W se presenta bajo la forma de la indeterminacion.* En efecto, los términos crecen indefinidamente en valor absoluto i sus signos son alternados. Diremos que la serie W es *indeterminada.*

3.° *Si la serie U es estrictamente diverjente la serie W es converjente.* En efecto sea jeneralmente W_p la suma de los p primeros términos, se tendrá

$$W = W_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) + (u_{2n+3}) - u_{2n+4}) + \dots\dots$$

$$W = W_{2n+1} - \left\{ (u_{2n+2} - u_{2n+3}) + (u_{2n+4} - u_{2n+5}) + \dots\dots \right\}$$

Como los términos de U disminuyen a medida que van aumentando, las dos ecuaciones precedentes nos darán

$$W_{2n+1} > W > W_{2n}$$

Así la suma W es siempre comprendida entre W_{2n} i W_{2n+1}; la diferencia de estas sumas parciales es u_{2n+1}; luego vemos que el error cometido cuando se toma, para W, la suma de los p primeros términos es menor que u_{p+1}. Como en una serie estrictamente diverjente el término jeneral u_p va disminuyendo a medida que p aumenta se ve que W tendrá un límite finito; por consiguiente la série W es converjente.

Sin embargo, como la serie estrictamente diverjente U tiene una suma infinita, las sumas parciales de los términos positivos i de los términos negativos de W serán infinitas, se concibe así que no se puede cambiar el órden de sucesion de los términos de W i reunirlos, por ejemplo, en grupos de p términos positivos con q negativos. Por este motivo, se dice que la serie W, trasformada de una serie estrictamente diverjente, es *semi-converjente.*

CAPÍTULO IV

DESARROLLO DE TAYLOR

Sea una curva C, cuya ecuacion es $Y=f(X)$, hemos obtenido, en el capítulo I, la ecuacion de la parabólica que pasa por $n+1$ puntos infinitamente próximos de ella. Si n tiende hácia el infinito el contacto de la curva i de la parabólica es infinito; en otros términos, las dos curvas tienen, en el punto de contacto, una infinidad de puntos infinitamente próximos comunes. El conjunto de estos puntos representará cierto arco finito o infinito de la curva $Y=f(X)$ i este arco tendrá, sobre el eje OX, una proyeccion que podrá ser finita o infinita. La ordenada de la parabólica se espresará en funcion de X por medio de una serie de un número infinito de términos i, en todos los puntos del arco comun, las ordenadas de las curvas serán iguales; luego, para todos estos puntos, se tendrá

$$(1)\quad f(X)=f(a)+\frac{X-a}{1}f'(a)+\frac{(X-a)^2}{1.2}f''(a)+\dots\dots\dots$$
$$+\frac{(X-a)^n}{1.2\dots\dots n}f^n(a)+\dots\dots$$

Esta es la espresion analítica del teorema de Taylor.

La interpretacion jeométrica de este teorema nos dice solo que la fórmula (1) es exacta en la estension del arco de la curva C en que existe efectivamente la coincidencia de esta curva con la parabólica.

El análisis permite ahora definir exactamente los límites entre los cuales la fórmula de Taylor es exacta.

Consideremos una funcion $\phi(X, a)$ definida por la ecuacion siguiente

$$(2)\quad \phi(X,a)=f(a)+\frac{X-a}{1}f'(a)+\frac{(X-a)^2}{1.2}f''(a)+\dots\dots$$

Se tiene

$$(3)\quad \frac{d\phi}{da}=f'(a)-f'(a)+\frac{X-a}{1}f''(a)-\frac{X-a}{1}f''(a)+\dots\dots$$

Todos los términos del segundo miembro de (3) se destruyen idénticamente; sin embargo, como el número de estos términos es infinito es necesario, para que la suma total sea cero i no indeterminada, que el valor absoluto de los términos disminuye a medida que su rango aumenta.

Notaremos ahora que se tiene

$$(4) \qquad \frac{d\phi}{dX} = f'(a) + \frac{X-a}{1} f''(a) + \frac{(X-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots\ldots$$

La serie del segundo miembro es precisamente la misma que la de los términos pares o impares de la serie (3) por consiguiente la condicion, para que $\frac{d\phi}{da}$ sea idénticamente igual a cero, es que los términos de la serie (4) vayan disminuyendo a medida que su rango va aumentando.

