# CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

## O ANÁLISIS TRASCENDENTAL

### INTRODUCCION

Augusto Comte, en su luminosa esposicion de la filosofía de las ciencias, espone que uno de los fines principales de las Matemáticas es de someter los diferentes fenómenos naturales a las leyes invariables del cálculo. La primera i mayor dificultad que se encuentra para esto es de formar ecuaciones entre los diferentes elementos que intervienen en la produccion de estos fenómenos; en efecto, las funciones que se emplean en matemáticas se limitan a las aljebráicas, esponenciales, logarítmicas i trigonométricas (1). Como estas funciones tienen su oríjen en el estudio de unos pocos fenómenos naturales de los mas sencillos, se concibe la dificultad o mas bien la imposibilidad de poder espresar desde luego las leyes matemáticas de un fenómeno dado con el pequeño número de funciones conocidas.

El cálculo infinitesimal ha venido a aplanar esta dificultad; su objetivo, segun esto, es de facilitar la *mise en équation* de los diferentes fenómenos naturales.

---

(1) Se podria añadir las funciones elípticas aunque su uso es todavía mui restrinjido.

La filosofía de este descubrimiento estraordinario de Leibnitz i Newton es mui claramente espuesta en la obra de Augusto Comte: «Como no se pueden obtener directamente ecuaciones entre las cantidades que intervienen en un fenómeno dado, se buscan relaciones correspondientes entre otras cantidades auxiliares ligadas a las primeras segun cierta lei determinada; estas cantidades auxiliares son los elementos infinitamente pequeños de las primeras: sus *diferenciales*, segun la espresion de Leibnitz. Una vez obtenidas las relaciones entre las diferenciales o los elementos infinitamente pequeños de las cantidades consideradas se deducen las ecuaciones que ligan estas cantidades mismas por medio de reglas fijas que constituyen el cálculo integral».

# PRIMERA PARTE

DERIVADA, DIFERENCIALES E INTEGRALES DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE.
APLICACIONES JEOMÉTRICAS

## CAPÍTULO PRIMERO

### DE LOS INFINITAMENTE PEQUEÑOS

**1. Se llama** *infinitamente pequeño* **una cantidad** *variable* **que tiende hacia cero sin llegar nunca a su límite.**

Esta concepcion de cantidades infinitamente pequeñas no es nueva, pues los antiguos jeómetros consideraban ya las curvas como límites de polígonos de un número infinitamente grande de lados infinitamente pequeños; sin embargo a Leibnitz se debe la concepcion del modo como se deben emplear estas cantidades en los cálculos.

Para esplicar a sus contemporáneos lo que era una cantidad infinitamente pequeña, Leibnitz decia que, entre un infinitamente pequeño i otra cantidad finita existia la misma proporcion que entre un grano de arena i el volúmen de las aguas del mar. Esta era una definicion errónea porque un infinitamente pequeño es una cantidad esencialmente variable que tiende hácia cero; su magnitud, a un momento dado, puede ser la que le asigna la comparacion de Leibnitz pero puede ser tambien, a otro momento, mas pequeña todavía. Ahora, para emplear estas cantidades en los cálculos, es natural que se añada a su definicion que no lleguen nunca a ser cero, porque con la nada no se puede lójicamente calcular.

## 2. Clasificacion de los infinitamente pequeños.

Cuando, en una relacion, se consideran varios infinitamente pequeños se elije uno cualquiera de ellos como *infinitamente pequeño principal.*

Se llama entónces: 1.° *infinitamente pequeño de primer órden* todo infinitamente pequeño tal que la razon entre éste i el infinitamente pequeño principal tienda hácia un límite finito; 2.° *infinitamente pequeño de órden n* todo infinitamente pequeño tal que la razon entre éste i la potencia $n$ del infinitamente principal tienda hácia un límite finito.

Así, sea $\epsilon$ un ángulo infinitamente pequeño que se considera como infinitamente pequeño principal en una relacion dada: *sen* $\epsilon$ será infinitamente pequeño de primer órden, porque la razon

$$\frac{sen\ \epsilon}{\epsilon}$$

tiende hácia uno cuando $\epsilon$ tiende hácia cero; tambien $1-\cos\epsilon$ será un infinitamente pequeño de segundo órden porque

$$\frac{1-cos\ \epsilon}{\epsilon^2}$$

tiende hácia $\frac{1}{2}$ cuando $\epsilon$ tiende hácia cero; del mismo modo $\epsilon-\text{sen}\ \epsilon$ será de tercer órden porque

$$\frac{\epsilon-sen\ \epsilon}{\epsilon^3}$$

tiende hácia $\frac{1}{6}$ cuando $\epsilon$ tiende hácia cero i así en seguida.

Un arco de curva i su cuerda son infinitamente pequeños del mismo órden, porque la razon entre los dos tiende hácia uno cuando el arco es infinitamente pequeño.

