



SOBRE LOS MÉTODOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LOS LICEOS (1)

En el programa de estudios para los ramos de las matemáticas caractericé oportunamente los diferentes métodos de que el profesor puede valerse en la enseñanza.

El objeto de las siguientes páginas es desarrollar un poco mas las ideas espuestas, esplicándolas, ante todo, por medio de algunos ejemplos que pudieran servir de modelo al profesor para algunas lecciones. Tales ejemplos me parecen de gran importancia, puesto que una investigacion comparativa sobre el mayor o menor valor de un método, no puede tener éxito sino tomando por base definiciones i distinciones exactas, lo que puede hacerse mejor ilustrando los diferentes métodos por medio de ejemplos adecuados.

Téngase presente de antemano que los métodos de enseñanza que voi a analizar no son especialmente métodos matemáticos, sino que tambien tienen aplicacion a otros ramos. En las líneas que siguen daremos naturalmente solo ejemplos matemáticos.

(1) El presente trabajo es esencialmente una reproduccion de las ideas manifestadas por el señor Dr. Fr. Reidt en la primera parte de su obra titulada *Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen*.

Pasando ahora a considerar los métodos de enseñanza, notaremos por nada en cuenta la manera de enseñar empleada muchas veces en este país, según la cual el profesor se limita a designar en el texto las partes o páginas que los alumnos tienen que aprender de memoria para la clase siguiente, haciendo repetir de memoria en esta clase lo aprendido; pues este método ha sido ya materia de crítica más de una vez. Lo que queremos es explicar prácticamente por medio de ejemplos los tres grupos de métodos caracterizados en el mencionado programa, a saber, los métodos docente i heurístico, sintético i analítico, euclidianos i jenéticos.

§ I. MÉTODOS DOCENTE I HEURÍSTICO (I)

Para comparar estos dos métodos elejimos un ejemplo de una lección de geometría en el segundo año de humanidades, o sea el tratamiento del teorema: "Cada ángulo exterior de un triángulo equivale a la suma de los dos ángulos no adyacentes del triángulo."

a) *Método docente*.—Después de haber explicado lo que es un ángulo exterior de un triángulo, el profesor dibuja en la pizarra un triángulo ABC , o hace buscar a los alumnos en el texto la figura correspondiente al teorema. El mismo profesor enuncia en seguida el teorema, dice que la tesis es que

$$\angle CBD = \angle BAC + \angle ACB \text{ (fig. 1.ª),}$$

traza la línea auxiliar BE , paralela a AC , i explica de la misma manera toda la demostración. Luego hace repetir esta demostración a uno de los mejores alumnos, i después talvez también a uno de los demás, mas o menos en las palabras usadas por él, ayudando al alumno, en cuanto sea necesario, i señala, en fin, como tarea doméstica para la clase siguiente la repetición del teorema con su demostración. En esta clase se repiten una o más veces teorema i demostración, i se pasa en seguida al teorema siguiente.

(1) Método heurístico, del griego *heuriskein*=inventar, designa un método que hace inventar teoremas nuevos por los mismos alumnos.

b) *Método heurístico*.—El profesor traza en la pizarra un triángulo ABC , i propone en seguida a los alumnos, pasando de uno a otro sin orden alguno, mas o ménos los siguientes problemas i preguntas, a los que debe contestarse correctamente: ¿Cuántos ángulos tiene un triángulo?—Indique uno de los ángulos del triángulo ABC .—Otro, el tercero.—El profesor dibuja despues un ángulo exterior CBD , dando la definicion de tal ángulo.—¿Quién puede dibujar otro ángulo exterior?—Un alumno tras otro pasa a la pizarra para ejecutar la operacion en diferentes vértices.—¿Cuántos ángulos exteriores pueden trazarse en un solo vértice de un triángulo? ¿Cuántos ángulos exteriores pueden trazarse en todo? ¿A qué clase de ángulos pertenecen dos ángulos exteriores dibujados en el mismo vértice? ¿Qué sabemos sobre tales ángulos con respecto a sus magnitudes? ¿Cuántos ángulos exteriores diferentes en magnitud podrá tener, por lo tanto, un triángulo? ¿Por qué se cuenta en cada vértice solo *un* ángulo exterior? ¿Cuántos ángulos exteriores tiene, por consiguiente, un triángulo?

El profesor borra despues las partes de la figura que no necesita, o traza otra figura en la que aparece solamente el triángulo ABC con el ángulo exterior CBD , i designa, para abreviar, los ángulos del triángulo en A, B, C , respectivamente por α, β, γ i el ángulo exterior CBD por δ .—¿Tienen los tres ángulos interiores del triángulo todos la misma posicion con respecto al ángulo exterior δ ? ¿Cuál de los ángulos interiores es adyacente al ángulo δ i cuáles nó? ¿Qué teorema conocemos sobre ángulos adyacentes?

Comparemos ahora tambien la magnitud del ángulo exterior con las de los interiores no adyacentes. Considerando AC i BC como dos rectas no paralelas, cortadas por una tercera AD , ¿qué nombre tienen los ángulos α i δ ? ¿Puede ser $\alpha = \delta$? Considerando igualmente AC i AD como dos rectas no paralelas, cortadas por una tercera BC ¿en qué relacion están γ i δ ? ¿Puede ser $\gamma = \delta$? ¿Cuáles son los teoremas anteriores que enuncian la igualdad de dos ángulos?—Los alumnos recordarán aquí los teoremas sobre ángulos iguales respecto de dos líneas paralelas cortadas por una trasversal.—Para comparar δ con α ¿de qué modo podemos entónces trazar una línea auxiliar?—El profe-

sor designa las partes en que queda dividido el ángulo δ por la recta BE , por δ' i δ'' .—Siendo BE paralela a AC , debe haber en la figura un ángulo igual a δ' ; ¿qué ángulo será? ¿Qué nombre tienen α i δ' ? ¿Cuáles son las paralelas, cuál es la transversal?—El profesor designa los ángulos iguales α i δ' por medio de un arco.—¿Hai tambien en la figura un ángulo igual a δ'' ? ¿Cuáles es?—El profesor designa estos ángulos por medio de dos arcos (véase la figura).—¿Por qué razon son los ángulos δ'' i γ iguales? ¿Qué líneas son las paralelas i cuál es ahora la transversal?—Ahora bien, siendo $\delta' = \alpha$, $\delta'' = \gamma$ ¿qué valor tiene $\delta' + \delta''$? ¿A qué equivale, por lo tanto, el ángulo exterior δ ? ¿Qué teorema hemos encontrado?

