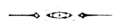


## CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL O ANÁLISIS TRASCENDENTAL



(Continuación)

### 13. Derivadas de las funciones implícitas.

Sea la ecuación

$$(1) \quad F(x, y) = C$$

en que  $C$  es una constante.

Se dice que  $y$  es *función implícita* de  $x$  i se trata de calcular  $\frac{dy}{dx}$  sin resolver la ecuación en  $y$ .

Si, de la ecuación (1), se despejara  $y$  en función de  $x$ , se obtendría una relación como

$$(2) \quad y = f(x)$$

Para que este valor de  $y$  satisfaga a (1) es preciso que esta última ecuación se verifique idénticamente cuando se reemplaza en ella  $y$  por  $f(x)$ , es decir que la expresión  $F[x, f(x)]$  debe ser idénticamente igual a  $C$ ; por consiguiente todos los términos que contienen  $x$  se deben destruir unos con los otros. Luego la derivada de esta función respecto a  $x$  debe ser igual a cero,

La funcion  $F(x, f)$  es una funcion compuesta, su derivada respecto a  $x$  tiene por expresion

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{df} \frac{df}{dx}$$

Así esta expresion debe ser cero. Reemplazemos, en ella,  $f$  por su valor  $y$ , tendremos

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx} = 0$$

O bien

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

El mismo resultado se obtiene de la manera siguiente:  
Sea

$$z = F(x, y)$$

una funcion compuesta en que se considera  $y$  como funcion de  $x$ , se sabe que la diferencial de  $z$  tiene por expresion

$$dz = \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy$$

Si  $z$  debe ser igual a una constante  $C$  su diferencial debe ser nula, luego  $dx, dy$  deberán satisfacer a la ecuacion:

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy = 0$$

De aquí se despeja el mismo valor de  $\frac{dy}{dx}$  que hemos encontrado mas arriba.

**Regla.**—*Para obtener la derivada de una funcion implicita como  $F(x, y) = C$  se escribe que la diferencial del primer miembro, considerado como una funcion compuesta, es igual a cero.*

**Aplicacion.**—Se da la ecuacion

$$x^2 + y^2 = r^2$$

i se pide el valor de  $\frac{dy}{dx}$ . Segun la regla indicada, se tendrá

$$2x dx + 2y dy = 0$$

O bien

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Con las reglas anteriormente espuestas se puede obtener la derivada de una funcion cualquiera: Como la derivada representa, en jeometría, el coeficiente angular de la tanjente a una curva, se ve que este primer estudio nos permite ya trazar la tanjente a una curva, cualquiera que sea su ecuacion.

## CAPÍTULO IV

### DE LAS INTEGRALES

14. Si una funcion  $F(x)$  tiene por diferencial  $f(x)dx$ , se dice que  $F(x)$  es la *integral* de  $f(x) dx$ . Se ve que el cálculo de las integrales es el inverso del cálculo de las diferenciales.

Desde luego se puede demostrar que si  $F(x)$  es una integral de  $f(x) dx$ , todas las integrales de  $f(x) dx$  tendrán por expresion  $F(x) + C$  en que  $C$  es una constante.

En efecto sean  $F_1(x)$  i  $F_2(x)$  dos integrales distintas de  $f(x) dx$ , estas dos funciones tendrán la misma derivada  $f(x)$  luego la funcion  $F_1(x) - F_2(x)$  tendrá siempre por derivada cero. Pero, se ha demostrado que una funcion que tiene una derivada siempre nula es constante, luego

$$F_1(x) - F_2(x) = C$$

O bien

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

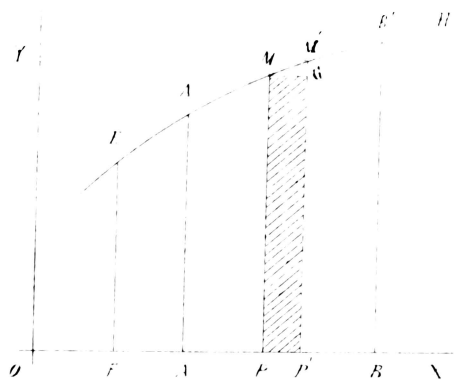
Recíprocamente, es evidente que las dos funciones  $F(x)$  i  $F(x) + C$  tienen la misma diferencial, cualquiera que sea la constante  $C$ .

Así se puede siempre añadir una constante arbitraria a la integral  $F(x)$ .

### Representacion jeométrica de la integral.

Consideremos una curva plana referida a dos ejes rectangulares  $OX$ ,  $OY$  i sea  $y=f(x)$  su ecuacion.