En resúmen si $\alpha$ es infinitamente principal en una relacion i $\beta$ otro infinitamente pequeño se dice que $\beta$ es de primer órden cuando $\frac{\beta}{\alpha}$ tiende hácia un límite finito; de segundo órden cuando $\frac{\beta}{\alpha^2}$ tiende hácia un límite finito; de órden $n$ cuando $\frac{\beta}{\alpha^n}$ tiende hácia un límite finito.

De ahí se deduce que si $\gamma$ es un infinitamente pequeño de órden $p$ i $\delta$ otro infinitamente de órden $q$ el producto $\gamma\,\delta$ será infinitamente pequeño de órden $p+q$; en efecto sea $\alpha$ el infinitamente pequeño principal, las dos espresiones $\frac{\gamma}{\alpha^p}$, $\frac{\delta}{\alpha^q}$ tienden hácia un límite finito, su producto $\frac{\gamma\,\delta}{\alpha^{p+q}}$ tendrá tambien hácia cierto límiie finito, luego $\gamma\,\delta$ es de órden $p+q$.

**3. Primer teorema.**

*El límite hácia el cual tiende la razon de dos infinitamente pequeños no cambia cuando se reemplazan estos infinitamente pequeños por otros que no difieren de los primeros sino de cantidades infinitamente pequeñas de órden superior.*

Sean $\alpha$, $\beta$, dos infinitamente pequeños, i $\alpha'$, $\beta'$ otros dos ligados a los primeros por las relaciones

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1 \\ &\lim \frac{\beta'}{\beta} = 1 \end{aligned}\right.$$

Se tendrá

$$(2)\qquad \lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$$

En efecto se tiene idénticamente

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \times \frac{\beta'}{\beta} \times \frac{\alpha}{\alpha'}$$

Esta última relacion es rigurosamente exacta cualquiera que sea el órden de pequeñez de las cantidades que figuran en ella; por consiguiente el límite del primer miembro será igual al límite del segundo; este último tiene el mismo límite que su primer factor, pues los dos últimos factores tienden hácia uno segun la hipótesis (1), luego la ecuacion (2) está demostrada.

Ahora si se tiene

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1$$

Se puede escribir

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \epsilon$$

La cantidad $\epsilon$ siendo infinitamente pequeña. Luego

$$\alpha' = \alpha + \alpha\,\epsilon$$

El producto de los dos infinitamente pequeños $\alpha$ i $\epsilon$ es de órden superior al órden de $\alpha$; luego $\alpha'$ difiere de $\alpha$ de una cantidad infinitamente pequeña de órden superior a $\alpha$; del mismo modo se veria que $\beta'$ difiere de $\beta$ de una cantidad infinitamente pequeña de órden superior a $\beta$ i como se tiene

$$\lim. \frac{\alpha}{\beta} = \lim. \frac{\alpha'}{\beta'}$$

se ve que el teorema está demostrado.

Este teorema sirve de base a todo el cálculo diferencial; en efecto todas las relaciones que se escriben entre cantidades infinitamente pequeñas tienen siempre por objetivo final la determinacion del límite hácia el cual tiende la razon de algunos infinitamente pequeños a otros de mismo órden, por consiguiente en todas estas relaciones entre infinitamente pequeños se podrán suprimir de antemano los de órden superior. Segun el teorema anterior vemos, en efeeto, que esta supresion equivale a reemplazar los infinitamente pequeños de la relacion por otros que no difieren de los primeros sino de cantidades infinitamente pequeñas de órden superior i sabemos que el límite de una razon entre infinitamente pequeños no se altera por esto.

Así, si en una relacion figura un ángulo infinitamente pequeño $\epsilon$ i sus líneas trigonométricas se podrán reemplazar sen $\epsilon$

por $\epsilon$, $\cos\epsilon$ por 1, porque $\sin\epsilon - \epsilon$ es de tercer órden i $1 - \cos\epsilon$ de segundo órden respecto a $\epsilon$. Haciendo estos cambios el límite final que trata de determinar la relacion considerada no sufre ningun cambio.

## 4. Segundo teorema.

*El límite hácia el cual tiende la suma de un número infinitamente grande de infinitamente pequeños no cambia cuando se reemplazan los infinitamente pequeños por otros que no difieren de los primeros sino de cantidades infinitamente pequeñas de órden superior.*

Consideremos la suma

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n$$

El segundo miembro es la suma de $n$ cantidades infinitamente pequeñas, que supondremos, en primer lugar, todas positivas; se admite que esta suma tiende hácia un límite *finito* cuando $n$ aumenta indefinidamente al mismo tiempo que cada infinitamente pequeño tiende hácia cero. (Se puede comparar $A$ al perímetro de un polígono regular inscrito en una circunferencia i $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ a los lados del polígono; en este último caso $A$ tiene por límite la circunferencia del círculo circunscrito al polígono).

