SOBRE EL TEOREMA DE FERMAT

DE QUE LA ECUACION $x^n+y^n=z^n$ NO TIENE SOLUCION EN NÚMEROS ENTEROS x, y, z I SIENDO $n>2$

Entre los varios teoremas, establecidos sin demostracion por Fermat (*), el que forma el tema del presente trabajo, es el mas conocido i el mas tratado. Existen hasta hoi demostraciones de este teorema, debidas a los jeómetras Euler (**) para $n=3$ i $n=4$, Gauss (***) para $n=5$, G. Lejeune—Dirichlet (****) para $n=14$ i Kummer (*****) para cualquier valor de n con ciertas excepciones, relacionadas a los números de Bernoulli.

(*) Pierre Fermat (1590-1664) vivia como jurisconsulto en Tolosa (Francia). El teorema en cuestion se encuentra en sus «*Observ. ad Dioph. Arithm. II, 8.*»

(**) «*Leonhard Eulers vollständige Anleitung Zurniederen und hoeheren Algebra, nach der französischen Ausgabe des Herrn de la Grange mit Anmerkungen urd Zusätzen herausgegeben*, von Johann Philipp Grüson (1796). 2. Theil, II. Abschnitt § 243.»

(***) Gauss Werke, t. II, pájs. 387-391. Aquí se encuentran los datos suficientes para demostraciones de los casos $n=3$ i $n=5$.

(****) G. Lejeune—Dirichlet: «*Démostration du théorème de Fermat pour le cas des 14 puissances.*» Berlin, 1832. «*Journal für reine und angewandte Mathematik*, von A. Crelle.» Tom. IX, pájs. 390-393.

(*****) El profesor Kummer ha dado la demostracion en uno de sus tratados sobre números complejos, publicados en el mencionado Journal, tomo XL, pájs. 130-138.

Aunque, ahora, de todas las demostraciones para un teorema que se refiere a números reales, son preferibles las hechas por medio de estos mismos números, no ofrecen esta ventaja, sino las demostraciones de Euler, miéntras que las de Gauss i Dirichlet estan fundadas en la consideracion de números complejos en el sentido ordinario i la de Kummer en los llamados números ideales, introducidos por este conocido profesor de matemáticas de la Universidad de Berlin.

El presente trabajo contendrá un método de demostracion que, tomando en consideracion solo los números reales i enteros, posibilita la aplicacion aun a los casos no considerados todavia.

I

Considerando la ecuacion

$$x^n + y^n = z^n \tag{1}$$

hai que hacer, desde luego, algunas observaciones sobre la naturaleza de los números enteros x, y, z, n. Primeramente podemos tomar los números x, y, z con signo positivo cada uno; porque, si fueran uno o mas de estos números negativos, seria siempre posible, por medio de mera traslacion, trasformar la ecuacion propuesta en la forma (1). En seguida podemos considerar los números x, y, z, sin limitar la jeneralidad del problema, como números enteros sin divisor comun alguno; porque, si tuvieran el divisor comun δ, así que $x = \delta x'$, $y = \delta y'$, $z = \delta z'$, resultaria de la ecuacion (1), despues de dividir con δ^n la nueva.

$$x'^n + y'^n = z'^n$$

en la que estarian x', y', z' sin comun divisor. Finalmente, basta suponer el esponente n como número primo i, por no referirme aquí a $n=2$, ni a $n=4$ (******), impar; porque, si fuese

(******) Como notoriamente es sabido, la ecuacion (1) puede ser resuelta en el caso de $n=2$, por medio de los números llamados pitagóricos que cada vez determinan un triángulo rectángulo. En cuanto al caso de $n=4$, lo he tratado tambien, pero fundándome en consideraciones que difieren de las aprovechadas en este trabajo.

$n=km$ i m un número primo, conduciria la ecuacion (1) a la otra

$$(x^k)^m+(y^k)^m=(z^k)^m$$

pero una vez demostrado que tal ecuacion no tiene solucion en números enteros para el esponente m, es claro que no tiene lugar la ecuacion (1) del esponente $n=km$.

Espuesto lo anterior réstanos solo considerar una ecuacion

$$x^n+y^n=z^n$$

en la que x, y, z significan números enteros positivos i sin divisor comun i n un número primo e impar.

Siendo ahora siempre $x^n+y^n<(x+y)^n$, será $z<x+y$ i es permitido poner

$$z=x+y-t,$$

sustitucion en que t es un número entero i positivo. Por medio de esta sustitucion, se convierte la ecuacion (1) en

$$x^n+y^n=(x+y-t)^n \tag{2}$$

o sea

$$(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y\pm\ldots-xy^{n-2}+y^{n-1})=(x+y)^n-\binom{n}{1}(x+y)^{n-1}t+$$
$$+\binom{n}{2}(x+y)^{n-2}t^2\mp\ldots-\binom{n}{n-2}(x+y)^2t^{n-2}+\binom{n}{n-1}(x+y)t^{n-1}-t^n$$

donde significa jeneralmente $\binom{n}{k}$ el coeficiente binomial del órden k o sea

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1.2.3.\ldots k}$$

Si dividimos los dos miembros de la última ecuacion por $x+y$ es posible escribirla en la forma

$$\left.\begin{aligned}&(x^{n-1}+y^{n-1})-xy(x^{n-3}+y^{n-3})\pm\ldots+(-xy)^{\frac{n-3}{2}}(x^2+y^2)+\\&+(-xy)^{\frac{n-1}{2}}=(x+y)^{n-1}-\binom{n}{1}(x+y)^{n-2}t\pm\ldots+\binom{n}{n-1}t^{n-1}-\frac{t^n}{x+y}\end{aligned}\right\}(3)$$

Deducimos de esta ecuacion que t^n tiene que ser divisible por $x+y$, puesto que todos los demas términos de la ecuacion son números enteros, o bien que t i $x+y$ tienen que tener un factor comun. Sea

$$t=f.\tau,\ x+y=f.\xi$$

i τ i ξ sin divisor comun, será

$$\frac{t^n}{x+y}=\frac{f^{n-1}.\ \tau^n}{\xi}$$

i, para que sea la última espresion un número entero, debe ser f^{n-1} divisible por ξ. Ahora hai que distinguir entre dos casos, o f^{n-1} es $>\xi$ o $f^{n-1}=\xi$. En el primer caso de $f^{n-1}>\xi$ queda, despues de haber efectuado la division $f^{n-1}:\xi$, siempre un factor ω de f, siendo ω un número entero, factor que, por estar contenido tanto en $t=f\tau$ como en $x+y=f\xi$, lo será tambien en todo el miembro segundo de la ecuacion (3); i en la potencia ω^{n-1}. Vamos a demostrar que no puede tener lugar este caso. Para este fin demostraremos el teorema siguiente:

"Cada suma de dos potencias del mismo esponente par i entero $x^{2m}+y^{2m}$ puede escribirse en la forma

$$A_m(x+y)^2+2(-xy)^m,$$

siendo A_m una funcion íntegra de x e y."

Supongamos justificado el teorema para todos los valores de m que sean menores que un número r, así que, por ejemplo:

$$x^{2(r-1)}+y^{2(r-1)}=A_{r-1}(x+y)^2+2(-x\,y)^{r-1}$$

i

$$x^{2r}+y^{2r}=A_r\,(x+y)^2+2(-xy)^r$$

podremos verificarlo tambien para $m=r+1$.

En efecto, tenemos

$$x^{2(r+1)}+y^{2(r+1)}=(x^2+y^2)(x^{2r}+y^{2r})-x^2\,y^2\,(x^{2(r-1)}+y^{2(r-1)})=$$
$$=(x^2+y^2)\left\{A_r(x+y)^2+2(-xy)^r\right\}-x^2\,y^2\left\{A_{r-1}\,(x+y)^2+\right.$$
$$\left.+2(-xy)^{r-1}\right\}=\left\{A_r(x+y_i^2)-A_{r-1}\,x^2\,y^2+2(-xy)^r\right\}(x+y)^2+$$
$$+2(-xy)^{r+1}=A_{r+1}(x+y)^2+2(-xy)^{r+1}$$

Ahora bien, para $r=1$, tenemos

$$x^2+y^2=(x+y)^2+2(-xy)^1$$

i para $r=2$

$$x^4+y^4=(x-y)^2(x+y)^2+2(-xy)^2,$$

luego subsiste el teorema jeneralmente.

