NOTA

SOBRE EL CÁLCULO DE LOS ESFUERZOS DE CORTE MÁXIMOS EN LAS VIGAS DE CELOSÍA BAJO LA ACCION DE UNA SOBRECARGA UNIFORME MÓVIL

I. INTRODUCCION

Para el cálculo de los puentes con vigas de celosía, se emplea con frecuencia una sobrecarga uniforme móvil, para la determinacion de los esfuerzos de corte máximos que se producen en los diferentes paños. Jeneralmente se hacen los cálculos estendiendo simplemente la carga desde uno de los estremos de la viga hasta la mitad del paño que se considera; despues, concentrando la carga uniforme en una série de fuerzas aisladas aplicadas en los nudos, se adopta como esfuerzo de corte máximo del paño, la reaccion de las fuerzas aisladas sobre el apoyo sin carga. Este procedimiento, aunque sea inexacto, se emplea mucho por su sencillez.

Pocas veces se sigue el método exacto, que consiste en calcular el esfuerzo de corte máximo "efectivo", que se produce en el paño que se considera, para lo cual hai que correr la carga hasta cierto punto, variable de un paño a otro. Pero veremos que este procedimiento no es tan sencillo como el que precede;

i este es sin duda el motivo por que se le emplea con ménos frecuencia.

El objeto de esta Nota es mostrar que el método exacto se presta a simplificaciones importantes, que hacen que su empleo sea mui práctico, i ha de preferirse a los otros procedimientos que se usan actualmente. Pero, ántes de esponer este punto, recordaremos brevemente las bases del método exacto i los modos de operar empleados hoi dia para el cálculo de los esfuerzos de corte máximos.

II. ESTADO DE SOLICITACION MAS DESFAVORABLE

Principios fundamentales.—Para indagar el estado de solicitacion mas desfavorable, estableceremos primero dos principios fundamentales que se refieren a este objeto.

Primer principio.—"Cuando una fuerza aislada P se mueve sobre una viga con viguetas i longuerinas, pasa sobre cada longuerina por un punto tal que, para esa posicion de la fuerza, el esfuerzo de corte es nulo en toda la estension del paño correspondiente."

Supongamos, en efecto, que el perfil trasversal del tablero sea simétrico respecto al eje de la vía, comprendiendo 2 longuerinas colocadas entre las dos vigas, i supongamos, ademas, para mayor sencillez, que cada fila de longuerinas está recorrida por una fuerza P, lo que seria jeneralmente el caso para puentes carrileros. Cuando los pesos P lleguen en 0 (fig. 1), producen sobre las viguetas vecinas a i b, respectivamente, las componentes P_a i P_b, las cuales orijinan sobre cada viga en a i b reacciones que serán tambien P_a i P_b, i, por consiguiente, las mismas que si una fuerza P recorriera cada viga principal. Si llamamos R_1 la reaccion del apoyo B, el esfuerzo de corte K del paño $a\ b$ será:

$$K = R_1 - P_b$$

Ademas tenemos

$$R_1 = P\frac{A\,o}{A\,B} \qquad P_b = P\frac{a\,o}{a\,b}$$

Para que el esfuerzo de corte sea nulo, bastará que

$$R_1 = P_b$$

o

$$\frac{A\,o}{A\,B} = \frac{a\,o}{a\,b}, \quad \text{o tambien} \quad \frac{A\,o}{o\,B} = \frac{a\,o}{o\,b}$$

es decir que el peso P debe ocupar una misma posicion relativa respecto al paño $a\,b$ i a la viga $A\,B$.

El punto o al cual corresponde el esfuerzo de corte nulo, se llama el *punto de separacion* de este paño.

Segundo principio.—"El esfuerzo de corte es positivo o negativo en toda la estension del paño cuya longuerina lleva al peso P, segun que éste se encuentre sobre ella a la derecha o a la izquierda del punto de separacion."

Efectivamente, cuando P se mueve de o hácia b, la componente P_b crece mas lijero que R_1, pues es ya igual a P cuando este peso llega sobre la vigueta b. Síguese que K es positivo. La componente P_b disminuye mas rápidamente que R_1 cuando P se mueve de o hácia a, puesto que se anula cuando P llega a la vigueta a. En este caso, pues, K es negativo.

Corolario.—Síguese que para tener en el paño $a\,b$ el máximum negativo o positivo del esfuerzo de corte, se debe colocar P respectivamente en a ó b (1).

III. SOBRECARGAS UNIFORMES MÓVILES

Será fácil deducir de estos principios conclusiones para el caso de sobrecargas uniformes móviles. Pues, como toda fuerza que obra entre A i o produce en el paño $a\,b$ un K negativo i como toda fuerza colocada a la derecha de o orijina en el mismo paño un K positivo, se ve que para obtener el esfuerzo de corte máximo negativo en el paño $a\,b$, debe estenderse la carga uni-

(1) La demostracion de estos dos principios ha sido tomada de *Leçons sur la stabilitè des constructions, professèes a l' Universitè de Gand*, par M. Boudin, tome II, p. 104 et 105. Edition de 1890.

forme desde el apoyo A hasta el punto de separacion o del paño que se considera.

