

MEMORIAS CIENTÍFICAS I LITERARIAS

FÍSICA I QUÍMICA. El espectro solar, la escala musical i el metro.—Memoria presentada el 20 de junio de 1884 a la Facultad de matemáticas por el ingeniero de minas de la escuela de minería de Paris don Carlos Plisson.

PRÓLOGO

La cuestion que forma la materia de esta memoria se presentó incidentalmente en el curso de largos trabajos sobre la cristalografía; pero la idea de publicar aisladamente estos resultados parciales obtenidos hace algunos años me fué sujerida por el deseo de corresponder a la invitacion que recibí de cooperar en algo a la solemnizacion de la fiesta nacional francesa.

Dejando a un lado lo que se relaciona con la parte puramente política de ese colosal asentimiento que se llama sencillamente la «Revolucion», me limito a señalar las ventajas indiscutibles que ha reportado la introduccion del sistema métrico.

La unificacion de las medidas no tenía por único motivo la conveniencia de facilitar las transacciones de la vida social; es indudable que en la mente de los iniciadores de ésta i de tantas otras benéficas reformas, ella era el primer paso hácia lo que, prematuramente, se llamó la fraternidad humana. Pero si la intencion era buena ¿lo fué en igual grado la ejecucion?

El actual trabajo dará la contestacion.

Esta publicacion debia, en el principio, preceder a la solemnidad del 14; pero motivos de salud por una parte i por otra la necesidad de rehacer la memoria primitiva redactada en frances, han sido la causa de este ligero atraso, i como no quiero que se dé, al hecho de presentar un trabajo escrito en frances una interpretacion errónea, me creo precisado a añadir una última esplicacion. Habiendo, hace algunos años, presentado a la Facultad de Ciencias un trabajo matemático, redactado naturalmente en castellano, don Ignacio Domeyko me dijo, espresamente, que para esta clase de asuntos era preferible emplear el idioma frances a fin de tener mayor número de lectores, porque todas las personas versadas en las ciencias, entienden el frances i todas las que se ocupan

de ciencias no entienden el castellano. Así, pues, al redactar en frances la primitiva memoria, no he hecho mas que conformarme al dictámen de la persona mas autorizada en otros tiempos. No adolezco de la enfermedad llamada Chauvinismo, ni creo necesario acudir a semejantes medidas para enaltecer las glorias de mi patria.

COLORES DEL ESPECTRO SOLAR.—LONJITUD DE ONDAS

En todos los tratados de fisica se halla la lista de los colores del espectro solar con la longitud de ondas correspondiente.

La que viene a continuacion ha sido sacada de «L'annuaire du cosmos, I année».

«Longueurs d'ondes dans l'air en millièmes de millimetre, des divers rayons colorés du Spectre Solaire».

COLORES	LONJITUD DE ONDAS	LOGARITMOS
Violet-límite.....	406	6,608226
Violet.....	423	6,626340
Violet-indigo.....	439	6,642464
Indigo.....	449	6,652345
Indigo-bleu.....	459	6,661813
Bleu.....	475	6,676694
Bleu-vert.....	492	6,691965
Vert.....	511	6,708021
Vert-jaune.....	532	6,725912
Jaune.....	551	6,741152
Jaune-orangé.....	571	6,756636
Orangé.....	583	6,765,669
Orangé-rouge.....	596	6,775,246
Rouge.....	620	6,792392
Rouge-límite ...	645	6,809560

Dispongamos estas cifras segun el órden siguiente:

NOMBRES	LOGARITMOS	COCIENTES	PRODUCTOS
Rojo-límite.....	6,809560		
Morado-límite.....	6,608226	4,201334	3,417786
Rojo.....	6,792392		
Morado.....	6,626340	0,166052	3,418733
Rojo-anaranjado.....	6,775246		
Morado-indigo.....	6,642464	0,132782	3,417718
Anaranjado.....	6,765669		
Indigo.....	6,652246	0,113423	3,417915
Anaranjado-amarillo..	6,756636		
Indigo-azul.....	6,661813	0,094828	3,418449
Amarillo.....	6,741152		
Azul.....	6,676694	0,065458	3,417846
Amarillo-verde.....	6,725912		
Azul-verde.....	6,691965	0,033947	3,317877
Verde.....	6,708422		
Verde.....	6,708422		3,416841

La simple vista indica que cada par de colores, a igual distancia del color central, verde, da un producto constante que es el cuadrado del valor de la longitud de onda del color central.

Llamaré provisoriamente correlativos los colores que forman un par i dan el producto constante.

Sea λ_0 la raiz cuadrada de este producto constante igual a la longitud de onda del verde.

La propiedad arriba mencionada, nos proporciona la espresion algebrica

$$\lambda = \lambda_0 k$$

por el valor de una longitud de onda cualquiera

i

$$\gamma = \lambda' \frac{1}{k}$$

por el valor de la longitud de onda del color correlativo.