Aprovechando este teorema, el miembro segundo de la ecuacion (3) toma la forma siguiente:

$$A_{\frac{n-1}{2}}(x+y)^2+2(-xy)^{\frac{n-1}{2}}-$$

$$-A_{\frac{n-3}{2}}xy(x+y)^2+2(-xy)^{\frac{n-1}{2}}+$$

$$+A_{\frac{n-5}{2}}x^2y^2(x+y)^2+2(-xy)^{\frac{n-1}{2}}-$$

$$\mp \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$+A_1(-xy)^{\frac{n-3}{2}}(x+y)^2+2(-xy)^{\frac{n-1}{2}}+(-xy)^{\frac{n-1}{2}}=$$
$$=A(x+y)^2+n(-xy)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Por tener ahora—segun pájina 274—el primer miembro de la misma ecuacion (3) el divisor ω^{n-1}, debe tenerlo tambien el miembro segundo, de lo que se sigue que

$$n(x+y)^{\frac{n-1}{2}}\equiv 0 \bmod \omega^2 \text{ (*******)}$$

porque

$$(x+y)^2\equiv f^2\xi^2\equiv 0 \bmod \omega^2.$$

(*******) Se espresa por $a\equiv b \bmod c$ (a congruente a b módulo c) que en la division por c deja a la misma resta que b, por eso significa $n(-xy)^{\frac{n-1}{2}}\equiv 0 \bmod \omega^2$, que $n(-xy)^2$ deja en la division por ω^2 la resta 0 o, con otros términos, que $n(-xy)^{\frac{n-1}{2}}$ es divisible por ω^2.

Hai ahora 2 posibilidades: 1.ª ω es un número primo $= n$ o $\leqq n$, entónces $(xy)^{\frac{n-1}{2}}$ será a lo ménos divisible por ω i, por consiguiente, x o y o x e y divisible por ω. 2.ª Si ω es un número compuesto, n no es divisible por ω, pero x o y o x e y han de tener algun factor comun con ω.

En los dos casos se podria concluir que, por ser

$$x+y\equiv 0 \bmod \omega,$$

x e y tuvieran un divisor comun que, segun (1), lo fuera tambien de z, miéntras que hemos supuesto los 3 números x, y, z sin divisor comun.

No puede ser, pues, $f^{n-1} > \xi$, sino tiene que ser $f^{n-1} = \xi$ i, por lo tanto, $x+y=f^n$, así que para la existencia de la ecuacion (1)

$$x^n+y^n=z^n$$

tenemos ahora las condiciones:

$$x+y=f^n \tag{A}$$

$$x^n+y^n=z^n=(f^n-f\tau)^n \tag{B}$$

Repasando las conclusiones anteriores, observamos fácilmente que todas son consecuencias del teorema fundamental que, siendo n un número entero e impar, x^n+y^n es divisible por $x+y$. Partiendo ahora del teorema análogo respecto a x^n-y^n que es divisible siempre por $x-y$, sacaremos dos condiciones mas i que son análogas a (A) i (B).

Escribamos la ecuacion (1) en la forma

$$z^n-y^n=x^n, \tag{1'}$$

será permitido poner

$$z^n-y^n=(z-y+s)^n \tag{2'}$$

siendo z un número entero i positivo, por ser

$$z^n-y^n=\left\{y+(z-y)\right\}^n-y^n=\binom{n}{1}y^{n-1}(z-y)+\binom{n}{2}y^{n-2}(z-y)^2+$$
$$+\ldots\ldots+\binom{n}{n-1}y(z-y)^{n-1}+(z-y)^n>(z-y)^n$$

La division de la ecuacion (2′), despues de haber desarrollado el miembro segundo, por $z-y$ da una ecuacion análoga a la (3), a saber

$$\left.\begin{aligned}(z^{n-1}+y^{n-1})+zy(z^{n-3}-y^{n-3})+\ldots+(zy)^{\frac{n-3}{2}}(z^2+y^2)+(zy)^{\frac{n-1}{2}}=\\=(z-y)^{n-1}+\binom{n}{1}(z-y)^{n-2}s+\ldots\ldots+\binom{n}{n-1}s^{n-1}+\frac{s^n}{z-y}\end{aligned}\right\}(3')$$

Parece supérfluo repetir aquí todos los pasos necesarios para averiguar la forma de $z-y$ que, con poca diferencia, son los mismos como arriba. El teorema que reemplazará aquí el de la pájina 274 será:

"Cada suma de dos potencias del mismo esponente par i entero $z^{2m}+y^{2m}$ se deja escribir en la forma

$$A'_m(z-y)^2+2(zy),^m$$

espresion en que A'_m significa una funcion íntegra de x e y."

La demostracion de este teorema se funda en la misma conclusion de r a $r+1$ aprovechada arriba, teniéndose para $r=1$ i $r=2$ las relaciones

$$z^2+y^2=(z-y)^2+2(zy)^1$$
$$z^4+y^4=(z+y)^2(z-y)^2+2(zy)^2$$

En fin, se encuentran, para que exista la ecuacion

$$z^n-y^n=x^n$$

las condiciones

$$z-y=g^n \qquad (A')$$
$$z^n-y^n=x^n=(g^n+g\sigma)^n \qquad (B')$$

Cambiando en las últimas consideraciones x con y e y con x resultan otras dos condiciones para la existencia de la ecuacion

$$z^n-x^n=y^n,$$

i son

$$z-x=h^n \qquad (A'')$$
$$z^n-x^n=y^n(h^n+h\rho)^n \qquad (B'')$$

Los números g, σ i h, ρ, correspondientes a f, τ, son números enteros i positivos. Hai que recordar todavía que, segun pájina 274, τ i ξ i, por eso, τ i f no tienen divisor comun, de lo que se desprende que tampoco g i σ ni h i ρ tienen divisor comun.

Los resultados hasta aquí deducidos podemos resumir en los dos sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x&=g^n+g\sigma \\ y&=h^n+h\rho \\ z&=f^n-f\tau \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

i

$$\left.\begin{aligned} x+y&=f^n \\ z-y&=g^n \\ z-x&=h^n \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

De las ecuaciones (5) se sacan ademas las dos:

$$\begin{aligned} z+x&=f^n+g^n \\ z+y&=f^n+h^n \end{aligned}$$

i, por eso,

$$\left.\begin{aligned} 2z&=f^n+g^n+h^n \\ 2x&=f^n+g^n-h^n \\ 2y&=f^n+h^n-g^n \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Por medio de las ecuaciones (4) se convierten las (6) en

$$\left.\begin{aligned} f^n&=g^n+h^n+2f\tau \\ f^n&=g^n+h^n+2g\sigma \\ f^n&=g^n+h^n+2h\rho \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

lo que da

$$f\tau=g\sigma=h\rho$$

Representando estos tres productos iguales por G, se reducen las ecuaciones (7) a una sola

$$f^n=g^n+h^n+2G \qquad (8)$$

Las ecuaciones (4) permiten todavía deducir otra consecuencia, i es la que de los números f, g, h no deben tener dos un factor comun. Teniendo, por ejemplo, f i g un factor comun, se encontraria éste tambien en z i x, segun (4), i, por eso, tambien en y, segun (1), miéntras que hemos supuesto x, y, z sin divisor comun. De aquí se desprende la congruencia

$$G \equiv 0 \bmod fgh \tag{9}$$

Nos sirven en fin las ecuaciones (4) i (8) para trasformar la ecuacion (1)

$$z^n = x^n + y^n$$

en

$$(f^n - G)^n = (g^n + G)^n + (h^n + G)^n$$

o bien en

$$(g^n + h^n + G)^n = (g^n + G)^n + (h^n + G)^n \tag{10}$$

En esta ecuacion, que nos servirá de base para las consideraciones siguientes, significan n un número primo impar i positivo, g i h números positivos enteros sin divisor comun i G un número positivo entero divisible por fgh.