El *esfuerzo de corte máximo* tendrá siempre por espresion

$$K_{\max} = R_1 - P_b$$

calculándose los valores de R_1 i P_b por las fórmulas

$$R_1 = \frac{p\, l'^2}{2\, l} \qquad P_b = \frac{p\, z^2}{2\, \delta}$$

en las cuales:

p = sobrecarga uniforme móvil por unidad de lonjitud.

$l = A\,B$ = lonjitud del tramo.

$l' = A\,o$ = lonjitud en que obra la sobrecarga.

$z = a\,o$ = distancia de la vigueta a al punto de separacion o.

$\delta = a\,b$ = distancia entre las viguetas del paño que se considera.

IV. MÉTODOS USUALES PARA LA DETERMINACION DE R_1 i P_b

El cálculo de R_1 i P_b necesita la determinacion prévia del punto de separacion o de cada paño. Se puede determinarlo gráficamente trazando por A i B dos paralelas $A\,H$ i $B\,K$, (fig. 1) i juntando sus puntos de interseccion a' i b' con las verticales en a i b. La interseccion de $a'\,b'$ i $a\,b$ da o. Se puede tambien, en el caso de una viga que tiene un número n de paños iguales, dividir la lonjitud de un paño en $(n-1)$ divisiones, i llevar $(m-1)$ divisiones desde el montante que se encuentra a la izquierda del paño de número m. Otro modo de operar consiste en la determinacion analítica del punto de separacion por medio de la espresion jeneral de z, que damos mas allá (fórmula 1).

La posicion de o fija el valor de z i de l'. Se puede, pues, determinar R_1 i P_b, ya sea trazando las parábolas del caso (fig. 3), ya sea adoptando los trazados gráficos que indicamos en la figura 2.

En todo caso, los procedimientos, aunque no presentan complicacion ninguna, no dejan de ser molestos i necesitan una série de operaciones numéricas o gráficas que convendria evitar. Vamos a mostrar que el método es susceptible de simplificaciones importantes que hacen su empleo mui práctico.

V. MÉTODO NUEVO

Hemos visto mas arriba que el esfuerzo de corte máximo se obtiene por la fórmula

$$K_{\max} = \frac{p\,l'^2}{2\,l} - \frac{p\,z^2}{2\,\delta}$$

La misma definicion del punto de separacion muestra que

$$\frac{l'}{l} = \frac{z}{\delta}$$

Síguese que

$$\frac{l'^2}{l} = \frac{z^2}{\delta^2}\,l$$

o, suponiendo que la viga de lonjitud l se compone de n paños de lonjitud δ

$$\frac{l'^2}{l} = \frac{n\,z^2}{\delta}$$

Tendremos, pues,

$$K_{\max} = \tfrac{1}{2} p \frac{n\,z^2}{\delta} - \tfrac{1}{2} p \frac{z^2}{\delta} = \tfrac{1}{2} p\,(n-1) \frac{z^2}{\delta}$$

Determinemos el valor jeneral de z.

Valor de z.—Supongamos que se trata de determinar el punto de separacion o del paño de número m en el caso de una viga de n paños de lonjitud δ. Sabemos que este punto se determina por la relacion

$$\frac{a\,o}{o\,b} = \frac{A\,o}{o\,B}$$

Síguese

$$\frac{a\,o+o\,b}{A\,o+o\,B}=\frac{a\,o}{A\,o} \quad \text{o} \quad \frac{\delta}{l}=\frac{z}{A\,o}$$

i

$$z=A\,o\frac{\delta}{l}=\frac{A\,o}{n}$$

$$n\,z=A\,o=(m-1)\,\delta+z$$

i finalmente

$$z=\frac{m-1}{n-1}\,\delta \qquad (1)$$

Esta es la espresion jeneral de z.

Valor definitivo de K_{max}.—Reemplazando z por su valor en la espresion de $K_{\max}$, tendremos

$$K_{\max}=\tfrac{1}{2}\,p\,(n-1)\,\frac{(m-1)^2}{(n-1)^2}\,\delta$$

o finalmente

$$K_{\max}=p\,\delta\times\tfrac{1}{2}\,\frac{(m-1)^2}{n-1} \qquad (2)$$

es decir, escribiendo

$$p\,\delta=C \qquad \tfrac{1}{2}\,\frac{(m-1)^2}{n-1}=a$$

$$K_{\max}=C\times a \qquad (2')$$

La fórmula (2) da la espresion del esfuerzo de corte máximo que se desarrolla en el paño número m de una viga que tiene n paños de lonjitud δ cada uno, bajo la accion de una sobrecarga uniforme p por unidad de lonjitud, que cubra el puente hasta el punto de separacion de dicho paño. Se ven desde luego las ventajas que se pueden sacar de la espresion de $K_{\max}$ presentada bajo esta forma.