Sea  $EH$  esta curva,  $EF$  una ordenada fija i  $MP$  una ordenada móvil de abscisa  $x$ ; el área comprendido entre la curva, el eje  $OX$  i las dos ordenadas  $EF$ ,  $MP$  será cierta función de  $x$ , representámosla por  $F(x)$  i busquemos su diferencial. Para esto, incrementemos la variable  $x$  de cierta cantidad  $PP' = dx$ , el incremento de la función es representado por el trapezio infinitamente pequeño  $MM'P'P$ ; la derivada de  $F(x)$  será el límite de la razón entre  $MM'P'P$  i  $dx$ ; sabemos que en la determinación



de este límite se pueden despreciar los infinitamente pequeños de orden superior a  $dx$ , por consiguiente podemos reemplazar el trapezio  $MM'P'P$  por el rectángulo  $MC'P'P$ , pues la diferencia entre los dos es representada por el triángulo  $MC'M'$ ; este último tiene un área del mismo orden de pequeñez que el rectán-

gulo de base  $MC$  i de altura  $M'C$ :  $MC$  es igual a  $dx$  i  $M'C$  es infinitamente pequeño, luego el producto  $MC \times M'C$  se puede despreciar; la derivada de  $F(x)$  será, pues, el límite de  $\frac{MM'P'P}{dx}$  o bien de  $\frac{f(x) dx}{dx}$  o  $f(x)$ .

Así la función  $F(x)$  que representa el área  $EFMP$  tiene por derivada  $f(x)$  i por consiguiente por diferencial  $f(x) dx$ , esta función  $F(x)$  es, pues, la integral de  $f(x) dx$ .

Se ve que, cual quiera que sea la posición de la ordenada fija  $EF$ , se obtendrá siempre la misma diferencial  $f(x) dx$  para el área contada hasta la ordenada  $MP$ ; ahora si el área contada desde  $EF$  hasta  $MP$  tiene por expresión  $F(x)$  el área contada desde otra ordenada origen tendrá una expresión como  $F(x) + C$ ; es decir que se puede añadir a la integral de  $f(x) dx$  una constante arbitraria, resultado conforme a lo que se ha obtenido mas arriba.

Notaremos ahora que el área  $EFMP$  es el límite de la suma de un número infinitamente grande de trapezios infinitamente pequeños análogos al trapezio  $MM'PP'$  i comprendidos entre  $EF$  i  $MP$ . Cada uno de estos trapezios se podrá reemplazar por un rectángulo análogo a  $MC'PP'$ , pues esta sustitucion equivale a despreciar infinitamente pequeños de orden superior i se sabe que el límite de la suma no cambia por esto; así la integral  $F(x)$  representa la suma de un número infinitamente grande de rectángulos infinitamente pequeños de base  $dx$  i de altura igual a los ordenadas sucesivas de la curva. Por este motivo se dice a veces *suma* de  $f(x) dx$  en vez de *integral* de  $f(x) dx$  i el signo que espresa la integral de  $f(x) dx$  es una  $S$  algo deformada (inicial de la palabra suma). Así para espresar que  $F(x)$  es la integral de  $f(x) dx$  se escribe:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

I, para poner en evidencia la constante arbitraria que se puede añadir a la integral, se escribe tambien:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

La interpretacion jeométrica de la integral demuestra que esta existe siempre porque cuando se da una curva  $y=f(x)$ , el area comprendida entre esta curva, el eje  $OX$  i dos ordenadas tales como  $AF$ ,  $MP$  es perfectamente determinada.

#### INTEGRALES DEFINIDAS E INDEFINIDAS

15. Cuando, como en el caso anterior, se considera el área comprendida entre la curva  $y=f(x)$ , el eje  $OX$ , una ordenada fija arbitraria i una ordenada móvil de abscisa  $x$ , se encuentra, para este área, una cierta funcion  $F(x)$ ; esta funcion, como hemos visto, es la integral de  $f(x) dx$  i se escribe:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$F(x)$  es lo que se llama la *integral indefinida* de  $f(x) dx$ .