Consideremos ahora otra suma de infinitamente pequeños

$$B = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots\ldots + \beta_n$$

Si estos infinitamente pequeños no difieren de los primeros sino de cantidades infinitamente pequeñas de órden superior se podrá escribir

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 + \alpha_1\,\epsilon_1\\
\beta_2 &= \alpha_2 + \alpha_2\,\epsilon_2\\
\beta_3 &= \alpha_3 + \alpha_3\,\epsilon_3\\
&\;\vdots\\
\beta_n &= \alpha_n + \alpha_n\,\epsilon_n
\end{aligned}$$

Las cantidades $\epsilon_1\ \epsilon_2 \ldots\ldots \epsilon_n$ serán infinitamente pequeñas. Sumamos estas últimas ecuaciones, tendremos

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots\ldots+\beta_n=(\alpha_2+\alpha_2+\alpha_3+\ldots.+\alpha_n)+$$
$$+(\alpha_1\ \epsilon_1+\alpha_2\ \epsilon_2+\alpha_3\ \epsilon_3+\ldots\ldots+\alpha_n\ \epsilon_n)$$

El primer miembro es $B$, el primer término del segundo es $A$. Luego se puede escribir tambien

$$B=A+(\alpha_1\ \epsilon_1+\alpha_2\ \epsilon_2+\alpha_3\epsilon_3+\ldots\ldots+\alpha_n\ \epsilon_n)$$

Esta ecuacion es rigurosa, luego los límites de los dos miembros son iguales, es decir que

$$\lim\ B=\lim\ A+\lim\ (\alpha_1\ \epsilon_1+\alpha_2\ \epsilon_2+\ldots\ldots+\alpha_n\ \epsilon_n)$$

Para calcular el límite de este último término, notaremos que $\epsilon_1,\ \epsilon_2 \ldots\ldots \epsilon_3$ son infinitamente pequeños, sea $\eta$ el mayor de ellos en valor absoluto (el límite hácia el cual tiende $\eta$ es cero); la espresion entre paréntesis es inferior a la que se obtiene cuando se reemplazan $\epsilon_1,\ \epsilon_2 \ldots\ldots \epsilon_n$ por $\eta$, es decir inferior a

$$\eta\ (\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_n)=\eta A$$

Como $A$ tiende hácia un límite finito i $\eta$ hácia cero se ve que el término considerado tiende hácia cero.

Luego

$$\lim.\ B=\lim.\ A$$

Si ahora se supone que todos los infinitamente pequeños de la suma $A$ son negativos la demostracion queda la misma i conduce al mismo resultado.

En jeneral si la suma $A$ se compone de varias series de términos unos positivos otros negativos, el teorema quedará exacto con tal que cada suma parcial de términos del mismo signo tenga un límite finito.

Con esta sola restriccion se tendrá siempre: $\lim.\ B=\lim.\ A$.

Este teorema constituye la base del cálculo integral como se verá mas adelante.

# CAPÍTULO II

## DE LAS DERIVADAS

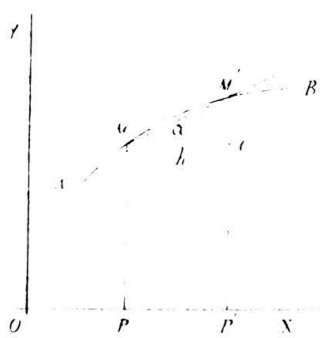
**5.** La primera concepcion de la derivada es debida a Newton, su definicion es la siguiente: Sea $f(x)$ cierta funcion de $x$; $f(x+h)$ su valor cuando se reemplaza $x$ por $x+h$, el límite de la razon

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

cuando $h$ tiende hácia cero se llama *derivada* de la funcion $f(x)$ i se designa por $f'(x)$.

Se ve que los dos términos de la fraccion considerada son infinitamente pequeños cuando $h$ tiende hácia cero; de manera que la derivada es el límite hácia el cual tiende la razon de dos cantidades infinitamente pequeñas.

Esta concepcion de la derivada se presenta naturalmente cuando se quiere determinar el coeficiente angular de la tanjente a una curva plana.




Sea una curva $AB$; $y=f(x)$ su ecuacion referida a dos ejes rectangulares $OX$, $OY$; $M$ uno de sus puntos i $M'$ otro punto infinitamente próximo de $M$.

La tanjente a la curva en $M$ será, por definicion, el límite de la posicion de la secante $MM'$ cuando $M'$ se aproxima indefinidamente de $M$.

Sea $\alpha$ el ángulo que hace esta secante $MM'$ con el eje de las abcisas o con una paralela $MC$ a este eje trazada por el punto $M$ el coeficiente angular de la tanjente a la curva en $M$ será el límite hácia el cual tiende $tg\,\alpha$ cuando $M'$ se acerca indefinidamente a $M$.

