LA ECUACION

$X^3 + Y^3 = Z^2$ (*)

I UNA DEMOSTRACION NUEVA DEL TEOREMA DE FERMAT PARA EL CASO DE LAS SESTAS POTENCIAS

Se trata de satisfacer a la ecuacion propuesta en números enteros x, y, z.

De antemano es claro que x e y pueden ser números primos entre sí o que no pueden serlo. Si no son números primos entre sí puede sentarse

$$x = kx', \quad y = ky'$$

i entónces hai que distinguir entre dos casos:

1.° k *no* es un número cuadrado.
2.° k es el cuadrado de un número.

(*) El presente trabajo ha sido orijinado por una cuestion propuesta por el señor P. F. Teilhet en *L'intermédiaire des mathématiciens*, tomo III, Noviembre de 1896, número 925.

En el *primer* caso la ecuacion propuesta se convierte en

$$k^3x'^3+k^3y'^3=z^2$$

de lo que se desprende que z debe ser $=k^2z'$.

En virtud de la sustitucion $z=k^2z'$ se obtiene

$$x'^3+y'^3=kz'^2,$$

o sea que resulta otra ecuacion mas complicada que la propuesta i que merece probablemente un tratamiento especial para cada valor determinado de k. Nos parece, por lo tanto, escusado escluir este caso.

Sustituyendo, en el *segundo* caso, $k=h^2$, la ecuacion propuesta se trasforma en

$$h^6x'^3+h^6y'^3=z^2$$

de lo que se deduce $\qquad z=h^3z'$

i por consiguiente $\qquad x'^3+y'^3=z'^2$

o sea que resulta una ecuacion análoga a la propuesta.

Segun lo espuesto, basta considerar x e y como *números primos entre sí*.

Escribamos, ahora, la ecuacion de que se trata, en la forma siguiente:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=z^2 \qquad (1)$$

i consideremos separadamente los cuatro casos distintos que pueden presentarse.

A saber:

I. $\qquad x+y=z;\ x^2-xy+y^2=z$

II. $\qquad x+y=p;\ x^2-xy+y^2=pq^2;\ z=pq$

III. $\qquad x+y=pq^2;\ x^2-xy+y^2=p;\ z=pq$

IV. $\qquad x+y=p^2;\ x^2-xy+y^2=q^2;\ x=pq,$

designando por p i q números *enteros*.

I

De las dos ecuaciones

$$y = z - x \text{ i } x^2 - xy + y^2 = z$$

se deduce esta otra:

$$x^2 - (z - x)x + (z - x)^2 = z$$

ecuacion que, mediante algunas trasformaciones, toma la forma

$$x^2 - zx - \frac{z - z^2}{3} = 0$$

De aquí

$$x = \frac{z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z(4-z)}{3}}$$

Ahora bien, para que x sea un número real i entero, es necesario i suficiente que sea

$$z \leqq 4 \text{ i } z \equiv 0 \quad \text{o bien} \quad z \equiv 1 \ (mod\ 3) \ (*)$$

Sea, por lo tanto,

1.° $$z = 1,\ x = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2},\ x' = 1,\ x'' = 0,$$

luego $$y' = 0,\ y'' = 1$$

lo que da lugar a la identidad

$$1^3 = 1^2$$

2.° $$z = 3,\ x = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2},\ x' = 2,\ x'' = 1$$
$$y' = 1,\ y'' = 2$$

(*) $z \equiv a$ *(mod b)* quiere decir que z en la division por b deja la resta a. El signo $\equiv$ se lee *congruente a*, i *mod* se lee *módulo*.

lo que da $$2^3+1^3=3^2$$

3.° $$z=4,\ x=2,\ y=2$$

luego $$2^3+2^3=4^2.$$

II

De $$x+y=p \tag{2}$$

se deduce $$x^2+2xy+y^2=p^2$$

i como $$x^2-xy+y^2=pq^2,$$

se obtiene $$xy=\frac{p(p-q^2)}{3} \tag{3}$$

En virtud de las ecuaciones (2) i (3), se pueden considerar x e y como raices de la ecuacion del 2.° grado

$$t^2-pt+\frac{p(p-q^2)}{3}=0$$

de manera que x e y estan contenidas en la forma

$$t=\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p(4q^2-p)}{3}}$$

Como ahora la ecuacion propuesta no sufre alteracion alguna, si se cambia x por y i viceversa, vamos a suponer que x corresponda al signo $+$ e y al signo $-$ del radical.