Supongamos que se trate ahora de determinar el área comprendido entre la misma curva, el eje  $OX$  i las dos ordenadas  $AA'$ ,  $BB'$  de abscisas  $a$  i  $b$  se dira: como el área contada desde  $EF$  hasta la ordenada  $MP$  tiene por espresion:  $F(x) + C$  se tiene tambien

$$\text{área } EFBB' = F(b) + C$$

$$\text{área } EFAA' = F(a) + C$$

I restando estas dos ecuaciones

$$\text{área } A'ABB' = F(b) - F(a)$$

La constante arbitraria  $C$  ha desaparecido como debia suceder, pues el área  $A'ABB'$  no puede tener sino un solo valor, se escribe entónces

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Las dos letras  $b$  i  $a$  que se ponen arriba i abajo del signo suma representan los límites entre los cuales varia  $x$  i se llaman *límites de la integral*;  $b$  es el *límite superior* i  $a$  el *límite inferior*.

La integral  $\int_a^b f(x) dx$  se llama *integral definida* porque  $x$  varia entre dos límites definidos.

Las dos clases de integrales definidas e indefinidas se llaman a veces *cuadraturas* para recordar su interpretacion jeométrica.

La fórmula (3) nos muestra inmediatamente que la *integral definida cambia de signo cuando se invierten los límites*; en efecto

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = - \int_a^b f(x) dx$$

En resumen, para calcular una integral definida, habrá que determinar primero la integral indefinida. Cuando esta última no se puede obtener, se puede, a veces, calcular la integral defi-

nida, sea por medio de artificios que no obedecen a ninguna regla, sea por medio del método de Cauchy que será indicado mas tarde.

**16.** Las integrales indefinidas, a pesar de que su existencia ha sido bien demostrada, no por esto se pueden siempre obtener; la razon de esta dificultad es que las funciones que se emplean en matemáticas son en número mui reducido, de manera que varias integrales son funciones que no conocemos.

Por esto, los métodos de integracion que vamos a esponer ahora son mas bien una indicacion de la manera como se deben dirijir las investigaciones, pues en mui pocos casos se pueden obtener las integrales.

**1.<sup>er</sup> método de integracion.**—Es el método que consiste a examinar si la funcion que se trata de integrar es la diferencial de una funcion ya conocida. La aplicacion de este método requiere solamente, como se ve, un poco de memoria i alguna práctica. Así se tiene luego

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{x} = Lx$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x$$

## 2.º Método por sustitucion.

Sea la integral

$$\int \sin x^m \cos x \, dx$$

A la variable  $x$  se sustituye otra variable  $y$  de tal manera que

$$\sin x = z$$

Entónces

$$\cos x \, dx = dz$$

$$\int \sin^m x \cos x \, dx = \int z^m \, dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$$

Se ve que la sustitucion de la variable  $z$  a la variable  $x$  ha trasformado la primera integral en otra que se sabe integrar una vez obtenida esta última integral se reemplaza en su espresion la variable  $z$  por su valor en funcion de  $x$ .

Sea, por ejemplo:

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Pongamos

$$1+x^2 = z$$

Se tendrá

$$2x \, dx = dz$$

Luego

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \sqrt{z} = \sqrt{1+x^2}$$

Otro ejemplo. Sea

$$I = \int \operatorname{tg} x \, dx$$

Se puede escribir

$$I = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x}$$

Pongamos

$$\cos x = z$$

Se tendrá

$$-\sin x \, dx = dz$$

$$I = - \int \frac{dz}{z} = -Lz = L \frac{1}{z} = L \frac{1}{\cos x}$$

La aplicacion de este método en los ejemplos anteriores es bien indicada por la forma misma de las funciones que se trataba de integrar. En los casos mas numerosos no sucede lo mismo i generalmente es una suerte cuando una sustitucion conduce así a la integracion; sin embargo cuando una integral no se puede obtener desde luego se debe siempre tratar de hacer una sustitucion de variable; cuando el método no conduce al resultado se aplica el siguiente:

**17. Método de integracion por partes.**—Es uno de los métodos que da relativamente mas integrales; su principio se deduce de la fórmula que da la diferencial de un producto de dos factores:

$$d(uv) = u \, dv + v \, du$$

O bien

$$u \, dv = d(uv) - v \, du$$

Si se toman las integrales de los dos miembros, se obtiene

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

1.º Ejemplo: Sea la integral:  $\int x \, Lx \, dx$ .