Ahora, en el triángulo $MM'C$ se tiene

$$tg\,\alpha=\frac{M'C}{MC}$$

Supongamos que se haya tomado $MC=h$; trazemos las dos perpendiculares $MP$, $M'P'$ sobre $OX$, en la figura se tendrá

$$OP=x \qquad MP=f(x)$$

$$OP'=x+h \qquad M'P'=f(x+h)$$

Luego

$$M'C=f(x+h)-f(x)$$

I por consiguiente

$$tg\,\alpha=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Cuando $M'$ se aproxima indefinidamente de $M$, $h$ tiende hácia cero; luego se puede decir que el coeficiente angular de la tanjente a la curva en $M$ es el límite de

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

cuando $h$ tiende hácia cero.

En otros términos, el coeficiente angular en un punto de la curva

$$y=f(x)$$

tiene por valor la derivada $f'(x)$ de la funcion $f(x)$.

Así la determinacion de las derivadas tiene como aplicacion jeométrica el trazado de las tanjentes a las curvas.

NOTA.—Esta representacion jeométrica tiene la ventaja de indicar mui sencillamente varias propiedades de las derivadas; así una curva que tiene todas sus tanjentes paralelas al eje $OX$ no puede ser sino una paralela a este eje; su ecuacion será

$$y=\text{constante}$$

Por consiguiente una funcion $f(x)$ que tiene una derivada siempre nula no puede ser sino una constante.

Este mismo teorema será demostrado mas adelante.

*Derivadas de algunas funciones simples*

6. Si en la espresion

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

se considera $h$ como infinitamente pequeño principal se podrá, despreciar todos los infinitamente pequeños de órden superior a $h$ sin que cambie el límite hácia el cual tiende la fraccion cuando $h$ tiende hácia cero.

**Derivada de $x^m$ cuando $m$ es un número entero.**

Se tiene

$$f(x)=x^m$$

$$f(x+h)=(x+h)^m=x^m+m\,h\,x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}h^2\,x^{m-2}+\ldots\ldots$$

Como se pueden despreciar los infinitamente pequeños de órden superior a $h$ se escribirá simplemente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{m\,h\,x^{m-1}}{h}$$

Luego

$$\lim.\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=m\,x^{m-1}$$

O bien

$$f'(x)=m\,x^{m-1}$$

**Derivada de sen $x$**

Se tiene

$$f(x)=\operatorname{sen} x$$

$$f(x+h)=\operatorname{sen}(x+h)=\operatorname{sen} x\cos h+\cos x\operatorname{sen} h$$

Se podrá aquí reemplazar cos $h$ por 1 sen $h$ por $h$ pues esta substitucion corresponde a despreciar infinitamente pequeños de órden superior a $h$, se tendrá entónces

$$f(x+h) = \text{sen}\, x + h \cos x$$

i

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h \cos x}{h}$$

El límite buscado es $\cos x$; por consiguiente

$$f'(x) = \cos x$$

**Derivada de $a^x$ en que se supone $a$ positivo.**

Se tiene
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}$$

Pongamos

$$a^h - 1 = \epsilon$$

La cantidad $\epsilon$ será infinitamente pequeña, pues tiende hácia cero cuando $h$ tiende hácia cero. De la ecuacion anterior se deduce

$$a^h = 1 + \epsilon$$

$$h\, La = L\,(1+\epsilon)$$

Se designa por $L$ el símbolo de los logaritmos neperianos. Así

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{\epsilon\, La}{L\,(1+\epsilon)} = La \quad \frac{1}{L\,(1+\epsilon)^{\frac{1}{\epsilon}}}$$

Se sabe que el límite de $(1+\epsilon)^{\frac{1}{\epsilon}}$ cuando $\epsilon$ tiende hácia cero es igual a $e$ (base de los logaritmos neperianos) por consiguiente

$$\text{lim.}\; L\,(1+\epsilon)^{\frac{1}{\epsilon}} = Le = 1$$

$$\text{lim.}\; \frac{a^h - 1}{h} = La$$

Luego

$$\lim. \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x\, La$$

O bien

$$f'(x) = a^x\, La$$

Se ve que, cuando $a$ es igual a la base $e$ de los logaritmos neperianos la derivada se reduce a $e^x$, es decir que la derivada de $e^x$ es igual a la funcion misma.

7. Siguiendo estos mismos procedimientos se podria llegar a obtener las derivadas de todas las funciones; sin embargo los cálculos se hacen mas complicados a medida de la complicacion de las funciones.

Por esto se han establecido reglas de derivacion que permiten escribir luego la derivada de una funcion cualquiera cuando se conocen ya las derivadas obtenidas mas arriba.

Ántes de establecer estas reglas, demostraremos el teorema siguiente:

TEOREMA.—*Si una funcion $f(x)$ tiene una derivada siempre nula para todos los valores de $x$ comprendidos entre $a$ i $b$, esta funcion es constante.*

Se tiene por definicion

$$f'(x) = \lim. \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Luego podemos escribir

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \epsilon$$

La cantidad $\epsilon$ es infinitamente pequeña, pues tiende hácia cero cuando $h$ tiende hácia cero.