Para que t sea un número real i entero es preciso que sea

$$4q^2>p \text{ i } p(4q^2-p)\equiv 0 \ (mod\ 3)$$

lo que da lugar a los dos casos siguientes:

1.° $$p\equiv 0\ (mod\ 3).$$

2.° $$4q^2\equiv p\ (mod\ 3) \text{ o sea } p\equiv 1 \ mod\ 3.$$

En el *primer* caso sentamos

$$p = 3p'$$

Segun esto, las ecuaciones (2) i (3) se convierten en las siguientes:

$$x + y = 3p'$$
$$xy = p'(3p' - q^2)$$

La última de estas ecuaciones hace ver que x o y tiene un factor comun con p'. Sentemos, para fijar la idea

$$x = f x', \; p' = f p'', \text{ siendo } 1 < f \leqq p'$$

La primera de las ecuaciones nos da, por eso, $fx' + y = 3fp''$

de lo que se desprende que y tambien tiene el factor f i luego que x e y no son primos entre sí, caso que hemos escluido.

En el *segundo* caso se deduce de la congruencia

$$4q^2 - p \equiv 0 \ (mod\ 3)$$

la otra

$$p - q^2 \equiv 0 \ (mod\ 3) \ (*)$$

luego, sentando

$$p - q^2 = 3d$$

se tiene las dos ecuaciones

$$x + y = p$$
$$xy = pd,$$

ecuaciones que—como lo esplicamos mas arriba—se satisfacen solo por números x e y, que *no* son primos entre sí.

(*) Basta sumar las dos congruencias para comprobar la exactitud de la última.

III

Del mismo modo empleado bajo II, se calcula el valor de xy, valor que en este caso resulta

$$xy = \frac{p(pq^4 - 1)}{3}$$

Considerando x e y como las raices de la ecuacion

$$t^2 - pq^2 t + \frac{p(pq^4 - 1)}{3} = 0$$

se obtiene
$$t = \frac{pq^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p(4 - pq^4)}{3}}$$

Esta vez basta someter p i q a la condicion de hacer *real* a t para obtener inmediatamente

$$pq^4 < 4, \text{ luego } q = \pm 1$$

i, por lo tanto,

$$x + y = p,\ x^2 - xy + y^2 = p,\ p = z$$

como en I.

IV

Desde luego podemos demostrar que p i q deben ser primos entre sí. En efecto, si no fueran primos entre sí, se podria poner

$$p = kp',\ q = kq'$$

i resultaria

$$x + y = k^2 p'^2$$

$$x^2 - xy + y^2 = k^2 q'^2$$

$$xy = \frac{k^2(k^2 p'^4 - q'^2)}{3}$$

$$t = \frac{k}{2}\left\{ kp'^2 \pm \sqrt{\frac{4q'^2 - k^2 p'^4}{3}} \right\}$$

lo que nos dice que x e y tendrian el factor comun k. A primera vista parece que este factor comun se convierte en 1, si k es $=2$, pero siendo $k=2$, luego $k^2=4$, se puede poner t bajo la forma siguiente:

$$t=2\left\{p'^2\pm\sqrt{\frac{q'^2-p'^4}{3}}\right\}$$

forma que pone en evidencia que x e y tienen el factor 2 comun.