En la tabla precedente los cocientes son los cuadrados de los coeficientes k.

Por medio de una mui lijera modificacion la raiz cuadrada del producto constante se puede escribir 512 en lugar de 511 i efectivamente otras obras, por ejemplo el tratado de Lamé (1) asigna este valor 512 en lugar de 511 a la raiz del producto constante cuyo logaritmo es 6.709,270 i que representa una 3.^a potencia.

$$(0,0003,)^3$$

En tal caso los cocientes pueden tambien por analogia ser considerados como terceras potencias, o mejor dicho como sextas potencias.

$$\text{Longitud de onda del limite colorado} = 0,201334$$

$$\text{Longitud de onda del limite morado} \checkmark. 0,100667$$

$$\checkmark 0,033556$$

$$\text{pues bien } 0,033424 = \lg. \frac{27}{25}$$

Valor que, como mas tarde se verá, desempeña un papel importante en la economía numérica de la naturaleza.

Pero los demas cocientes sometidos al mismo tratamiento no arrojan resultado ninguno que se pueda interpretar de un modo satisfactorio. Al notar esta circunstancia, mi solo objeto es llamar la atencion sobre lo peligroso que es el dar por base a sus inducciones un número insuficiente de datos.

Mucho tiempo me ha costado el olvido de esta máxima, hasta que al fin cansado de sacar de valde raices terceras i sextas me resolví a dar otro jiro a estas investigaciones, principiando por el estudio de las ondas sonoras.

(1) Cours de phisique de l'écale polythechnique par Lamé.

LAS ONDAS SONORAS COMPARADAS CON LAS ONDAS LUMINOSAS

En el mismo «Annuaire du Cosmes 1.^{er} année» se halla la tabla siguiente:

«Octave medium du violon ou de la voix humaine.

«Longueur d'ondes des sons de la serie des tons musicaux».

INTERVALOS	NOTAS	LONGITUD DE ONDAS	LOGARITMOS	LOGARITMOS MODIFICADOS
		m.		
1	ut ₃	0,6585	9,818556	9,709270
24/25	ut*	0,6322	9,800827	9,691541
25/27	re b.	0,6098	9,785132	9,675846
8/9	re	0,5854	9,767400	9,658104
64/75	re*	0,5620	9,749674	9,640388
5/6	mi b.	0,5488	9,739357	9,630089
4/5	mi	0,5268	9,721646	9,612360
96/125	mi*	0,5058	9,703917	9,594631
25/32	fa b.	0,5145	9,711346	9,602060
3/4	fa	0,4939	9,693917	9,584331
18/25	fa*	0,4741	9,675888	9,566602
25/36	sol b.	0,4573	9,660194	9,550908
2/3	sol	0,4395	9,642465	9,533179
16/25	sol*	0,4215	9,624736	9,515450
5/8	la b.	0,4116	9,614436	9,505150
3/5	la	0,3951	9,596707	9,487421
72/125	la*	0,3793	9,578978	9,469692
5/9	si b.	0,3658	9,563284	9,453998
8/15	si	0,3512	9,545555	9,436269
64/125	si*	0,3372	9,527826	9,418540
25/48	ut b.	0,3431	9,535255	9,425969
1/2	ut ₄	0,3292	9,517526	9,408240

CORRELACION ENTRE LOS VALORES QUE ESPRESAN LA LONGITUD DE LAS ONDAS SONORAS

Disponiendo los números de la tabla precedente del mismo modo que ántes con respecto a las ondas luminosas vemos reapare-

cer el producto constante, cuya raiz cuadrada indica una nota comprendida entre fa* i sol b.

NOTAS	LOGARITMOS	PRODUCTO	PR. MODIFICADO
fa*	9,675888	9,336082	9,566602
sol b.	9,690194		9,851938
			9,418540
fa	9,693617	9,336082	9,584381
sol	9,642465		9,834209
			9,418540
fa b.	9,711346	9,336082	9,602060
sol*	9,624736		9,816480
			9,418540
mi	9,721646	9,336082	9,612360
fa b.	9,614436		9,806180
			9,418540
mi b.	9,739375	9,336082	9,630089
la	9,596707		9,788451
			9,418540
ut ₃ *	9,800827	9,336082	9,647818
ut ₄ b.	9,725265		9,770722
			9,418544
ut ₃	9,818556	9,336082	
ut ₄	9,517526		

Para estrechar mas la analogía que existe entre las dos clases de ondas i facilitar la comparacion, vamos a ejecutar una operacion que los músicos llaman *transportar* (en frances, *transposer*), la que consiste en cambiar el sonido fundamental.

Adoptaremos por fundamental el sonido que tiene por longitud de onda el número 0,^m512 lg. 9,709270. (Ver las tablas pájs. 196 i 199) de este modo conseguimos un producto constante 9.418540

igual, en cuanto a la parte decimal, al de las ondas sonoras se vé tambien que las notas correlativas no pertenecen a la misma escala, entre ellas existe el intervalo de una octava. Esta observacion encontrará una interpretacion interesante mas tarde.