A continuacion se repite la demostracion en la forma sintética, aprovechando primero la misma figura i despues tambien otro ángulo exterior del mismo triángulo, u otra figura nueva de otra posicion i forma. Esta repeticion puede hacerse del modo siguiente (fig. 2.^a):

El profesor traza la prolongacion CF de AC , i pregunta: ¿qué es lo que se quiere demostrar? ¿Qué línea auxiliar se traza para la demostracion? ¿Cuáles son los ángulos iguales en este caso? ¿Por qué?—Para no interrumpir la série de ideas, no se hace mencionar aquí las paralelas ni la transversal.—¿Qué consecuencia se deduce de esto?—Repetid ahora toda la demostracion.—Uno de los alumnos esplica toda la demostracion.—En cuanto le parezca necesario cerciorarse de la atencion de los demas alumnos, el profesor interrumpirá al alumno, dirijiendo alguna pregunta a otro. En la clase siguiente, el profesor hace repetir una o mas veces la demostracion de un modo análogo hasta que, en cuanto sea posible, todos los alumnos sean capaces de dar cuenta de toda la demostracion.

Si comparamos ahora los dos métodos espuestos, es indudable, desde luego, que el método docente es el que conduce mas lijero al fin de la demostracion. Es éste el método de que se valen jeneralmente los profesores de la enseñanza superior i que se sigue en las obras científicas, i por estas razones es por que el profesor mismo lo conoce. Ademas, el método docente es mas cómodo para el profesor i requiere menores esfuerzos de su parte.

Así, pues, los profesores, sobre todo los que principian a enseñar, se inclinarán a valerse en la enseñanza secundaria del método docente, i hasta aquellos que conozcan el método heurístico i lo reconozcan como superior al docente, se verán a menudo impulsados a emplear involuntariamente el método docente. Dudoso es, si una enseñanza docente da la materia en una forma mas científica que la heurística; pero tambien, si se pudiera contestar afirmativamente a esta pregunta, sería sin duda la otra de no menor importancia, si los alumnos llegan por medio del método docente a entender con perfeccion todo lo tratado.

Un profesor que sigue el método docente en su enseñanza, por lo jeneral se impondrá, despues de algun tiempo, dado el éxito insuficiente que alcanza, de que los alumnos no han entendido todo lo que él les ha explicado, pues su método no corresponde a las reglas pedagógicas jenerales que hai que tomar en consideracion cuando se trata de enseñar a niños cuya inteligencia no está bastante desarrollada. Como, aplicando el método docente, los alumnos no pueden desplegar ninguna actividad propia, porque casi todo lo absorbe el profesor, no hai seguridad de que ellos lo hayan comprendido suficientemente. Aun cuando el profesor, mediante frecuentes preguntas, trata de imponerse del grado como los alumnos se han posesionado de la materia, esto no excluye que ellos repitan de memoria lo que acaban de oir o lo que han aprendido en casa. Pero, aunque el alumno siguiera las esplicaciones del profesor con atencion intensiva i continuada, i aunque fuera la esposicion misma de las mas claras i comprensibles, sin embargo, cualquiera inteligencia falsa de una premisa podria imposibilitar el entendimiento de toda la deduccion siguiente.

Supérfluo nos pareceria demostrar que el método heurístico, cuyo nombre ya indica su objeto, incita la actividad propia del alumno. Es un modo mui distinto i mucho mas perfecto que el método docente, i que le obliga a prestar atencion a todo el desarrollo, despertando al mismo tiempo su interes. Es ademas claro que el método heurístico da la mayor garantía para que los alumnos entiendan lo enseñado i lo conserven en la memoria. ¿Qué ventaja tiene si el profesor, siguiendo el método docente, llega a terminar en poco tiempo una materia bastante

vasta, si al fin i al cabo los alumnos no han entendido nada de la materia o la han entendido imperfectamente? El profesor que tenga en mucho el aprovechamiento de sus alumnos, observando los malos resultados de su enseñanza, empezará entónces de nuevo a enseñar segun el mismo método i con el mismo mal éxito, hasta que, en fin, desespere por completo del resultado final, cuando los alumnos mismos hayan perdido ya su interes i no presten atencion sino aparentemente. Claro está que la cuestion se agrava mas todavía en el caso que el profesor no trate de convencerse, de vez en cuando, por medio de repeticiones, de lo que han comprendido i conservado los alumnos, sino que siga enseñando segun el método docente, en la creencia de que los alumnos hayan aprendido todo lo que él les habia enseñado.

Puede ser que las preguntas hechas en el ejemplo mas arriba explicado, parezcan a un profesor de no mucha esperiencia, en su mayor parte supérfluas i, por eso, perniciosas, puesto que supone el conocimiento de las contestaciones. Aun mas, tal profesor hasta temerá que semejantes preguntas no sirvan para despertar el interes del alumno, sino para hacerlo desaparecer por falta de un progreso rápido en la enseñanza. Pero, tratando el mismo profesor de enseñar segun el modelo indicado mas arriba, verá que, léjos de matar el interes, por el contrario lo despertará de tal manera que los alumnos tomen parte con gusto en la discusion, contentos de saber i de poder hacer algo. Tambien observará el profesor que habrá algunos alumnos que no pueden, desde luego, contestar debidamente a las preguntas mas sencillas, i tendrá entónces que ocuparse mas intensivamente con ellos. Este método de enseñanza pondrá en evidencia al profesor que tambien los alumnos mas atrasados, poco a poco empiezan a entender i aprenden, merced a la actividad propia que tienen que ejercitar constantemente, a ejecutar, despues de un tiempo no mui largo, desarrollos sencillos sin su ayuda prévia.