Demostrado esto, deducimos de las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{r} x+y=p^2 \\ x^2-xy+y^2=q^2 \\ \hline \end{array}$$

las otras

$$xy=\frac{p^4-q^2}{3}$$

i

$$t=\frac{p^2}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4q^2-p^4}{3}},$$

siendo x e y los dos valores de t.

Para que t sea un número entero, es preciso que $4\,q^2-p^4$ sea el triple del cuadrado de un número. Sea u este número, i se tiene

$$4q^2-p^4=3u^2 \tag{4}$$

Esta es la ecuacion que nos toca tratar detalladamente. Desde luego, se nota que ni q ni p puede ser divisible por 3, puesto que si uno de estos números tuviera el divisor 3, el otro tendria que tenerlo tambien lo que es contrario al que p i q sean números primos entre sí.

Escribiendo en lugar de (4)

$$(2q-p^2)\,(2q+p^2)=3\,u^2 \tag{5}$$

nos cabe preguntar, si los dos factores $2q-p^2$ i $2q+p^2$ pueden tener un divisor comun. Sea k este divisor, i tendríamos

$$2q-p^2=kb$$

$$2q+p^2=ka$$

Introduciendo este resultado en la segunda ecuacion

$$2q+p^2=(g+\gamma)^2,$$

se obtiene

$$(g+\gamma)^2 \equiv -1 \pmod 3$$

lo que no es posible, puesto que de

$$g+\gamma \equiv \pm 1 \pmod 3$$

se desprende $$(g+\gamma)^2 \equiv +1 \pmod 3 \text{ (*)}.$$

Por lo tanto el *primer* caso no tiene lugar. Pasemos al

SEGUNDO CASO

Siendo, segun hemos visto mas arriba, p un número *impar*, resulta que g i $g+\gamma$ tambien son números impares i, por eso γ *par*.

Sentemos $\gamma=2l$ i tenemos

$$2q-p^2=g^2$$

$$\underline{2q+p^2=3\,(g+2l)^2}$$

De aquí

$$q=g^2+3\,gl+3l^2 \tag{7}$$

$$p^2=g^2+6gl+6l^2 \tag{8}$$

$$t=\frac{p^2 g \pm (g+2l)}{2}$$

$$=\frac{g^2+6gl+6l^2 \pm (g^2+2gl)}{2}$$

o sea

$$x=g^2+4gl+3l^2=(g+3l)\,(g+l) \tag{9}$$

$$g=2gl+3l^2=l\,(2g+3l) \tag{10}$$

(*) Este mismo procedimiento se habria podido aplicar tambien a la ecuacion (6), 2.º caso, pero *no* al 1.º

Para hacer, ahora, que $g^2+6gl+6l^2$ sea el cuadrado de p escribimos la ecuacion (8) en la forma siguiente:

$$(g+3l)^2-3l^2=p^2$$

o

$$(g+3l)^2-p^2=3l^2$$

o bien

$$(g+3l-p)(g+3l+p)=3l^2 \tag{11}$$

Esta ecuacion, análoga a la (5), ha de ser tratada tambien de un modo análogo al que acabamos de seguir.

En primer lugar, el mismo procedimiento de la pájina 69 nos demuestra que los dos factores del primer miembro de (11) no pueden tener otro comun divisor que *dos*. Por eso, tenemos que distinguir entre dos posibilidades que son: 1.ª $(g+3l-p)$ i $(g+3l+p)$ no tienen ningun factor comun; 2.ª los dos términos tienen el factor comun 2. Como g i p son impares, l va a ser *impar* en el *primer* caso i *par* en el *segundo*.

En uno i otro caso es evidente que uno de los factores $(g+3l-p)$ i $(g+3l+p)$ i *solamente uno*, debe ser divisible por 3. Ahora bien, como los dos factores se diferencian solo por el signo de p i como la ecuacion $x^3+y^3=z^2$ no altera colocando $-z$ en lugar de $+z$, se entiende que p tambien puede ser *positivo* o negativo, puesto que z es $=pq$. Por eso es que se puede elejir cualquiera de los dos factores divisible por 3.