Ya es posible dar la demostracion de nuestro teorema para $n=3$. En este, se convierte la ecuacion (10) en

$$(g^3 + h^3 + G)^3 = (g^3 + G)^3 + (h^3 + G)^3$$

Sustituyamos, para abreviar, $g^3 = a$, $h^3 = b$ i desarrollemos el primer miembro segun las potencias de $(a+G)$ i b i en el segundo solo el último término $(b+G)^3$ segun las potencias de b i G, i resultará

$$(a+G)^3 + 3(a+G)^2 b + 3(a+G) b^2 + b^3 = (a+G)^3 + b^3 + 3b^2 G + \\ + 3bG^2 + G^3$$

De aquí se desprende

$$3ab\,(a + 2G + b) = G^3$$

o

$$3g^3h^3(g^3 + h^3 + 2G) = G^3,$$

ecuacion que, por medio de la ecuacion (8), toma la forma

$$3g^3h^3f^3 = G^3$$

Pero esta ecuacion no tiene solucion en números enteros, puesto que 3 no puede ser el cubo de otro número.

Luego no tiene lugar la ecuacion (10) ni, por lo tanto, tampoco la ecuacion (1) para el caso $n=3$.

II

Pasemos ahora a la consideracion de los casos en los cuales n es un número primo>3. No se presenta tan sencilla la demostracion aquí. Haciendo las sustituciones

$$g^n = a, \quad h^n = b$$

tenemos que tomar en cuenta en lugar de la ecuacion (10) la siguiente:

$$(a+b+G)^n = (a+G)^n + (b+G)^n \tag{11}$$

Desarrollando esta ecuacion del mismo modo como lo hemos efectuado para $n=3$, obtenemos primeramente

$$(a+G)^n + n(a+G)^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}(a+G)^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2!}(a+G)^2 b^{n-2}$$
$$+ n(a+G)b^{n-1} + b^n = (a+G)^n + b^n + nb^{n-1}G + \frac{n(n-1)}{2!}b^{n-2}G^2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{2!}b^2G^{n-2} + nbG^{n-1} + G^n \text{ (********)}.$$

Suprimiendo los términos iguales en los dos miembros, se reduce el segundo a G^n i en el primero se puede sacar nab, como factor común, puesto que los coeficientes binomiales son divisibles por n, siendo n un número primo; tenemos, pues, or-

(********) Generalmente $k!$ significa el producto de los números 1, 2, 3.... k, luego es $2!=1.2=2$; $3!=1.2.3=6$, etc.

denando el primer miembro con respecto a las potencias de G, la ecuacion siguiente:

$$
\left.\begin{aligned}
nab\Big[&\Big\{(a^{n-2}+b^{n-2})+\tfrac{n-1}{2!}ab(a^{n-4}+b^{n-4})+\tfrac{(n-1)(n-2)}{3!}a^2b^2(a^{n-6}+b^{n-6})+\\
&\quad+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)\ldots\left(n-\frac{n-3}{2}\right)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}(a+b)\Big\}+\\
&+G\Big\{(n-1)(a^{n-3}+b^{n-3})+\tfrac{(n-1)(n-2)}{2!}ab(a^{n-5}+b^{n-5})+\\
&\quad+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)\ldots\left(n-\frac{n-1}{2}\right)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\Big\}+\\
&+G^2\Big\{\tfrac{(n-1)(n-2)}{2!}\left(+a^{n-4}+b^{n-4}\right)+\tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 2!}ab(a^{n-6}+b^{n-6})+\\
&\quad+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)\ldots\left(n-\frac{n-1}{2}\right)}{2.\left(\frac{n-3}{2}\right)!}a^{\frac{n-5}{2}}b^{\frac{n-5}{2}}(a+b)\Big\}+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+G^{n-3}\tfrac{(n-1)(n-2)}{2!}(a+b)+\\
&+G^{n-2}(n-1)\Big]=G^n.
\end{aligned}\right\} 12
$$

Es la ecuacion (12) la que tenemos que analizar en seguida, conviene por eso apuntarla en una forma abreviada. Designando por H_0, H_1 .... H_{n-2} los coeficientes de G^0, G^1 .... G^{n-2}, se puede poner en lugar de (12) la ecuacion siguiente:

$$nab\left\{H_0+H_1G+H_2G^2+..+H_{n-3}G^{n-2}+H_{n-2}G^{n-2}\right\}=G^n \quad (12')$$

Se sigue primeramente de esta ecuacion que

$$G^n\equiv 0 \bmod n$$

o, por ser n número primo, que

$$G\equiv 0 \bmod n$$

Segun (9) es $G\equiv 0 \bmod f\,g\,h$; podria, por esto, suceder, que f o g o h serian $\equiv 0 \bmod n$. Demostraremos en adelante que ni f ni g ni h puede ser divisible por n. Para este fin, notamos primero que el primer miembro de (12) tiene los factores $a=g^n$ i $b=h^n$, los que estan contenidos tambien en G^n, segun (9), i, segun esta misma congruencia (9), debe tener el primer miembro de (12) tambien el divisor.

$$f^n = g^n + h^n + 2G = a + b + 2G.$$

El desarrollo de la funcion

$$H_0 + H_1\, G + \ldots\ldots + H_{n-2}\, G^{n-2},$$

segun las potencias de $(a+b+2G)$, contendrá los términos

$$(a+b+2G)^{n-3}, (a+b+2G)^{n-4}, \ldots\ldots (a+b+2G)^2, (a+b+2G)$$

multiplicadas todavia por coeficientes que dependen de a i b, i algunas ademas por potencias de G. Entre todos los términos habrá uno solo que es del primer grado respecto a $(a+b+2G)$ i que no tiene como coeficiente una potencia de G. A este término no pueden contribuir sino las funciones H_0 i $H_1\, G$ porque las demas $H_2\, G^2$ etc. tienen el factor G^2. El término en cuestion tendrá la forma

$$k(a\,b)^{\frac{n-3}{2}}(a+b+2G)$$

como se concluye de las últimas espresiones de H_0 i H_1, a saber

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots\left(n-\frac{n-3}{2}\right)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}(a\,b)^{\frac{n-3}{2}}(a+b)$$

i

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots\left(n-\frac{n-1}{2}\right)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}(a\,b)^{\frac{n-3}{2}}$$

Para averiguar el valor del coeficiente numérico k basta desarrollar a H_0 segun las potencias de $(a+b)$ i determinar el coeficiente del término $(a\,b)^{\frac{n-3}{2}}(a+b)$. Observamos desde luego que los coeficientes con índice par, es decir $(H_0, H_2 \ldots H_{n-3}$, son divisibles por $a+b$, miéntras que los con índices impares no lo son. Esto resulta de las formas de los coeficientes H, de los cuales los con índice par constan de sumas de la forma $a^{n-2r} + b^{n-2r}$ cuyos esponentes n-$2r$ son números impares.

Para el desarrollo de la funcion H_0 segun las potencias de $(a+b)$, apuntemos H_0 en la forma siguiente:

$$H_0=(a^{n-2}+b^{n-2})+\sum_{m=1}^{\frac{n-3}{2}}\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{(m+1)!}(ab)^m(a^{n-2m-2}+b^{n-2m-2}) \qquad (13)$$

designando por $\sum\limits_{m=1}^{\frac{n-3}{2}}$ una suma de términos en la que m recorre todos los valores enteros de 1 a $\frac{n-3}{2}$.