Sean u_n i u_{n+1} los términos de rango n i $n+1$ de la série (2) se tiene

$$(5) \qquad \frac{u_{n+1}}{u^n} = \frac{X-a}{n} \frac{f^n(a)}{f^{n-1}(a)}$$

Sean tambien v_{n-1} i v_n los términos de rango $n-1$ i n de la serie (4) se tiene

$$(6) \qquad \frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{X-a}{n-1} \frac{f^n(a)}{f^{n-1}(a)}$$

Para que los términos de la serie (4) disminuyan es preciso que

$$\lim \frac{v_n}{v_{n-1}} < 1$$

O bien

$$\lim \frac{X-a}{n-1} \frac{f^n(a)}{f^{n-1}(a)} < 1$$

Llevando este valor en (5) llegamos a la siguiente relacion

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n-1}{n}$$

El método conocido para calcular esta integral consiste en buscar la integral indefinida

$$\int F(x)\,dx = \psi(x) + C$$

I entónces

$$\int_a^X F(x)\,dx = \psi(X) - \psi(a)$$

Estas fórmulas se han deducido de consideraciones jeométricas i se ha demostrado que $\psi(x)$ es el área comprendido entre el eje de las abcisas, la curva $y = F(x)$, una ordenada fija arbitraria i otra de abcisa x. Sin embargo, la demostracion supone que el incremento infinitamente pequeño del área, cuando x se convierte en $x + dx$, puede ser reemplazado por el área del rectángulo de base dx i de altura $F(x)$. Esta sustitucion es en efecto lejítima cuando la funcion $F(x)$ es continua i finita, pero no lo es cuando el valor considerado de x hace infinita la funcion $F(x)$. Se concibe fácilmente que, en este último caso, no se puede reemplazar el incremento del área por el rectángulo $F(x)\,dx$, pues la diferencia entre estas dos cantidades, léjos de ser infinitamente pequeña de órden superior a $F(x)\,dx$, puede ser infinitamente grande respecto a esta última cantidad.

Consideremos por ejemplo la integral definida

$$\int_{-1}^{-1} \frac{dx}{x^2}$$

su valor debe ser positivo puesto que la curva $y = \frac{1}{x^2}$ tiene todas sus ordenadas positivas; sin embargo el método usual da

$$\int_{-1}^{-1} \frac{dx}{x^2} = -2$$

El error es manifiesto. Se debe notar que, entre los límites -1 i $+1$, la ordenada pasa por el infinito de tal modo que el procedimiento jeneral no se puede aplicar. El valor exacto de la integral se podria obtener así, escribamos

$$\int_{-1}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim \int_{\epsilon}^{+1} \frac{dx}{x^2}$$

Cuando ϵ tiende hácia cero, el segundo miembro tiene por límite la integral buscada. Ahora se tiene

$$\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\epsilon} - 1$$

$$\int_{\epsilon}^{-1} \frac{dx}{x^2} = -1 + \frac{1}{\epsilon}$$

Luego

$$\int_{-1}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim \left[\frac{2}{\epsilon} - 2 \right] = \infty$$

En resúmen el método jeneral, para calcular las integrales definidas, es erróneo cuando, entre los límites de la integracion, la funcion que se integra pasa por el infinito.

Segun esto, los dos valores de R, deducidos de la integral (8), no son exactos cuando, entre los límites a i X, la funcion $f(z)$ o una cualquiera de sus derivadas es infinita.

De ahi se deduce inmediatamente cuales son los límites entre los cuales el desarrollo de Taylor representa la funcion.

Llamemos *abcisa crítica* una abcisa γ tal que la funcion $f(z)$ o una cualquiera de sus derivadas se hace infinita cuando $z=\gamma$; podemos decir que *el desarrollo de Talyor representa la funcion cuando, en el intervalo comprendido entre a i X, no existe ninguna abcisa crítica de la funcion.*

Esto demuestra al mismo tiempo que, *entre estos límites, la serie de Taylor es siempre converjente.*

ALBERTO OBRECHT

(Continuará)