Supuesto esto basta considerar todavía las *dos* subdivisiones siguientes, en las cuales m, μ, m_1, μ_1 significan números enteros cualesquiera:

$A)$ $g+3l-p=3m^2$, $g+3l+p=(m+\mu)^2$, $l=m(m+\mu)$;
$B)$ $g+3l-p=2m_1^2$, $g+3l+p=6(m_1+\mu_1)^2$, $l=2m_1(m_1+\mu_1)$

Trataremos, en fin, las dos subdivisiones una por una:

A.

Siendo, en este caso, l impar, m debe ser un número *impar* i, por consiguiente, μ *par*. Sentemos $\mu=2n$ i obtenemos

$$g+3l+p=(m+2n)^2$$
$$\underline{g+3l-p=3m^2}$$
$$g+3l=2m^2+2mn+2n^2 \tag{12}$$
$$p=2n^2+2mn-m^2 \tag{13}$$

i siendo $$l = m^2 + 2mn$$

resulta $$g = 2n^2 - 4mn - m^2 \tag{14}$$

De aquí, segun (7),

$$q = g(g + 3l) + 3l^2$$
$$= (2n^2 - 4mn - m^2)(2m^2 + 2mn + 2n^2) + 3(m^2 + 2mn)^2$$

o bien $$q = m^4 + 2m^3n + 6m^2n^2 - 4mn^3 + 4n^4 \tag{15}$$

i, segun (9),

$$x = (g + 3l)(g + l)$$
$$= (2m^2 + 2mn + 2n^2)(2n^2 - 2mn)$$

o sea $$x = 4n(n^3 - m^3) \tag{16}$$

ademas, segun (10),

$$y = l(2g + 3l)$$
$$= (m^2 + 2mn)(4n^2 - 2mn + m^2)$$

o bien $$y = m\{m^3 + (2n)^3\} \tag{17}$$

en fin

$$z = pq = (2n^2 + 2mn - m^2)(m^4 + 2m^3n + 6m^2n^2 - 4mn^3 + 4n^4). \tag{18}$$

Observacion.—Por medio de estas fórmulas pueden verificarse sin dificultad las relaciones principales:

$$x + y = p^2,\ x^2 - xy + y^2 = q^2,\ x^3 + y^3 = z^2.$$

Ántes de aplicar las fórmulas deducidas, pasamos a tratar la otra subdivision *B*, porque, sin contar con un pequeño cambio volveremos a las mismas fórmulas (16) a (18).

B.

De $$g + 3l + p = 6(m_1 + \mu_1)^2$$
$$g + 3l - p = 2m_1^2$$

resulta
$$g+3l=4m_1^2+6m_1\mu_1+3\mu_1^2 \qquad (19)$$
$$p=2m_1^2+6m_1\mu_1+3\mu_1^2 \qquad (20)$$

lo que nos dice que μ_1 debe ser número impar, puesto que tanto $(g+3l)$ como p lo son; miéntras que m_1 puede ser un número par o impar indiferentemente.

Para relacionar la fórmula (20) con la (13) deducida bajo A, sentamos
$$\mu_1=m,\ m_1+\mu_1=n \qquad (21)$$

designando por m un número impar i por n uno cualquiera. Es evidente que la última sustitucion $m_1+\mu_1=n$ es permitida, puesto que, si se dan a m_1 i μ_1 todos los valores entre $-\infty$ i $+\infty$ de que son susceptibles segun lo espuesto, n tambien toma todos los valores posibles entre $-\infty$ i $+\infty$.