§ 2. MÉTODOS SINTÉTICO I ANALÍTICO

En tanto que los métodos considerados en el primer párrafo se refieren a la enseñanza misma, los con que encabezamos este

párrafo se relacionan con la demostración de teoremas o la resolución de problemas.

Como ejemplo elegimos aquí una lección de estereometría en el sexto año, o sea el tratamiento del teorema: "Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas entre sí."

Suponemos como tratados anteriormente los teoremas siguientes: una recta perpendicular a otras dos situadas en un mismo plano, es perpendicular a cualquiera tercera recta del plano que pasa por el pie de la primera. Dicha recta que, según el teorema anterior, es perpendicular a cualquiera recta que pase por su pie en el plano, se llama perpendicular al plano. Viceversa: todas las rectas perpendiculares en un mismo punto a una sola i misma recta, se encuentran en un mismo plano. En un punto de un plano se puede levantar una sola perpendicular al plano. Desde un punto fuera de un plano se puede bajar una sola perpendicular al plano. Esta perpendicular es la línea mas corta de todas las que se pueden trazar desde el punto al plano. La longitud de esta recta se llama la distancia del punto al plano.

Pasemos ahora al tratamiento del teorema propuesto, según los dos métodos:

a). *Método sintético*.—El profesor enuncia el teorema en cuestión o lo hace leer en el texto. En seguida lo explica trazando la figura correspondiente (fig. 3.^a) en la pizarra i hace indicar a los alumnos la hipótesis: AB perpendicular a MN , CD perpendicular a MN ; i la tesis: AB paralela a CD . Luego continúa, mas o menos, del modo siguiente: Para la demostración unimos B con D i levantamos BE en el plano MN , perpendicular a BD . Luego determinamos los puntos C i D de modo que CD i EB reciban longitudes arbitrarias, pero entre sí iguales.—Para no entorpecer el entendimiento de la figura, designamos los extremos de las longitudes iguales por las mismas letras C i E .—Si unimos en seguida E con D i C con B , los triángulos BCD i DEB son congruentes (iguales en área i forma). Esta proposición i su demostración las indicarán los mismos alumnos, para seguir el método heurístico, i deducirán después, también contestando a las preguntas del profesor, que $BC = DE$. El profesor hace trazar después la recta EC , hace

demostrar la congruencia de los triángulos CBE i EDC i desprender de ésta que $\angle EDC = \angle CDE = R$; en seguida mostrará que la recta BE es perpendicular, a la vez, a las tres rectas BA , BD , BC , o hará que lo encuentren los mismos alumnos i que deduzcan que estas tres rectas i, por lo tanto, tambien CD i AB , están situadas en un mismo plano, i que por ser perpendiculares a la misma recta BD , tienen que ser paralelas, que es lo que se quería demostrar.

En fin, el profesor hará repetir la demostracion una o mas veces a un alumno tras otro, o hará tambien que todos tomen parte en la demostracion.

b). *Método analítico.*—La imposibilidad de poder trazar desde un punto fuera de un plano dos perpendiculares al mismo nos lleva, en primer lugar, a averiguar la colocacion que deberian tener dos rectas perpendiculares a un plano en dos puntos diferentes. Segun lo dicho anteriormente, se sabe ya que las rectas no pueden cortarse; ¿puede deducirse de esto, como en el caso análogo de la planimetría, que las rectas tienen que ser paralelas? ¿Qué otra posibilidad queda todavía en el espacio? ¿Qué hai que demostrar para eliminar el caso en que se cruzan las rectas sin encontrarse i para demostrar, por consiguiente, que deben de ser paralelas? Habrá que demostrar que las dos rectas de que se trata tienen que encontrarse en un mismo plano.

Repasando los teoremas anteriores, que espresan un criterio sobre qué rectas se encuentran en un mismo plano, queda solo por considerar el teorema indicado: "Todas las rectas perpendiculares en un mismo punto a una sola i misma recta, se encuentran en un mismo plano." Como ahora las rectas AB i CD son perpendiculares al plano MN , hai que demostrar que, si se dibuja el plano $CD B$ determinado por una de las perpendiculares (CD) i el pié de la otra (B), la recta AB junta con otras dos rectas del plano ausiliar $CD B$, es perpendicular a una cuarta recta. Como una de dichas rectas se nos ofrece evidentemente la recta BD que une los piés de las dos perpendiculares; como la otra podemos aprovechar una recta que una B con cualquier punto (C) de CD . La cuarta recta, para que sea a la vez perpendicular a AB i a BD , hai que

trazarla en el plano MN perpendicularmente a BD ; tomemos la recta BE . Réstanos demostrar ahora que BE es perpendicular a BC o que el ángulo $EB C$ es ángulo recto.

Para este fin formamos un triángulo CBE i tratamos de demostrar la congruencia de este triángulo con otro rectángulo. Se nos ofrece aquí el triángulo CDE , en el cual el ángulo CDE es recto i ademas tiene la CE comun con el triángulo CBE . Como la longitud de la recta BE todavía queda sin determinar, podemos elejirla como igual a la de DC . De tal modo los triángulos CBE i CDE tienen dos lados respectivamente iguales; i para completar los tres datos necesarios para la congruencia, conviene fijarse en los lados CB i ED , que son lados homólogos de los triángulos CBD i EDB , cuya congruencia se deduce fácilmente de la igualdad de dos lados ($CD=EB$, $BD=DB$) i del ángulo comprendido $\angle CDB = \angle EDB = R$). Segun lo espuesto, se puede formar el teorema: "Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas."

El profesor hace indicar en seguida a los alumnos la demostracion del teorema en la forma sintética como la hemos explicado mas arriba i como la da tambien el texto para la repetición en casa. Esta demostracion la ejecutarán los alumnos mismos, a lo ménos los mas adelantados, sin ayuda del profesor, mientras que se entiende que se hace el desarrollo de la demostracion en la forma de contiúuas preguntas i contestaciones, las cuales no hemos querido indicar aquí para abreviar. El punto cardinal de la enseñanza del profesor dentro del método analítico, está en la destreza con que dirige las preguntas a los alumnos para desarrollar la demostracion.