Ahora formaremos sucesivamente las potencias $(a+b)^{n-2}$, $(a+b)^{n-4}$, $(a+b)^{n-6}$, etc, separando a la vez siempre el primer término de la suma Σ. De esta manera, resultan las igualdades siguientes:

$$H_0=(a+b)^{n-2}-\frac{n-3}{2\,!}ab(a^{n-4}+b^{n-4})+\sum_{m=2}^{\frac{n-3}{2}}\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-m)(n-(m+2))m.}{(m+1)!}\times$$

$$\times(ab)^m\left(a^{n-2m-2}+b^{n-2m-2}\right)=$$

$$=(a+b)^{n-2}-\frac{n-2}{2\,!}ab(a+b)^{n-4}+\frac{(n-4)(n-5)}{3\,!}(ab)^2(a^{n-6}+b^{n-6})-$$

$$-\frac{1}{2\,!}\sum_{m=3}^{\frac{n-3}{2}}\frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-m).(n-(m+2))(n-(m+3)).m(m-1)}{(m+1)!}+(ab)^m(a^{n-2m-2}+b^{n-2m-2})=$$

$$=(a+b)^{n-2}-\frac{n-3}{2\,!}ab(a+b)^{n-4}+\frac{(n-4)(n-5)}{3\,!}(ab)^2(a+b)^{n-6}-\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{4\,!}\times$$

$$\times(ab)^3(a^{n-8}+b^{n-8})+\frac{1}{3\,!}\sum_{m=4}^{\frac{n-3}{2}}\frac{(n-4)(n-5)\ldots(n-m)(n-(m+2))(n-(m+3))(n-(m+4)).m(m-1)(m-2)}{(m+1)!}$$

$$\times(ab)^m(a^{n-2m-2}+b^{n-2m-2}).$$

Supongamos efectuado este desarrollo hasta la ecuacion siguiente:

$$H_0=(a+b)^{n-2}-\frac{n-3}{2\,!}ab(a+b)^{n-4}\pm\ldots+(-1)^{l-1}\frac{(n-(l+1))(n-(l+2))(n-(2l-1))}{l\,!}$$

$$\times(ab)^{l-1}(a^{n-2l}+b^{n-2l})+$$

$$+(-1)^l\frac{1}{(l-1)!}\sum_{m=l}^{\frac{n-3}{2}}\frac{(n-l)(n-(l+1))\ldots(n-m).(n-(m+2))(n-(m+3))\ldots(n-(m+l)).m(m-1)\ldots(m-(l-2))}{(m+1)!}$$

$$\times(ab)^m(a^{n-2m-2}+b^{n-2m-2})$$

i formemos en seguida $(a+b)^{n-2l}$, apartando a la vez de la suma Σ el primer término que resulta para $m=l$, entónces el coeficiente de $(a^{n-2l-2}+b^{n-2l-2})$, prescindiendo de $(ab)^l$, es para $m=l$ el siguiente:

$$\frac{1}{(l-1)!}\,\frac{(n-l)(n-(l+2))(n-(l+3))\ldots(n-2l).l(l-1)\ldots3.2}{(l+1)!}-$$
$$-\frac{(n-(l+1))(n-(l+2))\ldots(n-(2l-1)).(n-2l)}{l!}=\frac{(n-(l+2))(n-(l+3))\ldots(n-(2l+1))}{(l+1)!}$$

i el término jeneral de la suma Σ para $m=l+1$ hasta $\frac{n-3}{2}$ será:

$$\frac{(n-(l+1))(n-(l+2))\ldots(n-(2l-1))}{l!}\cdot\frac{(n-2l)(n-(2l+1))\ldots(n-(m+l))}{(m-(l-1))!}-$$
$$-\frac{(n-l)(n-(l+1))\ldots(n-m).(n-(m+2))(n-(m+3))\ldots(n-(m+l)).m(m-1)\ldots(m-(l-2))}{(l-1)!\,(m+1)!}=$$
$$=\frac{(n-(l+1))(n-(l+2))\ldots(n-m).(n-(m+2))(n-(m+3))\ldots(n-(m+l))}{l!\,(m+1)!}\times$$
$$\times\left\{(n-(m+1))(m-(l-2))(m(l-3))\ldots m(m+1)-(n-l).m(m-1)\ldots(m-(l-2)).l\right\}=$$
$$=\frac{(n-(l+1))(n-(l+2))\ldots(n-m)(n-(m+))\ldots(n-(m+l))(n-(m+l+1)).m(m-1)\ldots(m-(l-1))}{l!\,(m+1)!}$$

i, por lo tanto,

$$H_0=(a+b)^{n-2}-\frac{n-3}{2!}ab(a+b)^{n-4}+\ldots+(-1)^{l-1}\frac{(n-(l+1))(n-(l+2))\ldots(n-(2l-1))}{l!}$$
$$\times(ab)^{l-1}(a+b)^{n-2l}+(-1)^{l}\frac{(n-(l+2))(n-(l+3))\ldots(n-(2l+1))}{(l+1)!}(ab)^l(a^{n-2l-2}+b^{n-2l-2})$$
$$+(-1)^{l+1}\frac{1}{l!}\sum_{m+l+1}^{\frac{n-3}{2}}\frac{(n-(l+1))(n-(l+2))\ldots(n-m).(n-(m+2))(n-(m+3))\ldots((n-m+l+1)).m(m-1).(m-(l-1))}{(m\times 1)!}$$
$$\times(ab)^m(a^{n-2m-2}+b^{n-2m-2}).$$

Sabiendo ahora que H_0 es divisible por $(a+b)$, segun pájina 282, podemos escribir

$$\left.\begin{aligned}&H_0=(a+b)^{n-2}-\frac{n-3}{2!}ab(a+b)^{n-4}+\frac{(n-4)(n-5)}{3!}(ab)_2(a+b)^{n-6}\mp\ldots+\\&+(-1)^m\frac{(n-(m+2))(n-(m+3))\ldots(n-(2m+1))}{(m+1)!}(ab)^m(a+b)^{n-2m-2}\pm\ldots+\\&+(-1)^{\frac{n-3}{2}}\frac{(n\frac{n+1}{2})(n\frac{n+3}{2}\ldots(n-(n-2))}{(\frac{n-1}{2})!}(ab)^{\frac{n-3}{2}}(a+b).\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Luego el coeficiente k de $(ab)^{\frac{n-3}{2}}(a+b)$ se determina como

$$k=(-1)^{\frac{n-3}{2}}\frac{\left(n\frac{n+1}{2}\right)\left(n\frac{n+3}{2}\right)\ldots(n-(n-2))}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}=$$

$$=(-1)^{\frac{n-3}{2}}\frac{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}=\pm 1,\ \text{segun será}\ \begin{matrix} n\equiv 3 \\ \text{o}\ n\equiv 4\end{matrix}\ (\text{mod. } 4)$$

Designando por c la suma $a+b+2G=f^n$, por $F_1(c, G)$ una funcion de c i G i por $F_2(G)$ una funcion de G, tendrá la ecuacion (12) la forma

$$nabc\left\{cF_1(c, G)+G.F_2(G)\pm a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right\}=G^n \tag{15}$$

Por ejemplo, tiene la ecuacion (12) para $n=11$ la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
11ab\Big[&\Big\{(a^9+b^9)+5ab(a^7+b^7)+15a^2b^2(a^5+b^5)+30a^3b^3(a^3+b^3)\\
&\qquad +42a^4b^4(a+b)\Big\}+\\
&+G\Big\{10(a^8+b^8)+45ab(a^6+b^6)+120a^2b^2(a^4+b^4)+210a^3b^3(a^2+b^2)\\
&\qquad +252a^4b^4\Big\}+\\
&+G^2\Big\{45(a^7+b^7)+180ab(a^5+b^5)+420a^2b^2(a^3+b^3)+\\
&\qquad +630a^3b^3(a+b)\Big\}+\\
&+G^3\Big\{120(a^6+b^6)+420ab(a^4+b^4)+840a^2b^2(a^2+b^2)+1050a^3b^3\Big\}\\
&+G^4\Big\{210(a^5+b^5)+630ab(a^3+b^3)+1050a^2b^2(a+b)\Big\}+\\
&+G^5\Big\{252(a^4+b^4)+630ab(a^2+b^2)+840a^2b^2\Big\}+\\
&+G^6\Big\{210(a^3+b^3)+420ab(a+b)\Big\}+\\
&+G^7\Big\{120(a^2+b^2)+180ab\Big\}+\\
&+G^8\Big\{45(a+b)\Big\}+\\
&+G^9\Big\{10\Big\}\Big]=G^{11}
\end{aligned}$$

i la ecuacion (15) se espresa así:

$$11abc\Big[c\Big\{(c^7-8Gc^6+29G^2c^5-62G^3c^4+86G^4c^3-80G^5c^2+$$

$$+50G^6c-20G^7)-ab(4c^5-21Gc^4+51G^2c^3-70G^3c^2+$$

$$+60G^4c-30G^5)+a^2b^2(7c^3-20Gc^2+30G^2c-20G^3)-$$

$$-a^3b^3(5c^2-5G)\Big\}+G\Big\{5G^7-10abG^5+10a^2b^2G^3-$$

$$-5a^3b^3G\Big\}+a^4b^4\Big]=G^{11}$$

Llegamos ahora a demostrar que ni g ni h ni f pueden ser $\equiv 0$ mod n. Siendo $g\equiv 0$ mod n, resulta para $a=g^n$, que debe ser divisible por n^n. Dividiendo, en este caso, los dos miembros de la ecuacion (12′) por n^n, queda siempre el primero con el coeficiente n, de lo que se saca que debe ser $G\equiv 0$ mod n^2, i de esta congruencia se desprende, por otra parte, que será tambien $H_0\equiv 0$ mod n^2, puesto que ni b ni c pueden tener el mismo divisor n con a, segun pájina 279. Pero de $H_0\equiv 0$ mod n^2, i $a\equiv 0$ mod n^2 se seguiria que $b^{n-2}\equiv 0$ mod n^2, lo que es absurdo, segun la misma razon que acabamos de indicar. Por tener la ecuacion (12) una forma simétrica respecto a a i b o, lo que es lo mismo, respecto a g i h, no puede ser tampoco $h\equiv 0$ mod n. Réstanos, pues, considerar el caso de $f\equiv 0$ mod n; pero el mismo razonamiento, aplicado ántes a g, sirve tambien para f, tomando en cuenta la ecuacion (15) que es solo otra forma de las (12) i (12′). Aquella ecuacion (15) tendria, para $f\equiv 0$ mod n, como consecuencia que seria

$$a^{\frac{n-3}{2}}\cdot b^{\frac{n-3}{2}}\equiv 0 \text{ mod } n^2$$

i por consiguiente o a o $b\equiv 0$ mod n^2 lo que no puede ser.

Para que existan valores de a i b que satisfacen a la ecuacion (12), es, por lo tanto, necesario que sea $H_0\equiv 0$ mod n, porque todos los demas términos quedan, despues de haber hecho desaparecer a n, siempre divisibles por n, por contener a G. Luego tenemos, segun pájina 284,

$$H_0=(a+b)^{n-2}-\frac{n-3}{2!}ab(a+b)^{n-4}+\frac{(n-4)(n-5)}{3!}(ab)^2(a+b)^{n-6}\mp\ldots\ldots+$$
$$+(-1)^m\frac{(n-(m+2))\ldots(n-(2m+1))}{(n-1)!}(ab)^m(a+b)^{n-2m-2}\pm\ldots\ldots\ldots+$$
$$+(-1)^{\frac{n-3}{2}}(ab)^{\frac{n-3}{2}}(a+b)\equiv 0 \text{ mod } n.$$

Claro está que $a+b=c-2G$ no puede ser$\equiv 0$ mod n, porque c no es $\equiv 0$ mod n, miéntras que G es$\equiv 0$ mod n. Queda entónces $\dfrac{H_0}{a+b}=H'_0\equiv 0$ mod n, o sea

$$\left.\begin{aligned} H'_0=(a+b)^{n-3}-\frac{n-3}{2!}ab(a+b)^{n-5}=\frac{(n-4)(n-5)}{2!}(ab)^2(a+b)^{n-7}\mp\ldots \\ +(-1)^m\frac{(n-(m+2))(n-(m+3))\ldots(n-(2m+1))}{(m+1)!}(ab^m)(a+b)^{n-2m-3}\pm\ldots+ \\ +(-1)^{\frac{n-3}{2}}(ab)^{\frac{n-3}{2}}\equiv 0 \text{ mod } n \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

A esta congruencia se le puede satisfacer, en efecto, siempre i para diferentes valores de a i b, si n tiene la forma $3\nu+1$. Por ejemplo encontramos para $n=13=3.4+1$

$$H'_0=(a=b)^{10}-5ab\,(a+b)^8+12(ab)^2(a+b)^6-14(ab)^3(a+b)^4+$$
$$+7(ab)^4(a+b)^2-(ab)^5$$

i tomando $a\equiv 1$, $b\equiv 3$ mod 13 será

$$H'_0\equiv 4^{10}-5.3.4^8+12.3^2.4^6-14.3^3.4^4+7.3^4.4^2-3^5 \text{ mod } 13$$

o, por ser $4^2=16\equiv 3$ mod 13, se convierte esta congruencia en

$$H'_0\equiv 3^5(1-5+12-14+7-1)\equiv 3^5.(20-20)\equiv 0 \text{ mod } 13$$

Hemos mencionado mas arriba que siempre hai valores de a i b que hacen H'_0 congruente a 0 segun el módulo n, cuando n tiene la forma $3\nu+1$; en caso contrario, siendo n de la forma

$3\nu+2$, parece que no existen tales valores. Para hacer evidente estos hechos, necesitamos trasformar a H'_0 i representarla en la forma

$$H'_0=\big((a+b)^2-ab\big)\,\phi\big((a=b)^2-ab\big) \qquad (17)$$

en la cual $\phi\big((a+b)^2-ab\big)$ significa cierta funcion de $(a+b)^2-ab$.

Si sustituimos, por un momento,

$$(a+b)^2=\alpha,\ ab=\beta$$

se trata del desarrollo de

$$H'_0=\alpha^{\frac{n-3}{2}}-\frac{n-3}{2!}\alpha^{\frac{n-3}{2}-1}\beta+\frac{(n-4)(n-5)}{3!}\alpha^{\frac{n-3}{2}-2}\beta^2\pm\ldots\ldots+$$

$$+(-1)^m\frac{(n-(m+2))(n-(m+3))\ldots\ldots(n-(2m+1))}{(m+1)!}\alpha^{\frac{n-3}{2}-m}\beta^m\pm\cdots\cdots+(-1)^{\frac{n-3}{2}}\beta^{\frac{n-3}{2}}$$

segun las potencias de $(\alpha-\beta)$, así que resulte la forma (17), o sea

$$H'_0=(\alpha-\beta).\phi(\alpha-\beta)$$

Esta ecuacion indica que H'_0 es divisible por $(\alpha-\beta)$ o, con otros términos, que H'_0 desaparece, siendo $\alpha=\beta$. Se admite aquí prescindir por completo de la naturaleza de α i de β como números enteros i positivos, etc., i demostrar aljebráicamente que H'_0 desaparece para $\alpha=\beta$. Mas ventajoso todavia parece demostrar que la funcion H^0, definida por la ecuacion (13): toma el valor 0 para $\alpha=\beta$. Siendo

$$H_0=(a+b)H'_0,$$

se sigue de $H_0=0$ tambien $H'_0=0$.

Multiplicando H_0 por n se deja escribir esta espresion así

$$\left.\begin{aligned} n.H_0=&\binom{n}{1}\left(a^{n-2}+b^{n-2}\right)+\binom{n}{2}(ab)\left(a^{n-4}+b^{n-4}\right)+\\ &+\binom{n}{3}(ab)^2\left(a^{n-6}+b^{n-6}\right)+\ldots+\binom{n}{\frac{n-3}{2}}(ab)^{\frac{n-5}{2}}\left(a^3+b^3\right)=\\ &+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}(ab)^{\frac{n-3}{2}}(a+b). \end{aligned}\right\}(18)$$

Designando por d los valores iguales $a+b=\sqrt{ab}$, podemos formar una série de ecuaciones que se fundan en

$$a+b=\sqrt{ab}=d,$$

i son las siguientes

$$a^2+b^2=d^2-2ab=-d^2$$
$$a^3+b^3=(a^2+b^2)(a+b)-ab(a+b)=-2d^3$$
$$a^5+b^5=(a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)=d^5$$
$$a^7+b^7=(a^5+b^5)(a^2+b^2)-a^2b^2(a^3+b^3)=d^7$$
$$a^9+b^9=(a^7+b^7)(a^2+b^2)-a^2b^2(a^5+b^5)=-2d^9$$