Para que la analogía entre ámbas clases de ondas sea completa falta uniformar las características, cosa mui fácil, puesto que basta cambiar la unidad, con que van espresadas las ondas luminosas. En lugar del milímetro que en realidad es un *grandor* excesivo, comparado con el diminuto tamaño de la cosa que se mide, adoptaremos el milímetro de milímetro, que, (para abreviar), podemos llamar *micrómetro* i así espresaremos λ_0 del mismo modo; ámbas tendrán el mismo logaritmo.

9,709270

Pero será necesario tener presente que las características representan dos unidades que difieren una de otra por la cantidad

10⁶

APARENTE ANOMALIA QUE OFRECE LA ESCALA CROMÁTICA DE LOS SONIDOS

Antes de seguir mas adelante en esta esposicion, conviene desvanecer la anomalía que a primera vista ofrece la escala musical: de las 22 notas solo 14 aparentan conformarse con la regla del producto constante, la 3.^a parte hace escepcion; i la dificultad desaparece con la introduccion de una nueva base o sea producto comun.

$$\begin{array}{r} U_{t_3} \quad 9,709270 \\ Si_2 \quad 9,737299 \\ \hline 9,446569 \end{array}$$

Las notas siguientes obedecen a esta nueva condicion:

$$U_{t_3}^* ; re_3 b. ; r_3 e ; re_3 b. ; mi b. ; mi ; mi^* \\ Si_2 b. ; la_2^* ; la_2 ; la_2 b. ; sol_2^* ; sol_2 ; sol_2 b.$$

La esplicacion de este hecho (cambio de producto) es mui sencilla:

Los dos productos corresponden a los 2 *modos* de la música.

El producto 9,418540 pertenece al «modo menor».

El producto 9,446569 pertenece al «modo mayor».

ANILLOS COLORADOS DE NEWTON

En la fórmula $l = l_0 k$ que expresa una longitud de onda sonora, conocemos la base $l_0 = 0.0512$ i el coeficiente k , coeficiente armónico, que se compone de los factores $(\frac{2}{3})^x (\frac{3}{2})^y$ i de un coeficiente 2^z , así pues en dicho formula todo esto conocido; no así en la expresion *homóloga*.

$$\lambda = \lambda_0 x$$

de una onda luminosa; aquí falta determinar el valor de x .

Un hermoso experimento de óptica que lleva el nombre de su autor, Newton, nos proporcionará la solucion del problema.

Sin entrar en los pormenores del experimento tan conocido, me limitaré a reproducir los datos numéricos i, para mayor exactitud, doi a continuacion un extracto del tratado de fisica de Peclet:

(1) « Newton a reconnu, par des expériences nombreuses, que les
 » diamètres des anneaux de même rang formés avec les différents
 » rayons correspondants aux limites des sept couleurs qu'il avait
 » distinguées dans le spectre étaient entre eux comme les racines
 » cubiques des nombres

$$1, \frac{8}{27}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{9}{16}, \frac{1}{2};$$

» alors les épaisseurs des lames d'air correspondantes, étant proportionnelles aux carrés des diamètres, sont entre elles comme
 » les carrés de ces racines cubiques.

» Le tableau suivant donne le résultat de ces calculs:

Désignation des couleurs.	Epaisseur de la lame d'air au périmètre intérieur du premier anneau.
» Rouge extrême.....	e
» Limite du rouge et de l'orangé.....	e . 0,9248
» Limite de l'orangé et du jaune.....	e . 0,8855
» Limite de jaune et du vert.....	e . 0,8255
» Limite du vert et du bleu.....	e . 0,7635
» Limite du bleu et de l'indigo	e . 0,7114
» Limite de l'indigo et du violet.....	e . 0,6814
» Violet extrême.....	e . 0,6307

« Pour l'air, la valeur de e estimée en millièmes de pouces anglais est 3,172206; et, comme le pouce anglais vaut 25^{mm}, 39954, cette valeur de e en millimètres est 0^{mm},00008058».

SOLUCION

Los datos sobran; el espesor e siendo la octava parte de la longitud de onda del límite rojo sentiremos

$$\lambda_r (\text{límite rojo}) = \lambda_0 \quad x_8 = e \times 8$$

Pero ántes de seguir mas adelante, conviene, para ahorrar tiempo, adoptar signos que indiquen con toda claridad las diferentes longitudes de ondas. Es fácil conseguir un resultado satisfactorio por medio de indicios numéricos que espresen el rango del color i de puntos diacríticos, del modo siguiente:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = \text{amarillo verde} ; \lambda_7 \text{ límite rojo} \\ \lambda_2 = \text{azul verde} \quad \lambda_8 \text{ límite morado} \\ \& \quad \& \quad \& \end{array}$$