Si comparamos ahora los dos métodos, el primero parece tener la ventaja de ser mas corto; teorema i demostracion se dan a los alumnos en una forma estrecha i precisa, sin que ellos necesiten esforzarse demasiado. Por el contrario, el segundo método parece adolecer de minucioso i prolijo. En adelante veremos que esta apariencia desaparecerá considerando mas detenidamente los dos métodos.

No se puede negar que el método sintético hace enjendrar las figuras de un modo artificial. En el ejemplo espuesto mas arriba, los alumnos no entienden por qué se traza la recta BE , por qué

se hace $B E = D C$ etc., pues el por qué queda siempre sin explicacion. Los alumnos creerán talvez que algun jeómetra haya encontrado las líneas ausiliares por casualidad; nunca llegarán a darse cuenta de la razon por la cual se han trazado dichas líneas i, por lo tanto, tienen que aprender aquella línea ausiliar como su longitud para poder conservarlo en la memoria. Pero los alumnos no alcanzarán a retener tantas operaciones distintas en cada teorema, i por no ser capaces tampoco de reproducir la demostracion por sí propios, no hai otro remedio sino repasar frecuentemente lo aprendido en la clase, lo que fastidiará lo mismo al profesor que al alumno, i hace, en realidad, ilusoria la ventaja de ser mas corto el primer método que el segundo.

Todo lo contrario sucede con el método analítico. Éste se funda, como ya lo hemos visto, en que se hace preceder a la demostracion sintética un desarrollo al cual se ha dado el nombre de «análisis de la demostracion.» Efectivamente, se puede comparar el desarrollo analítico de la demostracion de un teorema con el análisis de un problema, sobre todo de construccion. Con este método la demostracion no aparece como una cosa estraña hecha por otro, sino que el alumno mismo ve desarrollarse la demostracion con su propia ayuda. No se traza ninguna línea ausiliar sin que el alumno sepa para qué fin ha de servir i de qué combinaciones de ideas proviene. El alumno, viendo cómo se desarrolla lójicamente toda la demostracion, no aprende tan solo la demostracion, sino tambien el arte de demostrar; i si ha ejercitado este arte no solo en uno sino en numerosos casos, se encontrará capaz de repetir una demostracion o de reconstruirla segun sus propias ideas i hasta de volver a reconstruirla despues de algun tiempo. Es claro que tampoco con este método se puede prescindir de una repeticion de lo aprendido; pero ésta no necesita ser tan frecuente ni tan detallada como en el otro caso.

Este último punto de vista es de gran importancia, puesto que las diferentes partes del sistema matemático están tan característicamente ligadas entre sí, que parece indispensable conservar la mayor parte de los conocimientos adquiridos en los años inferiores i medios hasta el fin de la enseñanza matemáti-

ca. Este hecho impone al profesor como deber el de cuidar que los alumnos adquieran un saber seguro i duradero.

Dijimos mas arriba que por el método analítico el alumno aprende el arte de demostrar, i precisamente viene a ser esto una razon mas para comprobar que el método sintético no tiene la ventaja de ser mas corto que el otro. En verdad, cada progreso en el arte mencionado, como lo indicamos tambien en el programa, facilita i abrevia los pasos siguientes. El trabajo que necesitan los alumnos para aprender segun el otro método, lo vencen aquí sin ayuda del profesor, casi sin esfuerzo, i el mayor interes que los alumnos obtienen por su actividad propia junto con la del profesor, la conviccion de una intelijencia mas clara, la confianza aumentada en la fuerza propia que se desarrolla principalmente en este método, todo esto tiene por consecuencia un adelanto rápido.

En fin, *last not least*, se atiende, ante todo, a la resolucion de la cuestion: ¿cuál es el método mas adecuado para alcanzar los objetos de la enseñanza matemática en los establecimientos de instruccion secundaria? Sobre todo ¿cuál es el que coadyuva mas al cultivo del entendimiento lójico, a la destreza en formar juicios i conclusiones propias i al arte de saber trabajar científicamente? No cabe duda que el método analítico tambien en este respecto lleva la ventaja sobre el otro método.

Antes de terminar con los dos métodos, no dejaremos de mencionar que éstos son completamente independientes de los dos tratados en el párrafo primero. Segun lo espuesto, se entiende que el método sintético se relaciona mas con el docente i el método analítico mas con el heurístico; sin embargo, es permitido aplicar el procedimiento docente a desarrollos analíticos i el heurístico a sintéticos. La última combinacion se ha empleado mas arriba en la explicacion del método sintético con respecto a un teorema estereométrico, haciendo que los mismos alumnos encuentren las razones para las proposiciones establecidas sintéticamente, i las consecuencias que de ellas se pueden deducir.

Así mismo, es claro que no se necesita, una vez que se haya empleado cualquiera de las cuatro combinaciones posibles, atenderse estrictamente a ella; ántes puede suponerse que muchos

profesores, segun el objeto de enseñanza de que se trata, las mezclen i las apliquen sucesivamente hasta en la misma demostracion.

§ 3. MÉTODOS EUCLIDIANO (DOG MÁTICO) I JENÉTICO

Estos dos métodos se refieren al desarrollo sucesivo de las verdades matemáticas i al enlace de las mismas entre sí. Sabido es que en el sistema de Euclides, que ha sido el primero en ordenar la materia matemática, los teoremas se siguen unos a otros sin una verdadera conexión interior. La única norma que sigue el sistema euclidiano es la de cuidar que no aparezca ningun teorema ántes de conocerse los demas necesarios para su demostracion. Es claro que cualquier sistema debe seguir tal norma; pero no basta con esto, sino que debe tenerse mui presente un desarrollo jenético de la materia, es decir, un desarrollo que tome en cuenta el contenido de los teoremas, de modo que haga aparecer juntos los teoremas análogos i que considere mas tarde teoremas que son, tambien segun su contenido material, consecuencias o amplificaciones de otros. La sucesión de las varias partes del sistema debe resultar como consecuencia natural de su objeto, i cada investigacion debe hacer ver que necesita la siguiente como su complemento necesario para llevar a cabo el asunto de que se trata.