Jeneralmente será

$$\left.\begin{aligned} & a^{2r+1}+b^{2r+1}=d^{2r+1} \text{ para } r\equiv 0,\ 2 \bmod 3 \\ \text{i}\quad & a^{2r+1}+b^{2r+1}=-2d^{2r+1} \text{ para } r\equiv 1 \bmod 3 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Supongamos probado ésto hasta un valor $s\equiv 1 \bmod 3$ de suerte que

$$a^{2s+1}+b^{2s+1}=-2d^{2s+1}$$

i, a causa de $s-1\equiv 0 \bmod 3$,

$$a^{2s-1}+b^{2s-1}=d^{2s-1}$$

Luego será

$$a^{2(s+1)+1}+b^{2(s+1)+1}=(a^{2s+1}+b^{2s+1})(a^2+b^2)-a^2b^2(a^{2s-1}+b^{2s-1})=$$
$$=d^{2(s+1)+1}$$

ademas

$$a^{2(s+2)+1}+b^{2(s+2)+1}=(a^{2(s+1)+1}+b^{2(s+1)+1})(a^2+b^2)-$$
$$-a^2b^2(a^{2s+1}+b^{2s+1})=d^{2(s+2)+1}$$

i en fin

$$a^{2(s+3)+1}+b^{2(s+3)+1}=(a^{2(s+2)+1}+b^{2(s+2)+1})(a^2+b^2)-$$
$$-a^2b^2(a^{2(s+1)+1}+b^{2(s+1)+1})=-2d^{2(s+3)+1}$$

Por haber demostrado estas ecuaciones hasta $s=4\equiv 1 \bmod 3$, las ecuaciones (19) tienen valor jeneral.

Aprovechando las ecuaciones (19), para $(a+b)^2=ab$ i, en el caso $n=3\nu+1$, en el cual se tiene $n-4\equiv 0 \bmod 3$, se convierte la ecuacion (18) en

$$\left.\begin{aligned} nH_0=d^{n-2}\Big[\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-2\binom{n}{5}+\ldots\ldots+\\ +\binom{n}{\frac{n-5}{2}}-2\binom{n}{\frac{n-3}{2}}+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\Big]\end{aligned}\right\}(20)$$

Para averiguar el valor del paréntesis, nos apoyamos en dos teoremas, sacados de la teoría de los coeficientss binomiales, a saber:

El primero es: Siendo n un número impar, se tiene

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots\ldots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=2^{n-1}-1 \qquad (21)$$

lo que se comprueba, haciendo en

$$(p+q)^n=p^n+\binom{n}{1}p^{n-1}q+\binom{n}{2}p^{n-2}q^2+\ldots.+\binom{n}{2}p^2q^{n-2}+$$
$$+\binom{n}{1}pq^{n-1}+q^n$$

$p=q=1$.

I el segundo da una fórmula que sirve para pasar de un número cualquiera n a $n-2$, la que es

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n-2}{k}+2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2} \qquad (22)$$

siendo k un número entero menor que n.

Apliquemos ahora primero la ecuacion (21) a la (20), i será

$$n.H_0=d^{n-2}\left[2^{n-1}-1-3\left\{\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\ldots+\binom{n}{\frac{n-9}{2}}+\binom{n}{\frac{n-3}{2}}\right\}\right],$$

Utilicemos en seguida para la suma

$$N=\binom{n}{\frac{n-3}{2}}+\binom{n}{\frac{n-9}{2}}+\ldots.+\binom{n}{5}+\binom{n}{3}$$

las ecuaciones (22) i (21), i resultarán para a las espresiones siguientes:

$$N=\binom{n-2}{\frac{n-3}{2}}+2\binom{n-2}{\frac{n-5}{2}}+\binom{n-2}{\frac{n-7}{2}}+\binom{n-2}{\frac{n-9}{2}}+2\binom{n-2}{\frac{n-11}{2}}+$$

$$+\binom{n-3}{\frac{n-13}{2}}+\ldots.+\binom{n-2}{5}+2\binom{n-2}{4}+\binom{n-2}{3}+\binom{n-2}{2}+$$

$$+2\binom{n-2}{1}+\binom{n-2}{0}^{(*********)}=2^{n-3}+\binom{n-2}{\frac{n-5}{2}}+\binom{n-2}{\frac{n-11}{2}}+\ldots+$$

$$+\binom{n-2}{4}+\binom{n-2}{1}=2^{n-3}+\binom{n-4}{\frac{n-5}{2}}+2\binom{n-4}{\frac{n-7}{2}}+\binom{n-4}{\frac{n-9}{2}}+$$

$$+\binom{n-4}{\frac{n-11}{2}}+2\binom{n-4}{\frac{n-13}{2}}+\binom{n-4}{\frac{n-15}{2}}+\ldots\ldots+\binom{n-4}{4}+2\binom{n-4}{3}+$$

$$+\binom{n-4}{2}+\binom{n-4}{1}+2=2^{n-3}+2^{n-5}+1+\binom{n-4}{\frac{n-7}{2}}+\binom{n-4}{\frac{n-13}{2}}+\ldots+$$

$$+\binom{n-4}{3}=2^{n-3}+2^{n-5}+1+\binom{n-6}{\frac{n-7}{2}}+2\binom{n-6}{\frac{n-9}{2}}+\binom{n-6}{\frac{n-11}{2}}+\ldots..+$$

$$+\binom{n-6}{3}+2\binom{n-6}{2}+\binom{n-6}{1}$$

o

$$N=2^{n-3}+2^{n-5}+2^{n-7}+\binom{n-6}{\frac{n-9}{2}}+\ldots\ldots..+\binom{n-6}{2}$$

Si continuamos de tal modo, aplicando a N las ecuaciones (21) i (22), tenemos que encontrar en fin el coeficiente binomial

$$\binom{n-(n-5)}{\frac{n-3}{2}-\frac{n-5}{2}}=\binom{5}{1}$$

porque, partiendo del coeficiente binomial $\binom{n}{\frac{n-3}{2}}$, hemos notado trasformarse, en virtud de (22), n en $n-2$, $n-4$, $n-6$, etc., dis-

(*********) $\binom{n-2}{0}=1$, porque es el coeficiente de la potencia $n-2$ en el desarrollo de cualquier binomio de la forma $(p+q)^{n-2}$

minuyendo en dos unidades cada vez, miéntras $\frac{n-3}{2}$ se ha trasformado, en $\frac{n-5}{2}, \frac{n-7}{2}, \frac{n-9}{2}$, etc., decreciendo en una unidad cada vez.

Resulta, por lo tanto, el valor de N como

$$N = 2^{n-3} + 2^{n-5} + 2^{n-7} + \ldots\ldots + 2^6 + 2^4 + \binom{5}{1}$$

o por ser $\binom{5}{1} = 5 = 2^2 + 1$, será

$$N = 2^{n-3} + 2^{n-5} + 2^{n-7} + \ldots\ldots + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1$$

Sustituyendo en nH_0 en lugar de N su valor i poniendo $3 = 2 + 1$, se tiene

$$n.H_0 = d^{n-2}\left[2^{n-1} - 1 - (2+1)\left\{2^{n-3} + 2^{n-5} + \ldots + 2^4 + 2^2 + 1\right\}\right]$$

o, efectuando la multiplicacion,

$$n.\,H_0 = d^{n-2}\left[2^{n-1} - 1 - \left\{2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + \ldots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1\right\}\right]$$

Pero el término sumatorio de la progresion por cociente

$$2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots\ldots + 2^2 + 2 + 1$$

es $2^{n-1} - 1$, i por eso es $n.\,H_0 = 0$, o

$$H_0 = 0$$

En el caso de $n = 3\nu + 2$, se convierte la ecuacion (18), por su $n - 2 \equiv 0 \bmod 3$, en

$$nH_0 = d^{n-2}\left[-2\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - 2\binom{n}{4} + \binom{n}{5} + \ldots\ldots + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{\frac{n-5}{2}} - 2\binom{n}{\frac{n-3}{2}} + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right] =$$

$$= d^{n-2}\left[2^{n-1} - 1 - 3\left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \ldots\ldots + \binom{n}{\frac{n-9}{2}} + \binom{n}{\frac{n-3}{2}}\right\}\right]$$

Las mismas ideas arriba espuestas dan, aplicadas a la suma

$$\binom{n}{\frac{n-3}{2}}+\binom{n}{\frac{n-9}{2}}+\ldots\ldots+\binom{n}{4}+\binom{n}{1},$$

en fin, el coeficiente binomial $\binom{5}{1}$, es decir la misma espresion para nH_0, i es $nH_0=0$ o

$$H_0=0$$

Hemos demostrado, por lo tanto, que en los dos casos posibles de $n\equiv 1$ i $n\equiv 2$ mod 3 es $H_0=0$ i, por esto, $H'_0=0$ o, con otros términos, que H'_0 es divisible por $\alpha-\beta=(a+b)^2-ab$.