De la fórmula anterior se deduce la siguiente:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + h\epsilon$$

El primer miembro es el *incremento de la funcion* correspondiente al incremento $h$ de la variable; este incremento es la suma de dos términos: uno igual al producto de $h$ por la derivada de la funcion, el otro infinitamente pequeño de órden superior a $h$, pues es el producto de $h$ por otro infinitamente pequeño $\epsilon$.

Aplicaremos esta fórmula a la demostracion del teorema.

Sea $u$ un valor de $x$ comprendido entre $a$ i $b$; dividimos el intervalo $u-a$ en $n$ partes iguales i sea $h$ cada una de ellas, se tendrá

$$u-a=n\,h$$

Calculemos el incremento total de la funcion cuando $x$ varia desde $a$ hasta $u$, este incremento será la suma de los $n$ incrementos siguientes

$$f(a+h)-f(a)=h\,f'(a)+h\,\epsilon_1$$

$$f(a+2\,h)-f(a+h)=h\,f'(a+h)+h\,\epsilon_2$$

$$f(a)+3\,h)-f(a+2\,h)=h\,f'(a+2\,h)+h\,\epsilon_3$$

$$\begin{array}{ccc} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & \end{array}$$

$$f(a+n\,h)-f(a+\overline{n-1}\,h)=f'(a+\overline{n-1}\,h)+h\,\epsilon_n$$

Si se admite que la derivada es siempre nula cuando $x$ varia desde $a$ hasta $b$ los primeros términos de los segundos miembros serán nulos, de manera que, si suman las $n$ ecuaciones precedentes, se obtendrá

$$f(a+n\,h)-f(a)=h\,(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\ldots\ldots+\epsilon_n)$$

O bien

$$f(u)-f(a)=h\,(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\ldots\ldots+\epsilon_n)$$

Sea $\eta$ la mayor en valor absoluto de las cantidades $\epsilon_1, \epsilon_2 \,..\epsilon_n$; el segundo miembro será menor en valor absoluto que $h\,n\,\eta$, o bien que $\eta\,(u-a)$. La cantidad $\eta$ es infinitamente pequeña i tiende hácia cero a medida que $h$ tiende hácia cero o a medida que $n$ aumenta, pues $n\,h$ es constante.

De manera que, elijiendo el número $n$ de subdivisiones de $u-a$ bastante grande se puede hacer $f(u)-f(a)$ tan pequeño como se quiere, pues esta diferencia es siempre menor en menor absoluto que $\eta(u-a)$; pero, como el valor de $f(u)-f(a)$ no depende del número $n$ de subdivisiones de $u-a$, es preciso que esta diferencia sea idénticamente nula. Así, para todos los valores de $u$ comprendidos entre $a$ i $b$, $f(u)$ sera igual a $f(a)$, es decir será independiente de $u$; decir que $f(u)$ es independiente de $u$ es lo mismo que decir: $f(u)$ no contiene $u$, luego tampoco $f(x)$ contendrá $x$.

En resúmen la funcion $f(x)$ es una constante.

## CAPÍTULO III

### DE LAS DIFERENCIALES.—REGLAS DE DERIVACION

**8**. La consideracion de las diferenciales simplifica mucho la solucion del problema de la derivacion de una funcion cualquiera.

Hemos establecido mas arriba la fórmula

$$f(x+h)-f(x)=h\,f'(x)+h\,\epsilon$$

Se llama, por definicion, *diferencial* de la funcion $f(x)$ el producto $hf'(x)$. Se ve que la diferencial de una funcion difiere del incremento de la misma funcion de la cantidad $h\epsilon$ que es infinitamente pequeña de órden superior a $h$. Segun esto, la diferencial podrá reemplazar el incremento en todos los problemas en que se trata de determinar el límite de la razon entre infinitamente pequeños o el límite de la suma de un número infinitamente grande de ellos.

Si se escribe

$$y=f(x)$$

se designa la diferencial de la funcion $f(x)$ por el símbolo $dy$, de suerte que, por definicion, se escribe

$$dy=h\,f'(x)$$

Así la diferencial de una funcion $f(x)$ es, *por definicion*, el producto de la derivada $f'(x)$ por el incremento $h$ de la variable.