Haremos

$$\left\{ \begin{array}{l} u = Lx \\ dv = x \, dx \end{array} \right. \quad \text{luego} \quad \left\{ \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right.$$

I aplicando la regla indicada, tendremos

$$\int x \, Lx \, dx = \frac{x^2}{2} Lx - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} Lx - \frac{x^2}{4}$$

2.º Ejemplo: Sea la integral:

$$I_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

El índice  $m$  de  $I$  es el esponente de  $x$  en la integral.  
Hagamos

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x^{m-1} \\ dv = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right. \quad \text{luego} \quad \left\{ \begin{array}{l} du = (m-1) x^{m-2} dx \\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$$

Tendremos

$$I_m = -x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + (m-1) \int x^{m-2} \sqrt{1-x^2} dx$$

Pero

$$\int x^{m-2} \sqrt{1-x^2} dx = \int \frac{x^{m-2}}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx = I_{m-2} - I_m$$

Luego

$$I_m = -x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m$$

O bien

$$m I_m = (m-1) I_{m-2} - x^{m-1} \sqrt{1-x^2}$$

Esta fórmula da  $I_m$  en funcion de  $I_{m-2}$ ; del mismo modo se podrá calcular  $I_{m-2}$  en funcion de  $I_{m-4}$  i así en seguida; llegaremos finalmente a  $I_1$  si  $m$  es impar o a  $I_0$  si  $m$  es par.

Se tiene ahora

$$I_1 = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x$$

Por consiguiente se podrá siempre calcular  $I^m$ .

No hai mas métodos jenerales para integrar; sin embargo, hai varias clases de funciones que siempre se pueden integrar segun reglas bien determinadas, la esposicion de estas reglas de integracion hará la materia del próximo capítulo.

## CAPÍTULO V

### DE LAS FUNCIONES QUE SE PUEDEN SIEMPRE INTEGRAR

#### *Integracion de los polinomios algebráicos enteros*

18. Sea la integral

$$\int f(x) dx$$

en que se tiene

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + E$$

La integral buscada será la suma de las siguientes

$$A \int x^m dx + B \int x^{m-1} dx + \dots + E \int dx$$

Se ve que la integracion se podrá siempre efectuar i se tendrá

$$\int f(x) dx = A \frac{x^{m+1}}{m+1} + B \frac{x^m}{m} + \dots + Ex + C$$

#### *Integracion de las fracciones racionales*

19. Sea la integral

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx$$

Si  $F(x)$  i  $f(x)$  son dos polinomios algebráicos enteros se dice que  $\frac{F(x)}{f(x)}$  es una fraccion racional.

Supondremos, en primer lugar, que  $F(x)$  sea de grado superior a  $f(x)$ ; se efectuará entónces la division de  $F(x)$  por  $f(x)$  hasta obtener una resta  $\phi(x)$  de grado inferior a  $f(x)$ , i se escribirá

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \psi(x) + \frac{\phi(x)}{f(x)}$$

La funcion  $\psi(x)$  es entónces un polinomio entero, i se admitirá que la fraccion  $\frac{\phi(x)}{f(x)}$  es *irreductible*.

Se tendrá entónces

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx = \int \psi(x) dx + \int \frac{\phi(x)}{f(x)} dx.$$

En el segundo miembro,  $\psi(x)$  es un polinomio algebráico entero, luego se puede efectuar la primera integral. La segunda tambien se puede efectuar si se descompone la fraccion  $\frac{\phi(x)}{f(x)}$  en fracciones simples.

Indicaremos aquí como se hace esta descomposicion.

*Descomposicion de las fracciones racionales en fracciones simples*

20. Por hipótesis, se supone que la fraccion  $\frac{\phi(x)}{f(x)}$  es *irreductible*; sea  $m$  el grado de la ecuacion  $f(x)=0$  i  $a$  una raiz de orden  $n$  de multiplicidad, de manera que

$$f(x) = (x-a)^n f_n(x)$$

Se tiene idénticamente, cualquiera que sea la constante  $A_n$ :

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{\phi(x) - A_n f_n(x)}{(x-a)^n f_n(x)}$$

Si se elije  $A_n$  de tal manera que  $\phi(x) - A_n f_n(x)$  contenga  $x-a$  en factor se podrá suprimir el factor comun  $x-a$  en los dos términos de la última fraccion i se tendrá

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{\phi_1(x)}{f_1(x)}$$

Con las relaciones

$$\phi(x) - A_n f_n(x) = (x-a) \phi_1(x)$$

$$(x-a)^{n-1} f_n(x) = f_1(x)$$

Se ve que  $\phi_1(x)$  será de grado inferior a  $f_1(x)$  i que  $f_1(x)$  contiene  $x-a$  a la potencia  $n-1$  solamente; en jeneral la fraccion  $\frac{\phi_1(x)}{f_1(x)}$  será irreducible, sin embargo podria suceder que sus dos términos tengan un factor comun; en este caso el factor comun tiene que ser una potencia de  $x-a$  como se puede averiguar fácilmente. En todo caso  $f_1(x)$  contendrá  $x-a$  a la potencia  $n-1$  a lo mas, de manera que se podrá escribir tambien

$$\frac{\phi_1(x)}{f_1(x)} = \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \frac{\phi_2(x)}{f_2(x)}$$