Séame permitido, ántes de pasar a la trasformacion de H'_0, verificar el resultado $nH_0=0$ en dos ejemplos:

1) $$n=13=3.4+1$$

Tenemos

$$13H_0=\binom{13}{1}(a^{11}+b^{11})+\binom{13}{2}ab(a^9+b^9)+\binom{13}{3}a^2b^2(a^7+b^7)+$$

$$+\binom{13}{4}a^3b^3(a^5+b^5)+\binom{13}{5}a^4b^4(a^3+b^3)+\binom{13}{6}a^5b^5$$

i para $\alpha=\beta$

$$13H_0=d^{11}\left[\binom{13}{1}-2\binom{13}{2}+\binom{13}{3}+\binom{13}{4}-2\binom{13}{5}+\binom{13}{6}\right]=$$

$$=d^{11}\left[2^{12}-1-3\left\{\binom{13}{5}+\binom{13}{2}\right\}\right]=$$

$$=d^{11}\left[2^{12}-1-3\left\{\binom{11}{5}+2\binom{11}{4}+\binom{11}{3}+\binom{11}{2}+2\binom{11}{1}+\binom{11}{0}\right\}\right]=$$

$$=d^{11}\left[2^{12}-1-3\left\{2^{10}+\binom{11}{4}+\binom{11}{1}\right\}\right]=$$

$$=d^{11}\left[2^{12}-1-3\left\{2^{10}+\binom{9}{4}+2\binom{9}{3}+\binom{9}{2}+\binom{9}{1}+2\right\}\right]=$$

$$=d^{11}\left[2^{12}-1-3\left\{2^{10}+2^8+1+\binom{9}{3}\right\}\right]=$$

$$=d^{11}\left[2^{12}-1-3\left\{2^{10}+2^8+1+\binom{7}{3}+2\binom{7}{2}+\binom{7}{1}\right\}\right]=$$

$$=d^{11}\left[2^{12}-1-3\left\{2^{10}+2^3+2^6+\binom{7}{2}\right\}\right]=$$

$$=d^{11}\left[2^{12}-1-3\left\{2^{10}+2^8+2^6+\binom{5}{2}+2\binom{5}{1}+\binom{5}{0}\right\}\right]=$$

$$=d^{11}\left[2^{12}-1-3\left\{2^{10}+2^8+2^6+2^4+\binom{5}{1}\right\}\right]=$$

$$=d^{11}\left[2^{12}-1-(2+1)\left\{2^{10}+2^8+2^6+2^4+2^2+1\right\}\right]=$$

$$=d^{11}\left[2^{12}-1-\left\{2^{11}+2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^4+2^3+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2^2+2+1\right\}\right]=$$

$$=d^{11}\left[2^{12}-1-\left\{2^{12}-1\right\}\right]=0$$

2) $$n=11=3.3+2$$

Aquí se convierte

$$11H_0=\binom{11}{1}(a^9+b^9)+\binom{11}{2}ab(a^7+b^7)+\binom{11}{3}a^2b^2(a^5+b^5)+$$

$$+\binom{11}{4}a^3b^3(a^3+b^3)+\binom{11}{5}a^4b^4(a+b)$$

en las igualdades siguientes, para $\alpha=\beta$,

$$11H_0=d^9\left[-2\binom{11}{1}+\binom{11}{2}+\binom{11}{3}-2\binom{11}{4}+\binom{11}{5}\right]=$$

$$=d^9\left[2^{10}-1-3\left\{\binom{11}{4}+\binom{11}{1}\right\}\right]=$$

$$=d^9\left[2^{10}-1-3\left\{\binom{9}{4}+2\binom{9}{3}+\binom{9}{2}+\binom{9}{1}+2\right\}\right]=$$

$$=d^9\left[2^{10}-1-3\left\{2^8+1+\binom{9}{3}\right\}\right]=$$

$$=d^9\left[2^{10}-1-3\left\{2^8+1+\binom{7}{3}+2\binom{7}{2}+\binom{7}{1}\right\}\right]=$$

$$=d^9\left[2^{10}-1-3\left\{2^8+2^6+\binom{7}{2}\right\}\right]=$$

$$=d^9\left[2^{10}-1-3\left\{2^8+2^6+\binom{5}{2}+2\binom{5}{1}+\binom{5}{0}\right\}\right]=$$

$$=d^9\left[2^{10}-1-2\left\{2^8+2^6+2^4+\binom{5}{1}\right\}\right]=$$

$$=d^9\left[2^{10}-1-(2+1)\left\{2^8+2^6+2^4+2^2+2+1\right\}\right]=$$

$$=d^9\left[2^{10}-1-\left\{2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2+1\right\}\right]=$$

$$=d^9\left[2^{10}-1-\left\{2^{10}-1\right\}\right]=0$$

Demostrado de tal manera que

$$H_o'=\alpha^{\frac{n-3}{2}}-\frac{n-3}{2!}\alpha^{\frac{n-3}{2}-1}\beta+\frac{(n-4)(n-5)}{3!}\alpha^{\frac{n-3}{2}-2}\beta^2\pm\ldots\ldots+$$

$$+(-1)^m\frac{(n-(m+1))(n-(m+3))\ldots(n-(2m+1))}{(m+1)!}\alpha^{\frac{n-3}{2}-m}\beta^m\pm\ldots+(-1)^{\frac{n-3}{2}}\beta^{\frac{n-3}{2}}$$

es dividible por $(\alpha-\beta)$, podemos proceder ahora a la trasformacion de H_o' en un desarrollo segun las potencias decrecientes de $(\alpha-\beta)$.

Pongamos, por este fin, H_o' en la forma

$$H_o'=\alpha^{\frac{n-3}{2}}+\sum_{m=1}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^m\frac{(n-(m+2))(n-(m+3))\ldots(n-(2m+1))}{(m+1)!}\alpha^{\frac{n-3}{2}-m}\beta^m$$

i apartemos primero $(\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}}$ i, en seguida, las potencias de $(\alpha-\beta)$ con el mayor esponente posible que se puedan sacar cada vez de la suma Σ. Por medio de estos procedimientos obtenemos fácilmente, en lugar de la última ecuacion, las siguientes:

$$H_0'=(\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}}+\sum_{m=2}^{\frac{n-5}{2}}(-1)^m\times$$

$$\times\left\{\frac{[n-(m+2)][n-(m+3)]\ldots[n-(2m+1)]}{(m+1)!}-\right.$$

$$\left.-\frac{(n-3)(n-5)\ldots[n-(2m+1)]}{2^m.\ m!}\right\}\alpha^{\frac{n-3}{2}-m}\beta^m$$

despues

$$H_0'=(\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}}+\frac{(n-5)(n-7)}{2^2.\ 3!}\alpha\beta^2(\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}-3}+$$

$$+\sum_{m=6}^{\frac{n-7}{2}}(-1)^m\left\{\frac{[n-(m+2)][n-(m+3)]\ldots[n-(2m+1)]}{(m+1)!}-\right.$$

$$-\frac{(n-3)(n-5)\ldots[-(2m+1)]}{2^m.\ 1!\ m!}-$$

$$\left.-\frac{(n-5)(n-7)\ldots[n-(2m+3)]}{2^m.\ 3!\ (m-2)!}\right\}\alpha^{\frac{n-3}{2}-m}\beta^m.$$