Haí que advertir todavía, lo que tambien es sabido, que los diferentes teoremas pueden demostrarse i que los diferentes problemas pueden resolverse de diferentes modos segun la sucesión de las proposiciones que se haya elegido para el sistema. Por eso puede formarse un sistema matemático de mui distintos modos, aprovechando una u otra sucesión de las proposiciones, si se quiere solamente conservar el principio de Euclides.

Es una consecuencia del método euclidiano, en contraposición al método jenético, la de que el alumno tiene que aprender de memoria sucesivamente, no solo los diferentes teoremas o problemas con sus demostraciones, sino tambien la sucesión en que aparecen en el sistema. Si no sucede esto o si la memoria

abandona al alumno, no serán pocos los casos en que él crea poder demostrar un teorema por otro que, en el sistema euclidiano, ha sido demostrado por medio del primero. Estos inconvenientes pueden evitarse, si el alumno se acostumbra a explicarse la conexión jenética entre los teoremas i a deducir una proposición de otra. Para ilustrar lo que acabamos de exponer, mediante un ejemplo, elejimos los teoremas sobre la posición de las cuerdas de un círculo con respecto al centro. No correspondería a las exigencias del método jenético, si se hicieran suceder aquellos teoremas inmediatamente a los correspondientes del triángulo isósceles, aunque son aplicaciones de éstos; mas conveniente será considerar sin interrupción todas las cuestiones que se refieren a la posición relativa de un círculo i una recta. Siguiendo el primer camino seria necesario, para formarse idea acerca de las relaciones que hai entre la posición de un círculo i una recta, buscar los teoremas mencionados junto con los triángulos isósceles, los que espresan la relacion entre longitud de una cuerda i su distancia al centro, talvez junto con los teoremas sobre triángulos congruentes, en fin, los teoremas sobre tangentes a un círculo en otra parte del sistema.

En el ejemplo estereométrico explicado mas arriba, hemos indicado oportunamente de qué modo puede enlazarse el teorema en cuestion con los inmediatamente anteriores; de modo que aparezca como la verificación de una proposición que se necesitaba hacer para completar el asunto de que se trata. Habiendo considerado las relaciones entre una recta i un plano cortado por ella i deducido de éstas la distinción entre rectas perpendiculares i oblícuas, deberia pasarse primero a la consideración de una sola perpendicular sobre un plano. El resultado obtenido nos conducia lójicamente a preguntar por las posiciones entre dos i mas perpendiculares al mismo plano, i el resultado nuevo que tales rectas no pueden pasar por un mismo punto, nos conducia a dos perpendiculares levantadas en dos puntos diferentes sobre un mismo plano, es decir, al teorema explicado.

De tal modo, no se alcanza solamente que el alumno conserve mejor en la memoria lo aprendido mediante un guion que

une las varias partes de un sistema, como lo mencionábamos mas arriba, sino que ademas reciba por el método jenético la mejor direccion posible para pensar científicamente. En este sentido podemos considerar como fin del método jenético la solucion del problema de «encontrar las leyes que existen en las particularidades de los elementos del espacio como de los números i tomar éstas como norma en el agrupamiento de los teoremas.» Esto es lo que se echa de ménos en el sistema euclidiano, i esto es lo que ha inducido a pedir un desarrollo jenético de las verdades matemáticas.

El método jenético no debe mostrarse solamente en la sucesion de las diferentes partes del sistema, en el enlace de los teoremas i problemas ni en el desarrollo de las nociones, sino tambien en la manera de hacer las demostraciones. Séame permitido demostrar con un ejemplo sencillo cómo los principios del método jenético deben intervenir hasta en los pormenores de la manera de demostrar i lo que se consigue con esto aun con respecto al éxito de la enseñanza.

El teorema de que los ángulos opuestos de un paralelógramo son entre sí iguales, se encuentra jeneralmente demostrado en los textos por medio de la congruencia de los triángulos enjendrados por una de las diagonales. Esta demostracion da lugar a la opinion de que la congruencia de dichos triángulos es indispensable para la deduccion de la igualdad de los ángulos opuestos, miéntras que esta igualdad está fundada simplemente en la naturaleza del paralelógramo, es decir, en el paralelismo de sus lados opuestos o, con otros términos, en el carácter de los ángulos. Se demuestra, por eso, la igualdad de los ángulos en cuestion, demostrando que ellos forman la misma suma con un mismo tercer ángulo del paralelógramo. El modo de aprovechar los triángulos congruentes enjendrados por una diagonal, parece tener la ventaja de dar al mismo tiempo la demostracion de la igualdad de los lados opuestos; pero esta ventaja, si fuera verdadera, no justificaria nunca la falta de lógica que se comete. Ademas, la ventaja obtenida es solo aparente, puesto que respecto de la recíproca del teorema sobre los ángulos (si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son iguales de dos en dos, el cuadrilátero es un paralelógramo), hai que recurrir

siempre a los ángulos, i la congruencia de los triángulos mencionados no sirve para nada. De tal modo, la demostracion de esta recíproca parece tener un carácter diferente de todas las demostraciones del mismo capítulo, i la uniformidad del tratamiento se pierde. El método jenético evita estos inconvenientes. La definicion del paralelógramo conduce lógicamente, en primer lugar, a la investigacion de las calidades de sus ángulos, investigacion que, siendo la definicion independiente de la longitud de los lados, no se vale de ninguna diagonal. Solo, en segundo lugar, se pregunta por las relaciones que hai entre las longitudes de los lados, i solo entónces se necesita una diagonal para la demostracion de los teoremas correspondientes. Es indudable que tal camino se graba con facilidad en el entendimiento i en la memoria de los alumnos, quienes ya no necesitan fijarse en un modo de demostrar que únicamente sirve para la recíproca mencionada.

Los seis métodos considerados ofrecen, entre todas sus combinaciones posibles, dos que sobresalen sobre las demas por la correspondencia entre sus partes, a saber, las combinaciones de los métodos docente sintético-euclidiano i heurístico-analítico-jenético. Segun las esposiciones que acabamos de dar, parece evidente que la última combinacion es la que trata de alcanzar la metodología de la enseñanza matemática.