Las sustituciones (21) dan todavía $m_1=n-\mu_1=n-m$ (22) i, por medio de (21) i (22), las ecuaciones principales de este inciso se convierten en
$$g+3l+p=6n^2$$
$$\underline{g+3l-p=2(n-m)^2}$$

De aquí
$$g+3l=4n^2-2mn+m^2$$
$$p=2n^2+2mn-m^2$$

i como
$$l=2n^2-2mn$$

se tiene
$$g=m^2+4mn-2n^2.$$

Ademas
$$\begin{aligned}
q&=g(g+3l)+3l^2\\
&=(m^2+4mn-2n^2)(4n^2-2mn+m^2)+12(n^2-mn)^2\\
&=m^4+2m^3n+6m^2n^2-4mn^3+4n^4\\
x&=(g+3l)(g+l)\\
&=(4n^2-2mn+m^2)(m^2+2mn)\\
&=m\{m^3+(2n)^3\}\\
y&=l(2g+3l)\\
y&=(2n^2-2mn)(2n^2+2mn+2m^2)\\
&=4n(n^3-m^3)\\
z&=pq=al\ (18)
\end{aligned}$$

Al revisar las fórmulas resultantes de B observamos que son esencialmente las mismas que las de A, con la única diferencia de que se ha cambiado x con y i viceversa. Pero este cambio no influye en nada en el resultado, porque lo que se pide es buscar dos números cuyos cubos den una suma (o diferencia segun el signo) igual al cuadrado de otro número.

Segun esto, basta considerar solamente las fórmulas deducidas bajo A, o sea las (16), (17) i (18).

Para aplicar, en fin, estas fórmulas recordamos todavía que m es un número entero *impar* positivo o negativo i que n es un número entero cualquiera positivo o negativo. De aquí resulta inmediatamente que x es número *par*, miéntras que y i z son *impares*. Ademas, las mismas fórmulas dan a conocer que si se elijen m i n provistos de un factor comun k, x e y obtendrán el factor comun k^4 i si se toma $m=n$, x se convierte en *cero* e y en $9m^4$, de modo que resulte en lugar de la ecuacion propuesta

$$y^3=(3^3m^6)^2$$

ecuacion que no tiene nada de interesante.

Pasamos ahora a dar algunos ejemplos aunque sin esplicar los pormenores de los cálculos los que cada uno puede ejecutar sin dificultad.

Ejemplo 1.º

$$m=1,\ n=2 \text{ da } x=56,\ y=65,\ z=671$$

En efecto, se tiene

$$x+y=121=11^2, \text{ o sea } p=11, (*)$$

$$x^2-xy+y^2=3721=61^2, \text{ o sea } q=61,$$

$$z=pq=11.61,$$

luego $$56^3+65^3=671^2.$$

(*) En cuanto a p, q i z hemos indicado solo el valor *positivo* por las razones ya esplicadas mas arriba.

Ejemplo 2.º

$$m=1,\ n=3 \text{ da } x=312,\ y=217,\ z=6371.$$

$$x+y=529=23^2,\ p=23$$

$$x^2-xy+y\ =76729=277^2,\ q=277$$

$$z=pq=23.277=6371,$$

luego

$$312^3+217^3=6371^2.$$

Ejemplo 3.º

$$m=-3,\ n=1 \text{ da } x=112,\ y=57,\ z=1261$$

$$x+y=169=13^2,\ p=13$$

$$x\ -xy+y^2=9409=97^2,\ q=97$$

$$z=pq=13.97=1261,$$

luego

$$112^3+57^3=1261^2.$$

Ejemplo 4.º

$$m=1,\ n=-1 \text{ da } x=8,\ y=-7,\ z=13.$$

En este caso se tiene inmediatamente

$$8^3+(-7)^3=13^2 \text{ o sea } 512-343=169.$$

Ejemplo 5.º

$$m=1,\ n=-2 \text{ da } x=72,\ y=-63,\ z=351$$

Verificando los resultados se obtiene

$$\begin{array}{r} x^3=373\ 248 \\ \underline{y^3=-250\ 047} \\ x^3+y^3=123\ 201=351^2=z^2. \end{array}$$

Nótese que en este ejemplo x e y tienen el factor cuadrado 3^2 comun i que z es divisible por 3^3. Dividiendo la igualdad

$$72^3 - 63^3 = 351^2 \text{ por } 3^6$$

queda

$$8^3 - 7^3 = 13^2,$$

es decir, el mismo ejemplo anterior.