$f_2(x)$  contendrá  $x-a$  a la potencia  $n-2$  a lo mas; si se sigue de la misma manera se llegará finalmente a una relacion de la forma

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{\phi_n(x)}{f_n(x)}$$

La última fraccion será irreducible, su denominador no contendrá mas el factor  $x-a$  i el grado de  $\phi_n(x)$  será inferior al de  $f_n(x)$ . La primera constante  $A_n$  no puede ser nunca cero ni infinito porque su valor es dado por la ecuacion

$$A_n = \frac{\phi(a)}{f_n(a)}$$

en que los dos términos son diferentes de cero; mientras tanto, los otros coeficientes  $A_{n-1}, \dots, A_1$  o varios de ellos podrán ser nulos.

La descomposicion podrá seguir de la misma manera, quitando sucesivamente a  $f(x)$  todas sus raíces. Como  $\phi_n(x)$  es siempre de grado inferior a  $f_n(x)$  se ve que finalmente se llegará a una última fraccion de la misma forma que las anteriores.

Es fácil ahora de ver que la descomposicion, cualquiera que sea el procedimiento que se adopte para hacerla, dará siempre las mismas fracciones simples; en efecto, supongamos que se tenga a la vez

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{\phi_n(x)}{f_n(x)}$$

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A'_n}{(x-a)^{n'}} + \frac{A'_{n'-1}}{(x-a)^{n'-1}} + \dots + \frac{A'_1}{x-a} + \frac{\phi'_n(x)}{f'_n(x)}$$

Supongamos  $n' > n$ ; los segundos miembros deben ser idénticos; si se multiplican por  $(x-a)^n$  i si en el resultado de la multiplicacion se hace  $x=a$  se obtendrá

$$A'_n = 0$$

Del mismo modo se verá que todos los numeradores de las fracciones en que el exponente de  $x-a$  es superior a  $n$  deben ser cero, luego tendremos  $n'=n$ , se debe tener ahora

$$\begin{aligned} A_n + A_{n-1}(x-a) + \dots + A_1(x-a)^{n-1} + \frac{\phi_n(x)}{f_n(x)}(x-a)^n &= \\ = A'_n + A'_{n-1}(x-a) + \dots + A'_1(x-a)^{n-1} + \frac{\phi'_n(x)}{f'_n(x)}(x-a)^n \end{aligned}$$

Haciendo en esta relacion  $x=a$  se obtiene  $A = A'$ ; dividiendo entónces los dos miembros por  $x-a$  i haciendo de nuevo  $x=a$  se obtiene  $A'_{n-1} = A_{n-1}$ , i así en seguida.

**Caso de las raíces imaginarias.**—Sea  $\alpha + \beta \sqrt{-1}$  una raíz de orden  $p$  de multiplicidad; a esta raíz corresponderá otra  $\alpha - \beta \sqrt{-1}$  del mismo orden de multiplicidad, de manera que se podrá escribir

$$f(x) = [(x - \alpha^2) + \beta^2]^p f_p(x)$$

Se tiene, entónces, la identidad

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{Mx + N}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^p} + \frac{\phi(x) - (Mx + N)f_p(x)}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^p f_p(x)}$$

Se determinan  $M$  i  $N$  de tal manera que el numerador de la última fraccion sea divisible por  $(x - \alpha)^2 + \beta^2$ ; bastará para esto, reemplazar  $x$  por  $\alpha + \beta \sqrt{-1}$  e igualar a cero la parte real i el coeficiente de  $\sqrt{-1}$  en el resultado de la sustitucion.  $M$  i  $N$  serán perfectamente determinados.

La última fraccion se podrá entónces simplificar i en seguida descomponer de la misma manera que  $\frac{\phi(x)}{f(x)}$ . Se ve que el procedimiento es el mismo que en el caso de las raíces reales i se obtendrá una serie de fracciones en que los denominadores serán potencias de  $[(x - \alpha^2) + \beta^2]$  i los numeradores polinomios del primer grado.

ALBERTO OBRECHT

Director del Observatorio Astronómico  
Profesor de las clases de mecánica i cálculo diferencial  
e integral de la Universidad

(Continuará)