Es fácil de ver que el incremento de la variable es lo mismo que su diferencial, porque si se considera la funcion $y=x$ se tendrá $f'(x)=1$ por consiguiente:

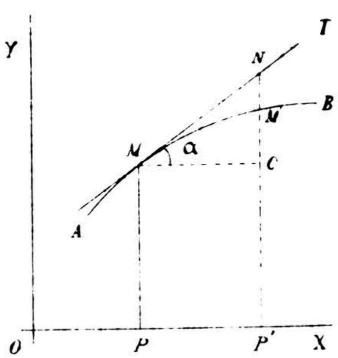
$$dx=h$$

Así se podrá escribir tambien

$$dy=f'(x)\,dx$$

En esta fórmula $dx$ es la diferencial o el incremento de la variable $x$; $dy$ es la diferencial de la funcion $y$, no es igual al incremento de $y$, pero difiere de este incremento de una cantidad infinitamente pequeña de órden superior.

*Representacion jeométrica de la diferencial.*— Representemos la funcion $y=f(x)$ por una curva referida a dos ejes rectangulares $OX$, $OY$; en el punto $M$ de la curva tracemos la tanjente $MT$. Sea $M'$ otro punto de la curva infinitamente próximo de $M$; tracemos las ordenadas $MP$, $M'P'$, i la paralela $MC$ al eje $OX$; sea $N$ el punto de encuentro de la tanjente $MT$ con la ordenada del punto $M'$.




Si $\gamma$ es el ángulo que hace la tanjente $MT$ con el eje $OX$ o su paralela $MC$ se tiene, segun lo que hemos visto mas arriba

$$tg\ \gamma=f'(x)$$

En la figura, $MC$ es el incremento o la diferencial de la variable $x$ i el incremento de la funcion es representado por $M'C$; así

$$MC=dx$$

Ahora, en el triangulo rectángulo $NCM$ se tiene:

$$NC = MC\ tg\,\gamma = dx\, f'(x)$$

Por consiguiente $NC$ es la diferencial de la funcion. Se ve así que el incremento de la funcion se cuenta desde el punto $C$ hasta el punto de encuentro de la ordenada con la curva i la diferencial se cuenta desde el mismo punto $C$ hasta el punto de encuentro de la ordenada con la tanjente:

En resúmen *la diferencial de una funcion de una variable es igual al producto de la derivada de la funcion respecto a la variable por la diferencial de la variable,*

Recíprocamente, *la derivada de una funcion respecto a una variable es el cuociente de las diferenciales de la funcion i de la variable.*

## 9. Derivadas de las funciones de funciones.

Sean las funciones:

$$y = f(u)$$

$$u = \theta(v)$$

$$v = \psi(x)$$

Se quiere calcular la derivada de $y$ respecto a $x$ es decir el valor de $\frac{dy}{dx}$.

Segun lo que hemos establecido mas arriba se podrá escribir:

$$dy = f'(u)\, du$$

$$du = \theta'(v)\, dv$$

$$dv = \psi'(x)\, dx$$

Luego, eliminando a $du$ i $dv$

$$dy = f'(u)\, \theta'(v)\, \psi'(x)\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\, \theta'(v)\, \psi'(x) = \frac{dy}{du}\, \frac{du}{dv}\, \frac{dv}{dx}$$

La derivada de $y$ respecto a $x$ es, segun esta fórmula, el producto de la derivada de $y$ respecto a $u$, por la derivada de $u$ respecto a $v$ i por la derivada de $v$ respecto a $x$.

La regla queda evidentemente la misma cualquiera que sea el número de funciones.

Esta regla de derivacion permite obtener fácilmente la derivada de una funcion de forma complicada como lo indica el ejemplo siguiente:

Aplicacion.—Determinar la derivada de la funcion

$$y = e^{\operatorname{sen}^{m} x}$$

Se pondrá sucesivamente

$$y = e^{u}$$

$$u = v^{m}$$

$$v = \operatorname{sen} x$$

I se tendrá

$$\frac{dy}{du} = e^{u} = e^{\sin^{m} x}$$

$$\frac{du}{dv} = m v^{m-1} = m \sin^{m-1} x$$

$$\frac{dv}{dx} = \cos x$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = e^{\operatorname{sen}^{m} x} m \operatorname{sen}^{m-1} x \cos x$$

## 10. Derivadas de las funciones compuestas.

Sea la funcion:

$$y = f(u, v)$$

En la cual:

$$u = \phi(x) \quad v = \psi(x)$$

Se quiere determinar la derivada de $y$ respecto a $x$. Por esto incrementemos $x$ de la cantidad infinitamente pequeña $dx$; si se puede determinar el incremento correspondiente de $y$ se formará la razon entre los dos incrementos i el límite de esta razon será la derivada buscada. Se ve ya que en la determinacion del incremento de $y$ se podrán despreciar los infinitamente pequeños de órden superior a $dx$ sin que cambie el límite buscado.