CÁLCULOS

Esto sentado pasamos al cálculo de la longitud de ondas de los colores que espresa la lista anterior.

$$\lg. \lambda_7 = \lg. 8e = \lg. (\lambda_0 x_7)$$

	$\lg. e = 5,906173$
	$\lg. 8. = 0,903090$
	$\lg. \lambda_7 = 6,809263$
con la nueva unidad	<u>3,000000</u>
	9,809263
$\lg. \lambda_0$	<u>9,709270</u>
$\lg. x_7 =$	0,099993

Pero por otra parte tenemos $\frac{\lambda_7}{\lambda_0} = 0,6300$

i segun hemos reconocido anteriormente este valor 0,6300 es el cuadrado del coeficiente

$$\left(\frac{1}{x_7}\right) \quad \text{puesto que} \quad \lambda_7 = \lambda_0 \quad \left(\frac{1}{x_7}\right)$$

$$x_7 = \lambda_0 \quad x_7.$$

Pues bien $\lg. 0,6300 = 9,799340$

Pero $\begin{array}{r} \checkmark. 9,899670 \\ 9,899670 = \lg. \checkmark \frac{1}{x_7} \\ \hline 0,000014 \end{array}$

La diferencia entre estos dos logaritmos es tan ínfima que no influye sobre el valor 0,6300 de un modo apreciable, podemos pues admitir:

$x_7 = \sqrt[2]{2}$	i	
$\lambda_7 = \lambda_0 \sqrt[2]{2}$		
$\lambda_7 = \lambda_0 \sqrt[2]{2}$		
		9,709270
		<u>0,100344</u>
		<u>9,809614</u>
		lg. 8e

Límite colorado anaranjado $\dot{\lambda}_3 = e \times 0,9248$ lg. 9,966047
 Límite indigo morado $\lambda_3 = e \times 0,6814$ lg. 9,833402

Costa uno de esos 2 valores correlativos

$$\begin{array}{r} \text{sea } 9,833402 \\ \lg. 8 e = \lg. \dot{\lambda}_3 \quad 9,809614 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,643016 \\ \lg. \lambda_0 \quad 9,709270 \end{array}$$

Pues bien

$$\begin{array}{r} 9,933746 \\ 9,933749 = \lg. \sqrt[3]{\frac{81}{128}} \end{array}$$

$$\text{luego } \dot{\lambda}_3 = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{128}{81}} \text{ i } \lambda_3 = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{81}{128}}$$

$$\dot{\lambda}_3 = e \times 0,8855$$

$$\begin{array}{r} \lambda_3 = e \times 0,7114 \quad 9,852114 \\ \lg. 8 e \quad 9,809614 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,661728 \\ \lambda_0 \quad 9,709270 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,952458 \\ \text{pero } 9,952444 = \lg. \sqrt[3]{\frac{18}{25}} \\ \text{de ahí se saca } \dot{\lambda}_3 = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{25}{18}} ; \lambda_3 = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{18}{25}} \end{array}$$

$$\dot{\lambda}_1 = e \quad 0,8225 \quad \lg. \quad 9,915126$$

$$\lambda_1 = e \quad 0,7635 \quad 9,882809$$

$$\lg. e \quad 0,809614$$

$$\begin{array}{r} 9,692423 \\ \lg. \lambda_0 \quad 9,709270 \end{array}$$

pero

$$\begin{array}{r} 9,983153 \\ 9,982949 \quad \sqrt[3]{\frac{8}{9}} \end{array}$$

$$0,000204$$

Por consiguiente:

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{8}{9}} ; \lambda_1 = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{9}{8}}$$

Ya tenemos el valor exacto de los coeficientes de orden *impar*; para completar la lista i establecer el valor de los coeficientes de orden *par*, haremos uso de la primera tabla que resultará mui ligeramente modificada:

$\lg. \lambda_1 = 9,741152$	$\lg. \lambda_2 = 9,676694$
" λ_0 9,709270	9,709270
0,031882	9,967424
$\lg. \sqrt[3]{\lambda_1} = 0,032304$	$\lg. \sqrt[3]{\lambda_2} = 9,967696$
$\lg. \lambda_1$ 9,765669	$\lg. \lambda_1$ 9,652346
" λ_0 9,709270	9,709270
0,056399	9,943076
$\lg. \sqrt[3]{\lambda_1} = 0,057024$	$\lg. \sqrt[3]{\lambda_2} = 9,942976$
$\lg. \lambda_3 = 9,792392$	$\lg. \lambda_3$ 9,626340
" 9,709270	9,709270
0,083122	9,917070
$\lg. \sqrt[3]{\lambda_3} = 0,083292$	$\lg. \sqrt[3]{\lambda_3} = 9,916708$

Reuniendo todos esos valores formamos la tabla adjunta que difiere de un modo insignificante con la tabla dada por la observacion.