§ 4. OTRAS OBSERVACIONES SOBRE LOS MÉTODOS CARACTERIZADOS

Si, como resultado de las investigaciones precedentes, hemos encontrado la regla de que la forma de la enseñanza ha de ser heurística, el tratamiento de la materia analítico i el desarrollo del sistema jenético, esto no quiere indicar una norma inviolable, sino solamente una instruccion que hai que tomar en cuenta, en cuanto sea posible; pues hemos visto que tambien los demas métodos ofrecen ciertas ventajas que en ciertas circunstancias ganan en valor i autorizan su aplicacion en casos excepcionales. Puede suceder que un profesor haya tenido que tropezar con dificultades inesperadas en cierto curso, dificultades

que han limitado el tiempo que queda en el año escolar; si despues quiere, sin embargo, terminar la materia propuesta, puede emplear, en tal caso, el método docente i considerar sintéticamente algunas partes de la materia. Esto se refiere a los años superiores, cuyos alumnos ya deben estar bastante adelantados. Para los alumnos del sexto año, sobre todo para los que piensan continuar sus estudios en la Universidad o en otros establecimientos de enseñanza superior, se puede apelar a tal procedimiento sin perjuicio, puesto que se acostumbra de este modo a los alumnos a seguir con atencion una esplicacion larga, como la tendrán que presenciar ordinariamente en los establecimientos mencionados. Además, puede establecerse como regla que, mientras mas adelantan los alumnos en sus estudios, mas actividad mental hai que exigirles, de modo que ya no sea necesario preguntarle al alumno del cuarto año por cada punto para conservar vivo su interes. Lo que puede hacer él mismo ¡que lo haga! Las preguntas tienen solo por objeto, en este caso, darle un impulso al alumno para que se ponga a trabajar i cerciorarse de que él ha hecho este trabajo.

Así mismo es claro que un profesor acostumbrado a hacer la enseñanza segun el método docente-sintético, necesitará trabajo para apropiarse del método heurístico-analítico; pero este trabajo no parece insuperable, i a pesar de las observaciones que acabamos de hacer, deberá cada profesor adiestrarse en la aplicacion de los métodos preferidos.

Para reducir a ejemplo que el procedimiento recomendado como regla se puede ejecutar tambien en otras partes de la enseñanza matemática, consideraremos todavía una leccion de trigonometría en el quinto año de humanidades.

Sea, por ejemplo, la resolucion del problema siguiente: "espresar las funciones trigonométricas de la suma o diferencia de dos ángulos por la de los ángulos mismos".

Para dibujar la suma de dos ángulos α , β , se aplica al lado del ángulo $BAC = \alpha$ el otro $CAD = \beta$ (fig. 4.^a). Como se ha dado la definicion de las funciones trigonométricas por medio de un triángulo rectángulo, se debe procurar establecer esta figura. Ahora bien, si se quiere encontrar el seno de la suma $\alpha + \beta$, o sea del ángulo DAB , se puede bajar desde cualquier punto

D de uno de sus lados, la perpendicular DE al otro. Entonces será

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{DE}{AD}$$

Pero nada nos impide elegir la longitud de AD como unidad, de suerte que tendremos

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = DE$$

El problema se reduce ahora a este otro: expresar DE por las funciones de los ángulos α i β . Para este fin necesitamos colocar α como β en triángulos rectángulos. Desde luego, se nos ofrece para el ángulo β la hipotenusa cómoda $AD = 1$. Si, por lo tanto, bajamos desde D la DF , perpendicular a AC , tenemos un triángulo rectángulo ADF , que contiene a β . Continuando por el mismo punto F , conviene bajar desde este punto la perpendicular FG a AB , para establecer un triángulo rectángulo AFG , que contiene a α . Para relacionar, en seguida, DE con este triángulo, se puede trazar DH , paralela a AB , hasta encontrar la prolongada GF (1). De tal modo resulta $ED = GH = GF + FH$.

La primera de estas rectas, GF , está contenida en el triángulo rectángulo AGF como cateto opuesto al ángulo α ; se tiene, por consiguiente,

$$GF = AF \operatorname{sen} \alpha$$

AF es el cateto adyacente al ángulo β en el triángulo rectángulo ADF , en el cual la hipotenusa AD es $= 1$. De aquí $AF = \cos \beta$ i, en fin,

$$GF = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

La segunda de las rectas, FH , cuyo valor se necesita expresar todavía, forma parte del triángulo rectángulo DFH , en el

(1) Podría trazarse también por F la paralela FH a AB hasta encontrar a DE ; pero de este modo no resulta la fórmula en el debido orden.

cual el ángulo $D F H$ es $= \alpha$.—Si para la demostracion de esta igualdad ($\angle D F H = \alpha$) no se quiere recurrir a un teorema de planimetría sobre ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, puede demostrársela aprovechando el ángulo $A F G$, que es el complemento tanto de $D F H$, por ser $\angle A F D = R$, como de α , por ser el triángulo $A F G$ rectángulo.

Siempre resulta

$$F H = D F \cos \alpha$$

i siendo $D F$ cateto opuesto al ángulo β en el triángulo rectángulo $A F D$, cuya hipotenusa es $= 1$, se tiene $D F = \text{sen } \beta$ i

$$F H = \cos \alpha \text{ sen } \beta$$

De lo dicho se desprende la fórmula

$$\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta$$

La misma figura 4.^a puede servir para el desarrollo de $\cos (\alpha + \beta)$, i éste lo encontrará la mayor parte de los alumnos ya casi sin ayuda del profesor. Aquí vamos a dar este desarrollo en la forma de preguntas dirigidas por el profesor, para hacer ver cómo puede operarse en la clase misma.