en seguida

$$H_0'=(\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}}+\frac{(n-5)(n-7)}{2^2.\ 3!}\alpha\beta^2(\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}-3}+$$

$$+\frac{(n-7)(n-9)(n-11)(n-13)}{2^4.\ 5!}\alpha^2\beta^4(\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}-6}+$$

$$+\sum_{m=6}^{\frac{n-9}{2}}(-1)^m\left\{\frac{[n-(m+2)][n-(m+3)]\ldots[n-(2m+1)]}{(m+1)!}-\right.$$

$$-\frac{(n-3)(n-5)\ldots[n-(2m+1)]}{2^m.\ 1!\ m!}-\frac{(n-5)n-7)\ldots[n-(2m+3)]}{2^m.\ 3!\ (m-2)!}$$

$$\left.-\frac{(n-7)(n-9)\ldots[n-(2m+5)]}{2^m.\ 5!\ (m-4)!}\right\}\alpha^{\frac{n-3}{2}-6}\beta^m.$$

luego

$$H_0' = (\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}} + \frac{(n-5)(n-7)}{2^2 .\ 3!}\alpha\beta^2(\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}-3} +$$

$$+ \frac{(n-7)(n-9)(n-11)(n-13)}{2^4 .\ 5!}\alpha^2\beta(\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}-6} +$$

$$+ \frac{(n-9)(n-11)(n-13)(n-15)(n-17)(n-19)}{2^6 .\ 7!}\alpha^3\beta^6(\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}-9} +$$

$$+ \sum_{m=8}^{\frac{n-11}{2}}(-1)^m \Big\{ \frac{[n-(m+2)][n-(m+3)]..[n-(2m+1)]}{(m+1)!} -$$

$$- \frac{(n-3)(n-5)..[n-(2m+1)]}{2^m .\ 1!\ m!} - \frac{(n-5)(n-7)..[n-(2m+3)]}{2^m .\ 3!\ (m-2)!} -$$

$$- \frac{(n-7)(n-9)..[n-(2m+5)]}{2^m .\ 5!\ (m-4)!} - \frac{(n-9)(n-11)..[n-(2m+7)]}{2^m .\ 7!\ (m-6)!} \Big\} \times$$

$$\times \alpha^{\frac{n-3}{2}-m}\beta^m$$

Admitimos ahora el siguiente razonamiento:

Si una funcion racional i entera de α i β cuyos coeficientes númericos estan formados segun cierta lei, asi que se dejan representar por una fórmula jeneral, es divisible por $\alpha-\beta$ i si se han encontrado, desarrollando la funcion segun las potencias de $(\alpha-\beta)$, los primeros coeficientes, hasta cualquier punto del desarrollo, tambien capaces de ser representados por una fórmula jeneral, se puede, aprovechando esta fórmula, igualar la funcion con el desarrollo.

Siendo H_0' una tal funcion de α i β, divisible por $(\alpha-\beta)$ i cuyos coeficientes obedecen a la lei espresada por

$$\sum_{m=1}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^m \frac{(n-(m+2))(n-(m+3))\ \ldots\ (n-(2m+1))}{(m+1)!}$$

i siendo posible representar los tres primeros coeficientes del desarrollo segun las potencias de $(\alpha-\beta)$, a saber

$$\frac{(n-5)(n-7)}{2^2 .3!},\quad \frac{(n-7)(n-9)(n-11)(n-13)}{2^4 .5!},$$

$$\frac{(n-9)(n-11)(n-13)(n-15)(n-17)(n-19)}{2^6 .7!}$$

por

$$\frac{[n-(2r+3)][n-(2r+5)]\,.\,.\,.\,.\,.\,[n-(6r+1)]}{2^{2r}(2r+1)!}$$

para $r=1, 2, 3$, podemos escribir

$$H_0'=(\alpha-\beta)\sum_{r=1}^{R}\frac{[n-(2r+3)][n-(2r+5)]\,.\,.\,.\,.\,[n-(6r+1)]}{2^{2r}(2r+1)}\times$$

$$\times\,\alpha^r\beta^{2r}(\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}-3r}$$

Queda indeterminado todavia en esta fórmula el límite superior de la suma el que hemos designado por R. Para determinarlo tenemos que distinguir otra vez entre los casos de $n=3\nu+1$ i $n=3\nu+2$.

1) $n=3\nu+1$ o, por ser n número impar, $n=6\nu'+1$ da

$\frac{n-3}{2}=3\nu'-1\equiv-1\equiv2 \bmod 3$ i, por eso, $\frac{n-3}{2}-3r\equiv2 \bmod 3$.

El último de los esponentes de $(\alpha-\beta)$ tiene que ser, por consiguiente, $=2$, o sea

$$\frac{n-3}{2}-3R=2$$

lo que da

$$R=\frac{n-7}{6}$$

2) $n=3\nu+2$ o, por ser $n\equiv1 \bmod 2$, $n=6\nu'+5$ da

$\frac{n-3}{2}=3\nu'+1\equiv1 \bmod 3$ i, por lo tanto,

$\frac{n-3}{2}-3r\equiv1 \bmod 3$

De aquí se deduce que el menor esponente de $(\alpha-\beta)$ debe ser $=1$, i, por eso,

$$\frac{n-3}{2}-3R=1$$

o

$$R=\frac{n-5}{6}$$

Resumimos el resultado de las pájinas anteriores, diciendo:

1.º Que, siendo n un número primo i $\equiv 1$ mod 3, la funcion arriba definida

$$H_0' = (\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}} + \sum_{r=1}^{\frac{n-7}{6}} \frac{[n-(2r+3)][n-(2r+5)]\ldots[n-(6r+1)]}{2^{2r}.\ (2r+1)!} \times$$

$$\times\, \alpha^r \beta^{2r} (\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}-3r}$$

es decir, el coeficiente de G^0 en la ecuacion (12), prescindiendo de $nab(a+b)$, es divisible por el cuadrado de $(\alpha-\beta)$, o sea por

$$[(a+b)^2-ab]=(a^2+ab+b^2)^2$$

i tiene, en conformidad con la fórmula (17), la forma

$$H_0' = (\alpha-\beta)^2\, \psi(\alpha, \beta) = [(a+b)^2-ab]^2\, \psi[(a+b)^2, ab] \qquad (24)$$

o

$$H_0' = (a^2+ab+b^2)^2 \Big\{ (a^2+ab+b^2)^{\frac{n-7}{2}} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\frac{n-7}{6}} \frac{[n-(2r+3)][n-(2r+5)]\ldots\ldots[n-(6r+1)]}{2^{2r}(2r+1)!} \times$$

$$\times (ab)^{2r} (a+b)^{2r} (a^2+ab+b^2)^{\frac{n-7}{2}-3r} \Big\} \qquad (25)$$

2.º Que para un número primo $n \equiv 2$ mod 3 la funcion

$$H_0' = (\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}} + \sum_{r=1}^{\frac{n-5}{6}} \frac{[n-(2r+3)][n-(2r+5)]\ldots[n-(6r+1)]}{2^{2r}(2r+1)!} \times$$

$$\times\, \alpha^r \beta^{2r} (\alpha-\beta)^{\frac{n-3}{2}-3r}$$

es divisible por

$$\alpha-\beta = (a+b)^2 - ab = a^2+ab+b^2$$

i tiene, conforme a la ecuacion (17), la forma

$$H_0' = (\alpha - \beta)\psi_1(\alpha, \beta) = [(a+b)^2 - ab]\psi_1[(a+b)^2, ab] \tag{26}$$

o

$$H_0' = (a^2+ab+b^2)\Big\{(a^2+ab+b^2)^{\frac{n-5}{2}} +$$

$$+\sum_{r=1}^{\frac{n-5}{6}} \frac{[n-(2r+3)][n-(2r+5)]\dots[n-(6r+1)]}{2^{2r}(2r+1)!} \times$$

$$\times (ab)^{2r}(a+b)^{2r}(a^2+ab+b^2)^{\frac{n-3}{2}-3r}\Big\} \tag{27}$$

DR. A. TAFELMACHER
Profesor de matemáticas del Instituto Pedagójico

(Continuará)