La analogía asombrosa que existe entre la série de los colores del espectro i la escala musical resalta a la vista: en ambas encontramos los mismos intervalos (no tomando en cuenta la raíz 3.^a):

8	tono mayor de los músicos.	
9		
9	tono menor	id.
10		id.
15	semi-tono.	
16		

EL ESPECTRO SOLAR RECTIFICADO

TABLA DE LOS VALORES EXACTOS DE LAS LONGITUDES DE ONDAS DE LOS COLORES DEL ESPECTRO

Intervalos consecutivos	LADO MENOS REFRANJIBLE			LADO MAS REFRANJIBLE		
	Signos	Valor numérico	Logaritmos	Signos	Valor numérico	Logaritmos
$\sqrt[8]{9}$	λ_7	$\lambda_0 \sqrt[8]{2}$	9,809613	λ_7	$\lambda_0 \sqrt[8]{2}$	9,608926
$\sqrt[8]{9}$	λ_8	$\lambda_0 \sqrt[8]{19}$	9,792562	λ_8	$\lambda_0 \sqrt[8]{19}$	9,625977
$\sqrt[8]{15}$	λ_3	$\lambda_0 \sqrt[8]{128}$	9,775511	λ_3	$\lambda_0 \sqrt[8]{128}$	9,643028
$\sqrt[8]{15}$	λ_4	$\lambda_0 \sqrt[8]{81 \cdot 2}$	9,766168	λ_4	$\lambda_0 \sqrt[8]{81 \cdot 2}$	9,652371
$\sqrt[8]{15}$	λ_5	$\lambda_0 \sqrt[8]{25}$	9,756825	λ_5	$\lambda_0 \sqrt[8]{25}$	9,661714
$\sqrt[8]{15}$	λ_6	$\lambda_0 \sqrt[8]{4}$	9,741573	λ_6	$\lambda_0 \sqrt[8]{4}$	9,676966
$\sqrt[8]{9}$	λ_1	$\lambda_0 \sqrt[8]{8}$	9,726320	λ_1	$\lambda_0 \sqrt[8]{8}$	9,692219
$\sqrt[8]{9}$		$\lambda_0 = \frac{64}{125} \sqrt[8]{1}$	lg. 9,709270			

Dejando para mas tarde las observaciones que sugiere la vista de la presente tabla, prosigo la esposicion de los hechos.

DISPOSICION DE LA SÉRIE

A primera vista la série total desde el extremo rojo hasta el extremo morado parece corresponder a 2 escalas (empleando el término musical); pero un exámen mas detenido indica que en lugar de dos escalas pueden ser dos partes de una misma escala, partes análogas a los tetracordios de los músicos griegos. Esta division, que ha adoptado la música moderna, léjos de ser arbitraria está perfectamente justificada por la tabla presente; hai una lijera distincion que tomar en cuenta, a saber:

«A los lretrochordios de la música corresponden los octracordios del espectro».

En cuanto al modo como se debe prolongar la série a ámbos lados, toda duda desaparece gracias a una propiedad de las ondas, (para abreviar suprimo la palabra lonjitud) la que se puede espresar así:

El cuadrado de las ondas de orden par es igual al producto de las ondas adyacentes (de orden impar por consiguiente).

Es decir que aljebraicamente esta propiedad se espresa por la ecuacion: $(\lambda_{2m})^2 = (\lambda_{2m-1}) (\lambda_{2m+1})$.

La série, pues, para obedecer a esta condicion i a la primitiva $\lambda \lambda' = \lambda_0^2$, debe prolongarse a ámbos lados del centro (verde) del modo siguiente (ver la tabla especial que va al último de esta memoria).

Hácia el lado de mayor refranjibilidad (morado) i a continuacion de $\lambda_7 = \lambda_0 \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ se traslada el octacordio ménos refranjible, que principi6 por $\lambda_6 = \sqrt[4]{\frac{9}{16}}$, despues de dividirlo por $\sqrt[4]{4}$ de modo que

$$\frac{\lambda_7}{\sqrt[4]{4}} \text{ corresponde a } \lambda_7; \frac{\lambda'_6}{\sqrt[4]{4}} \text{ a } \lambda_3 \text{ \& \&}$$

Idénticamente de la misma manera el octacordio mas refranjible se trasporta al lado opuesto teniendo cuidado de multiplicar cada nota por $\sqrt[4]{4}$; así vemos que $\lambda_0 \sqrt[4]{4}$ viene a ser el color (iba a decir la nota) fundamental a que pertenece λ_1 &.

ESTUDIOS ESPECTROCÓPICOS

Apliquemos los principios que anteceden al estudio de un ramo de ciencia nuevo o, como diria Humboldt, de una disciplina enteramente moderna destinada a ejercer sobre el conjunto de nuestros conocimientos una influencia cuya magnitud es realmente incalculable, me refiero a los fenómenos de análisis espectral.