¿En qué triángulo necesitamos buscar $\cos (\alpha + \beta)$? ¿Qué lado será igual a $\cos (\alpha + \beta)$? siendo la hipotenusa $A D = 1$? ¿Podemos espresar a $A D$ por otros trazos, en forma de suma o diferencia? ¿En qué triángulo está situada $A G$ i con cuál de los ángulos α i β se relaciona? ¿Qué posición tiene $A G$ respecto de este ángulo α i por qué funcion de α podemos representar a $A G$? ¿Qué razon es igual a $\cos \alpha$? ¿Qué resulta por eso para $A G$? ¿En qué triángulo se encuentra ahora $A F$? ¿Por qué ángulo podemos espresar a $A F$? ¿Por qué funcion de este ángulo? ¿Qué resulta, por consiguiente, para $A F$ i qué para $A G$?

Para espresar a $E G$, podemos reemplazarla por otra recta: ¿por cuál? ¿En qué triángulo está situada $D H$? ¿Por medio de qué ángulo es posible espresar a $D H$? ¿Qué posición tiene $D H$ con respecto a este ángulo? ¿De qué funcion tendremos que valer-

nos? ¿A qué equivale $\text{sen } DFH$? ¿Qué resulta por eso para DH ? ¿Mediante qué triángulo habrá que espresar a DF ? ¿Por qué ángulo? ¿Por qué funcion de este ángulo? ¿Qué encontramos para DF ? ¿Qué para DH ? ¿Qué, en fin, para $\cos(\alpha + \beta)$? Compárense la fórmula encontrada con la fórmula para $\text{sen}(\alpha + \beta)$. ¿En qué consisten las diferencias exteriores de las dos fórmulas?

La estension completa de estas preguntas no es, sin duda, necesaria sino para con alumnos atrasados; los demas encontrarán de por sí algunas partes intermedias del desarrollo.

Pasando en seguida al desarrollo del seno i coseno de una diferencia $\alpha - \beta$, el cual puede darse casi con las mismas palabras que el anterior, el profesor exigirá hasta a los alumnos mas atrasados que salten preguntas intermedias, como las siguientes: ¿en qué triángulo está la recta por espresar? ¿por qué ángulo puede espresársele? ¿por qué funcion de este ángulo? etc., haciendo indicar solamente los resultados finales para cada trazo en cuestion. Alumnos mas inteligentes darán regularmente todo el desarrollo segun lo anteriormente explicado, i necesitarán, a lo sumo, una ayuda para establecer la figura. Todos encontrarán que, en este caso, se debe aplicar el ángulo $CAD = \beta$ hácia el interior del ángulo $CAB = \alpha$, i tambien que se puede hacer otra vez $AD = 1$ i trazar DE perpendicularmente a AB , DF a AC i AG a AB (fig. 5.^a). Pero ahora convendría que el profesor impidiera que los alumnos, talvez para armonizar la figura con la anterior, trazaran la paralela a GF por F en lugar de trazarla por D . Es verdad que se podría aprovechar tambien una paralela trazada por F a AB , pero de tal modo no se alcanzaria a conservar la analogía completa verbal de los dos desarrollos.

Antes de pasar al desarrollo de las tangentes i cotangentes de $(\alpha + \beta)$ i de $(\alpha - \beta)$, conviene llamar la atencion de los alumnos hácia lo siguiente: que en las figuras 4.^a i 5.^a se ha tomado como suposicion tácita los ángulos α , β , $\alpha + \beta$ como ángulos agudos. Queda por averiguar todavía si las fórmulas valen jeneralmente. Esta averiguacion se convierte, por medio de las figuras adecuadas a los demas casos, en una mera repeticion de lo anteriormente dicho, puesto que los desarrollos se conservan—*mutatis mutandis*—casi verbalmente. Resulta de aquí que las

fórmulas tienen valor jeneral. Siendo mui fastidioso i prolijo tal procedimiento de repetir todas las construcciones i frases para cada caso posible, bastará hacer demostrar, i esto solo en uno o dos casos, las fórmulas como tarea doméstica i aprovechar para comprobar la validez jeneral en los demas casos las fórmulas ya demostradas:

$$\text{sen } (180^\circ - a) = \text{sen } a, \cos (180^\circ - a) = -\cos a \text{ etc.}$$

Sea, por ejemplo, a un ángulo obtuso, β un ángulo agudo.

Para averiguar $\cos (a + \beta)$ se sustituye $180^\circ - a'$ en lugar de a . Con esta sustitucion i aprovechando las fórmulas mencionadas, se deducen sucesivamente las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \cos (a + \beta) &= \cos (180^\circ - a + \beta) = -\cos (a' - \beta) = \\ &= -\cos a' \cos \beta - \text{sen } a' \text{sen } \beta = \\ &= -\cos (180^\circ - a) \cos \beta - \text{sen } (180^\circ - a) \text{sen } \beta \\ &= \cos a \cos \beta - \text{sen } a \text{sen } \beta. \end{aligned}$$

Las fórmulas para $\text{sen } (180^\circ - a)$ etc. no sirven para el caso en que a i β sean agudos, mientras $(a + \beta)$ es obtuso o recto; de suerte que siempre será indispensable hacer desarrollar para este caso las fórmulas respectivas mediante una figura especial.

El inconveniente de tener que demostrar la validez jeneral de una fórmula deducida de una figura especial i sus consecuencias mas arriba indicadas, se evitan empleando en lugar del desarrollo jeométrico otro analítico. Esto nos conduce a la aplicacion del procedimiento analítico respecto de los desarrollos de las funciones tanjente i cotanjente no esplicados todavía.

Aprovechando $\text{tg } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}$, $\text{cotg } a = \frac{\cos a}{\text{sen } a}$ (1) etc. i las fór-

mulas desarrolladas para $\text{sen } (a \pm \beta)$, $\cos (a \pm \beta)$, resultan otras tantas fórmulas para tanjente i cotanjente que tienen valor jeneral.

(1) Aunque se escribe segun la ortografia chilena con j , la palabra *tanjente*, me parece útil dejar la g en las abreviaciones tg i cotg , puesto que tienen, como signos matemáticos, uso internacional.