Resúmen: Segun las deducciones esplicadas mas arriba, observamos que, dentro de los límites fijados para x e y, solo el *primero* i el *último* de los cuatro casos principales dan lugar a soluciones de la ecuacion propuesta, pero miéntras que el primer caso da por resultado una sola solucion, a saber $2^3 + 1^3 = 3^2$, el último dá infinitas soluciones determinadas por las fórmulas (16), (17) i (18).

EL TEOREMA DE FERMAT PARA EL CASO DE LAS SESTAS POTENCIAS.

El teorema de Fermat de que se trata, dice que *no* existen números enteros capaces de satisfacer a la ecuacion:

$$x^6 + y^6 = z^6 \tag{23}$$

Esta ecuacion está demostrada evidentemente, si demostramos que la ecuacion

$$\xi^6 + \eta^6 = \zeta^2 \tag{24}$$

no tiene solucion en números enteros.

Ahora bien, no es difícil relacionar la ecuacion (24) con la ecuacion considerada

$$x^3 + y^3 = z^2; \tag{25}$$

en efecto, basta hacer

$$x = \xi^2,\ y = \eta^2,\ z = \zeta$$

para obtener tal relacion.

Entónces para cumplir, a la vez, con las dos ecuaciones (24) i (25) sentamos, aprovechando las ecuaciones (16) i (17),

$$4n(n^3 - m^3) = \xi^2 \qquad (26)$$

$$m\{ m^3 + (2n)^3 \} = \eta^2 \qquad (27)$$

Basta aquí tratar solamente la ecuacion (26). Segun lo espuesto mas arriba, los números n i m pueden considerarse como primos entre sí, sin perjuicio para la aplicacion jeneral de la fórmula, puesto que, si n i m tienen un factor comun k, ξ^2 obtendrá el factor k^4 i, dividiendo por k^4, quedaria siempre una ecuacion de la forma (26).

Siendo, entónces, n i m números primos entre sí, es claro que n i $(n^3 - m^3)$ lo serán tambien. Resulta, por eso, que tanto n como $(n^3 - m^3)$ deben ser números cuadrados, o sea

$$n = \nu^2, \; n^3 - m^3 = \varsigma^2.$$

La última de estas ecuaciones tiene la misma forma que

$$x^3 + y^3 = z^2,$$

puesto que, como lo hemos visto en los ejemplos 4.° i 5.°, y puede ser tambien negativo. Luego, como m es número *impar*, n debe tener la forma

$$n = 4n'(n'^3 - m'^3) \qquad (28)$$

o bien, si introducimos aquí $n = \nu^2$, se debe tener

$$4n'(n'^3 - m'^3) = \nu^2 \qquad (29)$$

ecuacion que tiene la misma forma que la (26), pero en la que n' es menor que n, como se desprende de la ecuacion (28).

Aplicando, en seguida, a la ecuacion (29), el mismo razonamiento ántes aplicado a la ecuacion (26), resultará otra ecuacion de la misma forma, o sea

$$4n''(n''^3 - m''^3) = \nu'^2$$

en la que n'' es menor que n' i $\nu'^2 = n'$.

Continuando del mismo modo se llegaria a otros números menores i menores que sin embargo deberian cumplir con la ecuacion (26). Pero esto no es posible, porque no hai *infinitos* números enteros *positivos* ν'^2, ν''^2, ν'''^2 menores que un número finito $n=\nu^2$.

Queda, por lo tanto, demostrado que la ecuacion (24) no tiene lugar, ni tampoco la (23).

$$x^6+y^6=z^6.$$

Tomé, Enero 22 de 1897.

DR. AUGUSTO TAFELMACHER,
Profesor de Matemáticas del Instituto Pedagójico.