Principiemos por el espectro del hidrójeno.

Las 4 rayas que lo componen (1) tienen por lonjitud de ondas los números siguientes:

α	Tres vive.....	656,2
β	Bande diffuse avec milieu vif.....	486
γ	Tres diffuse.....	434
δ	Bande faible diffuse.....	410

(1) Estos números son sacados de la obra de Schüttyenberg. Chimie generale.

Tomando los logaritmos los dispondremos del modo siguiente:

$$\begin{array}{r r r r} \text{Lg. } \lambda \alpha = 9,816983 & \text{lg. } \beta & 9,686689 & \text{lg. } \gamma & 9,637489 & \lambda \delta & 9,612911 \\ & 9,709270 & 9,709270 & 9,709270 & 9,709270 & & \\ \hline x \alpha & 0,107713 & x \beta & 9,977419 & x \gamma & 9,928219 & x \delta & 9,903641 \end{array}$$

Se trata de hallar la significacion (al ménos *plausible*) de los coeficientes x .

Para facilitar las pesquisas podemos considerar las rayas de este espectro como *alteraciones* o empleando la voz técnica *modulaciones* de los colores correspondientes del espectro solar; este modo de ver nos induce a emprender la *comparacion* siguiente:

$$\begin{array}{r r} \text{lg. } \gamma \beta = 9,686689 & \text{lg. } \lambda \gamma = 9,637489 \\ \lambda_1 = 9,692219 & \lambda_3 = 9,643028 \\ \hline & 9,994470 & 9,994461 \end{array}$$

luego, conseguimos la proporcion:
$$\frac{\lambda \beta}{\lambda \gamma} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{16}{9} \times \frac{64}{81}$$

Así, pues, se trata aquí de 2.^{as} potencias; por consiguiente, tenemos que extraer la raíz cuadrada de $9,994465 = 9,997232$
pero $\text{lg. } \sqrt{\left(\frac{125}{128}\right)^2 \left(\frac{250}{243}\right)} = 9,997244$

La diferencia entre estos 2 logaritmos es tan insignificante que debemos considerarnos suficientemente autorizados para admitir el valor de arriba i entónces sentaremos

$$\begin{array}{l} \lambda \beta = \lambda_1 \sqrt{\left(\left(\frac{125}{128}\right)^2 \left(\frac{250}{243}\right)\right)} = \lambda_0 \sqrt{\frac{8}{9} \left(\left(\frac{125}{128}\right)^2 \left(\frac{250}{243}\right)\right)} \quad \text{Logaritmos} \quad 9,686707 \\ \lambda \gamma = \lambda_3 \sqrt{\left(\left(\frac{125}{128}\right)^2 \left(\frac{250}{243}\right)\right)} = \lambda_0 \sqrt{\frac{81}{128} \left(\left(\frac{125}{128}\right)^2 \left(\frac{250}{243}\right)\right)} \quad 9,637516 \end{array}$$

Por medio del mismo procedimiento sacamos

$$\begin{aligned} \lg. \lambda \alpha &= 9,816983 \\ \lambda_7 &= 9,809612 \\ \hline &0,007370 \\ \text{i } \sqrt[3]{\left(\frac{128}{125}\right)^2 \frac{250}{243} \left(\frac{80}{81}\right)^2} &= 0,007383 \end{aligned}$$

Por consiguiente podemos escribir:

$$\lambda \alpha = \lambda_7 \sqrt[3]{\left(\frac{128}{125}\right)^2 \frac{250}{243} \left(\frac{80}{81}\right)^2} = \lambda_0 \sqrt[3]{\left(\frac{128}{125}\right)^2 \frac{250}{243} \left(\frac{80}{81}\right)^2}; \lg. 9,816996$$

En cuanto a $\lambda \beta$, es fácil establecer su valor por medio de $\lambda \gamma$.

$$\begin{aligned} \lg. \lambda \beta &= 9,612911 \\ &9,637489 \\ \hline &9,975422 \quad 9,975405 = \sqrt[3]{\frac{27}{32}} \end{aligned}$$

i el valor de $\lambda \beta$ será:

$$\begin{aligned} \lambda \beta &= \lambda \gamma \sqrt[3]{\frac{27}{32}} \quad \lg. \lambda \beta = 9,637516 \\ &9,775405 \\ \hline &9,612921 \end{aligned}$$

LOGARITMOS DE LOS NÚMEROS CALCULADOS COMPARADOS CON LOS
LOGARITMOS DE LOS NÚMEROS OBSERVADOS

Calculado = 9,816997	β 9,686707	γ 9,637516	β 9,612921
Observado = 9,816983	9,686689	9,647489	9,612911
0,000014	0,000018	0,000017	0,000010