Despreciando pues los infinitamente pequeños de órden superior a $dx$ podremos tomar por incrementos de $u$ i $v$ sus diferenciales:

$$du = \phi'(x)\, dx$$

$$dv = \psi'(x)\, dx$$

Sea $\Delta y$ el incremento de $y$ se podrá escribir

$$\Delta y = f(u+du,\ v+dv) - f(u,\ v)$$

O bien

$$\Delta y = f(u+du,\ v+dv) - f(u,\ v+dv) + f(u,\ v+dv) - f(u,\ v)$$

Los dos primeros términos representan el incremento de la funcion $f(u, v+dv)$ cuando $u$ se cambia en $u+du$; $v+dv$ quedando constante. Este incremento se puede reemplazar por el producto de $du$ por la derivada de la funcion $f(u, v+dv)$ tomada respecto a $u$, designaremos esta derivada por $f'_u(u, v+dv)$ (el índice $u$ indica que, en la derivacion, se considera $u$ solamente como variable). Asi los dos primeros términos de $\Delta y$ se pueden reemplazar por

$$du\ f'_u\ (u,\ v+dv)$$

Del mismo modo, los dos términos siguientes se pueden reemplazar por

$$dv\ f'_v\ (u,\ v)$$

Luego, si se desprecian infinitamente pequeños de órden superior a $dx$ se puede reemplazar $\Delta y$ por la suma

$$du\ f'_u\ (u,\ v+dv) + dv\ f'_v\ (u,\ v)$$

Todavia $f'_u(u, v+dv)$ se puede reemplazar por $f'_u(u, v)$ pues la diferencia entre estas dos espresiones es infinitamente pequeña i su producto por $du$ será infinitamente pequeña de órden superior, se tiene pues rigorosamente

$$\Delta y = du\, f'_u(u, v) + dv\, f'_v(u, v) + \text{inf. peq. de órden superior.}$$

Se llama, por definicion, *diferencial total* de $y$ la espresion

$$dy = du\, f'_u(u, v) + dv\, f'_v(u, v)$$

Se ve que esta diferencial podrá reemplazar el incremento para el cálculo de la derivada, i se tendrá

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} f'_u(u, v) + \frac{dv}{dx} f'_v(u, v)$$

La derivada $f'^u(u, v)$, se llama *derivada parcial* de la funcion $f$ respecto a $u$ i se designa por $\frac{df}{du}$ o $\frac{dy}{du}$; del mismo modo $f'_v(u, v)$ es la derivada parcial de $f$ o de $y$ respecto a $v$ i se designa por $\frac{df}{dv}$ o $\frac{dy}{dv}$.

Se pueden escribir, pues, las fórmulas anteriores de la manera siguiente:

$$dy = \frac{df}{du} du + \frac{df}{dv} dv$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} + \frac{df}{dv} \frac{dv}{dx}$$

O bien

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx}$$

Cuando $y$ es una funcion de tres o mas funciones, la demostracion queda la misma i se llega a las reglas siguientes:

Sea la funcion

$$y = f(u, v, \omega \ldots\ldots)$$

en que $u$, $v$, $\omega$...... son funciones de una variable $x$.

Se tiene:

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv + \frac{dy}{d\omega} d\omega + \ldots .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dx}\frac{d\omega}{dx} + \ldots .$$

## 11. - Aplicaciones.

## Diferencial i derivada de una suma de funciones.

Sea

$$y = u + v + \omega + \ldots .$$

Se tendrá

$$\frac{dy}{du} = 1, \quad \frac{dy}{dv} = 1, \frac{dy}{d\omega} = 1 \ldots .$$

Luego

$$dy = du + dv + d\omega + \ldots .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{d\omega}{dx} + \ldots .$$

Así la diferencial de $y$ es la suma de las diferenciales de $u$, $v$, $\omega$... i la derivada de $y$ es tambien la suma de las derivadas de $u$, $v$, $\omega$. . . .

## Diferencial i derivada de un producto.

Sea, en primer lugar, el producto

$$y = C\,u$$

en el cual $C$ es una constante; si se da a $u$ un incremento $du$ es evidente que el incremento correspondiente de $y$ será $Cdu$ luego

$$dy = C\,du$$

Por consiguiente, si $u$ es una funcion de $x$

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{du}{dx}$$

Consideremos ahora el producto

$$y = u\, v$$

Se tiene

$$\frac{dy}{du} = v, \quad \frac{dy}{dv} = u$$

Luego

$$dy = v\, du + u\, dv$$

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

Así *la diferencial de un producto de dos factores es la suma de los productos de cada factor por la diferencial del otro.*

La *derivada de un producto es la suma de los productos de cada factor por la derivada del otro.*

Si el número de factores es cualquiera, como

$$y = u.\ v.\ \omega \ldots$$

Se tendrá

$$\frac{dy}{du} = v.\ \omega \ldots\ldots = \frac{y}{u}$$

Del mismo modo

$$\frac{dy}{dv} = \frac{y}{v}, \quad \frac{dy}{d\omega} = \frac{y}{\omega}, \text{ etc.}$$

Luego

$$dy = \frac{y}{u}\, du + \frac{y}{v}\, dv + \frac{y}{\omega} d\,\omega + \ldots\ldots$$

Tambien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{u}\,\frac{du}{dx} + \frac{y}{v}\,\frac{dv}{dx} + \frac{y}{\omega}\,\frac{d\omega}{dx} + \ldots\ldots$$

La regla es evidente.