En efecto, el esfuerzo de corte máximo se compone de dos factores mui distintos:

1.° del producto $p\,\delta$, que es propio a cada estudio particular, pues se compone de la carga uniforme p que conviene admitir por unidad de lonjitud, i de la distancia δ de las viguetas, la cual fija las dimensiones lonjitudinales del puente para un número dado n de paños. El producto

$$p\,\delta = C$$

puede llamarse, pues, la *característica* del proyecto, i se calculará con la mayor facilidad en cada caso particular.

2.° del coeficiente α, que es completamente independiente de las dimensiones absolutas del tramo, i depende solo del número total n de paños i del número de órden m del paño que se examina.

Pero los coeficientes α pueden calcularse una vez por todas, dando a n una série de valores i haciendo m igual a la serie de números desde 1 hasta n. Hemos calculado los coeficientes de α para los valores sucesivos de n desde 2 hasta 15 (lo que basta para los casos de la práctica), variando m en cada uno de estos casos desde 1 hasta n. El cuadro adjunto da los resultados correspondientes. Las columnas verticales se refieren a los valores sucesivos de n, i las columnas horizontales dan los valores correspondientes al paño m desde el apoyo izquierdo.

CUADRO DE LOS VALORES DE $\alpha = \frac{1}{2}\frac{(m-1)^2}{n-1}$

Valores de m	VALORES DE n														Valores de m
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0,500	0,250	0,167	0,125	0,100	0,083	0,072	0,063	0,056	0,050	0,045	0,042	0,038	0,036	2
3	......	1,000	0,667	0,500	0,400	0,333	0,286	0,250	0,222	0,200	0,182	0,167	0,154	0,143	3
4	......	......	1,500	1,125	0,900	0,750	0,643	0,563	0,500	0,450	0,409	0,375	0,346	0,321	4
5	......	......	......	2,000	1,600	1,333	1,143	1,000	0,889	0,800	0,727	0,665	0,615	0,571	5
6	......	......	......	......	2,500	2,083	1,785	1,563	1,389	1,250	1,136	1,042	0,962	0,893	6
7	......	......	......	......	......	3,000	2,572	2,250	2,000	1,800	1,636	1,500	1,385	1,285	7
8	......	......	......	......	......	......	3,500	3,063	2,722	2,450	2,227	2,042	1,885	1,750	8
9	......	......	......	......	......	......	......	4,000	3,556	3,200	2,909	2,666	2,462	2,285	9
10	......	......	......	......	......	......	......	......	4,500	4,050	3,682	3,375	3,115	2,893	10
11	......	......	......	......	......	......	......	......	......	5,000	4,545	4,166	3,846	3,572	11
12	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	5,500	5,040	4,654	4,322	12
13	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	6,000	5,539	5,143	13
14	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	6,500	6,035	14
15	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	7,000	15

Por medio de este cuadro, el cálculo de los esfuerzos de corte máximos es de toda sencillez. Pues teniendo que hacer un proyecto de puente, despues de haber fijado la lonjitud i el ancho de la obra i la distancia entre las viguetas, se determina inmediatamente la característica

$$C=p\,\delta$$

i en el caso de un puente que tenga n paños, bastará multiplicar los coeficientes convenientes de la columna n por la característica C para obtener los esfuerzos de corte máximos.

Un ejemplo parece demas para darse cuenta del modo de operar. Sin embargo, aplicaremos el procedimiento al caso que sigue:

VI. APLICACION

"Determinar los esfuerzos de corte máximos negativos que se producen en los diferentes paños de las vigas de un puente de 40 metros de largo i 5 metros de ancho libre, bajo la accion de una sobrecarga uniforme móvil de 400 Kg. por m^2, siendo la lonjitud de los paños de 4 metros."

La sobrecarga p por metro corrido de viga será

$$p=\tfrac{1}{2}\,400^{k}\times 5^{m}=1000 \text{ Kg.}$$

La característica del proyecto será, pues:

$$C=p\,\delta=1000^{k}\times 4=4000 \text{ Kg}$$

Siendo de 40 metros la lonjitud del puente, el número de paños será

$$n=\frac{40}{4}=10$$

Para tener los K_{max}, bastará multiplicar por 4000 Kg. los coeficientes de la columna vertical $n=10$.

Tendremos, pues:

m	10	9	8	7	6	5	etc.
a	4,500	3,556	2,722	2,000	1,389	0,889	etc.
K_{max}	$18,000^k$	$14,224^k$	$10,888^k$	$8,000^k$	$5,556^k$	$3,556^k$	

Se ve, pues, que el método es verdaderamente práctico i de una aplicacion mucho mas fácil que los métodos numéricos o gráficos que se usan actualmente.

GUILLERMO OTTEN
Injeniero honorario de puentes i calzadas de Béljica,
contratado por el Gobierno de Chile