Resumen.—Las pocas diferencias que presentan estos logaritmos me parecen un argumento *plausible* en favor de la adopcion de las espresiones que acabamos de encontrar

$$\lambda \alpha = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{(\frac{122}{123})^2 \frac{259}{243} (\frac{89}{81})^2}{}}$$

$$\beta = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{8}{9} \left(\left(\frac{125}{123} \right)^2 \frac{259}{243} \right)^2}$$

$$\gamma = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{81}{123} \left(\left(\frac{125}{123} \right)^2 \frac{259}{243} \right)^2}$$

$$\delta = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{81}{123} \frac{37}{32} \left(\left(\frac{125}{123} \right)^2 \frac{259}{243} \right)^2}$$

Ademas reina entre todos una simetría mui notable; pero en resumidas cuentas la única cosa perfectamente segura es la proporcion

$$\frac{\lambda \beta}{\lambda_1} = \frac{\lambda \gamma}{\lambda_5}$$

independiente de los valores asignados a los coeficientes.

Pasemos ahora al espectro del Cloro (1).

SIGNOS	RAYAS I LONGITUD DE ONDAS		LOGARITMOS
λa	α	Vive..... 611	9,786041
λb	β {	1 Vive..... 546	9,737191
λc		2 Vive..... 544,5	9,735998
λd		3 Tres vive..... 542,5	9,734239
λe		4 Vive..... 539	9,731588
λf	γ	Tres vive diffuse..... 521,6	9,717337
λg	δ {	1 Vive..... 510,1	9,707655
λh		2 Vive..... 507,5	9,705436
λi	ε {	1 Double la 2. ^a 492,0	9,691965
λj		2 489,5	9,689753
λk	ζ {	1 482,0	9,683047
λl		2 481,0	9,682145
λm	η	1 457,0	9,659916

(1) Sacado de la obra arriba mencionada, Chimie generale.

Por desgracia la lista no está completa, falta el extremo mas refranjible; pero tal como está en dicha lista ofrece bastante interes; observamos : 2 rayas aisladas α i γ i 5 grupos:

β	compuesto de 4 rayas.	
δ	id.	2 »
ε	id.	2 »
ζ	id.	2 »
η	id.	3 »

Luego veremos que esta division no es del todo exacta; omitiendo la lista de los coeficientes, que tiene poca importancia en el caso presente formaremos las dos tablas siguientes:

I

λa	9,786041— λb	9,737191— λc	9,735998— λd	9,734239
λ_1	9,792562— λ_2	9,741573— λ_2	9,741573— λ_2	9,741573
	9,993479	9,995618	9,994425	9,992666
λe	9,731588— λf	9,717337— λg	9,707654— λh	9,705436
λ_1	9,726320— λ_0	9,709270— λ_0	9,709270— λ_0	9,709270
	0,005268	0,008067	9,998385	9,996166
λi	9,691965— λ_j	9,689763— λk	9,683047— γl	9,682145
λ_1	9,692219— λ_2	9,692219— λ_2	9,676966— λ_2	9,676966
	9,999746	9,997534	0,006081	0,005179

II

(INTERVALOS SUCESIVOS)

λa	9,786081— λb	9,737191— λc	9,735998— λd	9,734239
λb	9,737191— λc	9,735998— λd	9,734239— λe	9,731588
	0,048890	0,001193	0,001759	0,002651
λe	9,731588— λf	9,717337— λg	9,707655— λh	9,705436
λf	9,717337— λg	9,707655— λh	9,705436— λi	9,691965
	0,014251	9,999682	0,002219	0,013471
λi	9,691965— λj	9,689753— λk	9,683047— λl	9,682145
λj	9,689752— λk	9,683047— λl	9,682145— λm	9,659916
	0,002212	0,006766	0,000902	0,022229

Principiaremos el estudio por el grupo $\zeta \lambda m$ que probablemente está representado por la raya central.

$$\begin{array}{rcl} \lg. \lambda_m & 9,659916 & \\ \lambda_i & 9,652370 & \\ \hline & 0,007546 = \lg. \sqrt[3]{\frac{25}{11}} & ! \end{array}$$

Este factor tiene sus títulos de nobleza archivados en los anales de la filosofía griega (1).

También haré notar una circunstancia digna de interés: no hai necesidad de alterar en lo mas mínimo el valor que da la observación.

$$\text{Así pues } \lambda_m = \lambda_i \sqrt[3]{\frac{25}{11}} = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{25}{11} \cdot \frac{11}{11}}$$

Pasaremos a λa

$$\begin{array}{rcl} \lg. \left(\frac{\lambda a}{\lambda b} \right) & = & 9,993479 \\ \hline \lg. \left(\frac{\lambda m}{\lambda i} \right) & = & 9,007545 \quad \text{pero} \\ & 9,985934 & \\ \checkmark. & 9,992967 & 9,992969 = \lg. \frac{125}{128} \left(\frac{80}{81} \right)^2 \\ & & 9,995938 \end{array}$$

Por consiguiente

$$\lambda a = \lambda b \sqrt[3]{\frac{25}{11} \left(\left(\frac{125}{128} \right) \left(\frac{80}{81} \right)^2 \right)} = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{16}{9} \cdot \frac{25}{11} \left(\frac{125}{128} \left(\frac{80}{81} \right)^2 \right)}$$

$$\begin{array}{rcl} \lambda b = \lambda_2 \sqrt[3]{\left(\frac{125}{128} \right)^2 \frac{25}{11}} & = \lg. \lambda_2 & 9,741573 \\ & & 9,995614 \\ \hline & & 9,737183 \end{array}$$

Para ahorrar tiempo doi a continuación la tabla de los valores que me han parecido mas *plausibles*.