**Derivada de un cuociente.**

Sea

$$y=\frac{u}{v}$$

Se tiene

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{v},\ \frac{dy}{dv}=-\frac{u}{v^2}$$

Luego

$$dy=\frac{1}{v}\,du-\frac{u}{v^2}\,dv=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

REGLA.—*La diferencial de un cuociente es igual al producto del denominador por la diferencial del numerador ménos el numerador por la diferencial del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.*

La derivada se obtiene de la misma manera.

Aplicaciones.—**Derivada de cos** $x$.

Se tiene

$$y=\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Sea

$$u=\frac{\pi}{2}-x$$

Tendremos

$$y=\operatorname{sen} u$$

$$dy=\cos u\,du=\operatorname{sen} x\,du$$

$$du=-dx$$

Luego

$$dy=-\operatorname{sen} x\,dx$$

$$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{sen} x$$

### Derivada de tanj. $x$.

Se tiene

$$y = tg\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

### Derivada de $\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\, x}{1-\text{sen}\, x}}$

Sea

$$y = \sqrt{\frac{1+\text{sen}\, x}{1-\text{sen}\, x}}$$

Se pone

$$u = \frac{1+\text{sen}\, x}{1-\text{sen}\, x}$$

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$$

Luego:

$$dy = \tfrac{1}{2}\, u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2\sqrt{u}}\, du$$

$$du = \frac{2\cos x}{(1-\text{sen}\, x)^2}\, dx$$

O bien:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{u}}\, \frac{2\cos x}{(1-\text{sen}\, x)^2}\, dx = \frac{dx}{1-\text{sen}\, x}$$

### Derivada de $u^v$.

Sea, jeneralmente

$$y = u^v$$

Se tiene

$$\frac{dy}{du} = v u^{v-1} \qquad \frac{dy}{dv} = u^v\, L\, u$$

Luego

$$dy = v\, u^{v-1}\, du + u^v\, L\, u\, dv$$

En el caso actual $u = v = x$, por consiguiente:

$$dy = x^x (1 + L\,x)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x (1 + L\,x)$$

12.—**Derivadas de las funciones inversas.**

Sea $y = f(x)$ cierta funcion de $x$, de esta ecuacion se puede deducir $x = \phi(y)$ i se dice que $\phi(y)$ es la funcion inversa de $f(x)$. Se trata de determinar $f'(x)$ cuando se conoce $\phi'(y)$.

Se tiene:

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$dx = \phi'(y)\,dy$$

Luego:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}$$

Aplicacion.—**Derivada de** $Lx$.

Sea $y = Lx$.

Se deduce

$$x = e^y$$

$$dx = e^y\,dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Luego la derivada de $Lx$ es $\frac{1}{x}$.

**Derivada de arc** $tg\,x$.

Sea

$$y = \text{arc}\,tg\,x$$

Se deduce

$$x = tg\,y$$

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y}$$

Luego:

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2\,y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

**Derivada de arc sen $x$.**

Sea

$$y = \text{arc sen } x$$

Se deduce

$$x = \text{sen } y$$

$$dx = \cos y \, dy$$

Por consiguiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Se encuentra aquí dos derivadas de la funcion, las dos iguales i de signo contrario; el resultado se esplica fácilmente si se nota que un arco no es suficientemente definido por su seno; se sabe en efecto que si $x$ es el seno de un ángulo $a$ comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ i $+\frac{\pi}{2}$ todos los arcos que tendrán $x$ por seno serán comprendidos en las dos fórmulas:

$$y = 2K\pi + a$$

$$y = (2K + 1)\pi - a$$

Los primeros nos dan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx}$$

I los segundos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{da}{dx}$$

De manera que se deben encontrar dos valores iguales i de signos contrarios para $\frac{dy}{dx}$. En la práctica se escribe siempre:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

i se entiende que el ángulo correspondiente a arc sen $x$ es comprendido entre $-90^\circ$ i $+90^\circ$.

**Derivada de $x^m$ cuando $m$ es cualquiera, entero o no.**

Sea

$$y = x^m$$

Se deduce

$$Ly = m\ Lx$$

$$\frac{dy}{y} = m\ \frac{dx}{x}$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = m\ \frac{y}{x} = m\ x^{m-1}$$

Es la misma fórmula que cuando $m$ es entero

**Derivada de** arc tg $\frac{3\,a^2\,x - x^3}{a^3 - 3\,a\,x^2}$

Se encuentra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\,a}{a^2 + x^2}$$

ALBERTO OBRECHT

Director del Observatorio Astronómico
Profesor de las clases de mecánica i cálculo diferencial e integral
de la Universidad

*(Continuará)*