Puede preguntarse ahora si no sería conveniente, dada la validez jeneral de los desarrollos analíticos, limitar los desarrollos geométricos explicados en este párrafo a lo mas necesario. Efectivamente, pueden obtenerse sin dificultad las fórmulas para el coseno aplicando a las fórmulas para el seno la relacion conocida

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Con este procedimiento se tendria la ventaja de no necesitar ya una demostracion para la validez jeneral de las fórmulas para $\cos(a \pm \beta)$, una vez demostrada la jeneralidad de las fórmulas para $\sin(a \pm \beta)$. Pero de ninguna manera debe admitirse que se deduzcan de las fórmulas para las funciones de $(a + \beta)$ las correspondientes para $(a - \beta)$ sustituyendo en aquellas $-\beta$ en lugar de $+\beta$ i aplicando las fórmulas para las funciones de ángulos negativos (1), pues las deducciones de la figura 4.^a han sido obtenidas bajo la espresiva suposicion de que β es un ángulo positivo. Seria necesario demostrar ántes que dichas deducciones valen tambien cuando β es negativo; pero esta demostracion se ha dado por medio de la figura 5.^a para $a - \beta$. Puede decirse que los dos desarrollos para $a + \beta$ i $a - \beta$ son desarrollos de un solo i mismo teorema para los dos casos diferentes de que β es positivo o negativo. Es esta la razon tambien por qué fué posible dar los dos desarrollos casi en las mismas palabras.

Claro está que, despues de haber dado los desarrollos, se puede advertir a los alumnos que el resultado de las investigaciones ha sido tal que una fórmula debe convertirse en otra correspondiente, si se reemplaza $+\beta$ por $-\beta$.

Con respecto al desarrollo analítico mas arriba mencionado, de las fórmulas para el coseno, dadas las fórmulas para el seno, creemos que no se debe admitirlo tampoco en la enseñanza secundaria. Partes homogéneas de la enseñanza, deben tratarse homogéneamente en cuanto posible sea. Esto tiene la ventaja de facilitar el trabajo tanto para el profesor como para los

(1) Este error se encuentra en los *Apuntes de Trigonometria Rectilínea* de don Nicéforo Stuardo, páj. 37.

alumnos; un desarrollo aparece como complemento del otro i ofrece una repetición de los procedimientos en otra forma i sin cansar a los alumnos. Además, con este tratamiento se hace evidente la posición coordinada de las fórmulas en el sistema, de modo que una no aparece, ni en posición ni en desarrollo, dependiente de la otra, lo que no es de ninguna manera según su naturaleza interior.

En fin, el desarrollo geométrico es preferible por ser más intuitivo i por facilitar la inteligencia clara de los razonamientos. Es claro que, si el desarrollo analítico da indudablemente un resultado exacto, claro es también que no hace evidentes, por ejemplo, las razones para las analogías así como para las diferencias que revistan las formas de las fórmulas encontradas al fin. Si después desarrollamos analíticamente $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ etc., esto no es una inconsecuencia, puesto que las tangentes i cotangentes no están coordinadas de igual modo en el desarrollo geométrico. a los senos como lo están los cosenos.

CONCLUSION

Puede parecer extraño que entre los ejemplos espuestos mas arriba no se encuentre ninguno que haga referencia al álgebra.

En verdad, este ramo de las matemáticas no es tan propio como los demás ramos para servir como ejemplo de explicación de los métodos. Tal vez provenga esto de que las demostraciones de los teoremas de álgebra elemental son generalmente muy abstractas i que los diferentes teoremas no están tan íntimamente ligados entre sí como los de los ramos geométricos. Por eso los alumnos en este ramo necesitarán más una ayuda eficaz del profesor, tanto para establecer los teoremas como para encontrar las demostraciones. Sin embargo, es posible emplear los métodos preferidos también en álgebra, aunque no tan exclusivamente.

Consideremos, para terminar, una lección de álgebra en el quinto año de humanidades, o sea el problema de "resolver una ecuación del segundo grado con una incógnita dada en la forma

completa." Se toma como conocida la resolución de dichas ecuaciones dadas en la forma incompleta.

La ecuación por resolver será

$$x^2 + p x = q$$

Por analogía con la forma incompleta de una ecuación del segundo grado, los alumnos llegarán a decir que se podría encontrar la resolución, si el primer miembro fuera un cuadrado. ¿Puede ser un cuadrado? ¿De cuántos términos consta el cuadrado de un binomio? ¿Qué forma tiene, por ejemplo, el cuadrado de $(a+b)$? Comparando esta forma $a^2 + 2 a b + b^2$ con el primer miembro $x^2 + p x$ ¿qué término falta? ¿Qué forma debe tener este término siendo x comparable con a i p con $\frac{b}{2}$? ¿Qué

necesitamos hacer con el término $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ que falta para tras-

formar la ecuación propuesta en otra equivalente? Los alumnos encontrarán, de tal manera, la ecuación

$$x^2 + p x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

¿Cómo podemos escribir el primer miembro? ¿Qué más hay que hacer para pasar del cuadrado a la potencia? ¿Cuántos signos llevará la raíz cuadrada? ¿Qué se necesita hacer para despejar a x ? Exprésense la fórmula desarrollada

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

en palabras.

Antes de ejercitar esta fórmula, se hace ejecutar las operaciones indicadas en numerosas ecuaciones, hasta que se haya cerciorado el profesor de que todos los alumnos han entendido bien los procedimientos que conducen de una cuestión a la in-

mediatamente siguiente. En seguida se hace ejercitar la fórmula encontrada con numerosos ejercicios de variadas clases, pasando, en fin, a la discusión de la fórmula ya preparada por los ejercicios. En ésta se considera detenidamente el caso

$x_2 + px = -q$; tománd. $\frac{p^2}{4} > q$ i también el caso en que q es

$= 0$ i que da por eso una raíz $x = 0$. El último caso se encuentra a menudo en problemas de trigonometría i estereometría.

Ya queda dicho en el programa de matemáticas que los ejercicios no deben limitarse a la resolución de ecuaciones propuestas, sino que deben considerarse también muchas otras que proponen primero plantear la ecuación.

DR. A. TAFELMACHER

Profesor de Matemáticas del Instituto Pedagógico