(1) Ver el Timeo de Platon.

RAYAS PRINCIPALES DEL ESPECTRO DEL CLORO

Logaritmos

$$\lambda_a = 9,786046 ; \lambda_s \sqrt[2]{\frac{256}{243} \left(\frac{125}{128} \left(\frac{80}{81} \right)^2 \right)^2} = \lambda_0 \sqrt[2]{\frac{16}{9} \frac{256}{243} \left(\frac{125}{128} \left(\frac{80}{81} \right)^2 \right)^2}$$

$$» b \ 9,737183 ; \lambda_2 \sqrt[2]{\frac{(125)^2}{(128)^2} \frac{25}{24}} = \lambda_0 \sqrt[2]{\frac{5}{4} \frac{(125)^2}{(128)^2} \frac{25}{24}}$$

$$» c \ 9,735990 ; \lambda_2 \sqrt[2]{\frac{125}{128} \left(\frac{80}{81} \right)^2 \frac{25}{24}} \quad \lambda_0 \sqrt[2]{\frac{5}{4} \left(\frac{125}{128} \left(\frac{80}{81} \right)^2 \right)^2}$$

$$» d \ 9,743240 ; \lambda b \sqrt[2]{\frac{(125)^4}{(128)^4} \left(\frac{80}{81} \right)^6}$$

$$» e \ 9,731599 ; \lambda \sqrt[2]{\left(\frac{125}{128} \right)^2 \frac{25}{24} \left(\frac{80}{81} \right)^2}$$

$$» f \ 9,717330 ; \lambda_0 \sqrt[2]{\frac{(243)^2}{(243)^2} \frac{125}{128} \left(\frac{80}{81} \right)^2}$$

$$» g \ 9,707659 ; \lambda_0 \sqrt[2]{\frac{256}{128} \frac{125}{128} \left(\frac{80}{81} \right)^2}$$

$$» h \ 9,705436 ; \lambda_0 \sqrt[2]{\frac{5}{4} \left(\frac{125}{128} \right)^2 \frac{25}{24} \left(\frac{80}{81} \right)^2}$$

$$» i \ 9,691965.$$

$$» j \ 9,699743 ; \lambda_1 \sqrt[2]{\frac{128}{125} \frac{25}{24}}$$

$$» k \ 9,683039 ; \lambda_2 \sqrt[2]{\frac{125}{128} \left(\frac{80}{81} \right)^2 \frac{25}{24}} = \lambda_0 \sqrt[2]{\frac{5}{4} \left(\frac{125}{128} \right)^2 \left(\frac{80}{81} \right)^2}$$

$$» l \ 9,682153 ; \lambda \beta_H \sqrt[2]{\frac{25}{24} \left(\frac{125}{128} \frac{80}{81} \right)^2} = \lambda_0 \sqrt[2]{\frac{25}{27} \left(\frac{125}{128} \right)^2 \left(\frac{256}{243} \right)^2 \left(\frac{80}{81} \right)^2}$$

$$» m \ 9,659916 ; \lambda_1 \sqrt[2]{\frac{256}{243}}$$

ADVERTENCIAS

1) — El valor de λd se saca fácilmente por medio λb , no hai necesidad de modificar el número dado por la observacion directa.

2)—Las 4 rayas λg , λh , λi , λj , forman la proporcion

$$\frac{\lambda g}{\lambda h} = \frac{\lambda i}{\lambda j}$$

3)—El valor de λi determinado mediante dicha proporcion sale tambien exacto sin alterar las cifras.

4)—Con mas razon todavia que para el espectro del hidrógeno hai motivos para no admitir estos valores sino a título provisorios.

5)—A priori parece indudable que debe existir una relacion mas o ménos íntima entre los valores que espresan la longitud de ondas de las rayas de todos los cuerpos; en este concepto nada mas natural que buscar puntos de comparacion en cualquier espectro para facilitar los cálculos. Por eso no he tenido reparo en apelar al espectro del hidrógeno para determinar λi .

6)— λe no pertenece al grupo de las anteriores; no es una alteracion de λ_2 sino de λ_1 .

Para terminar este estudio de espectroscopio vamos a examinar el espectro de un metal, el Vanadio, que segun Lockyer (1) existe en el sol, al ménos las 4 líneas moradas mas refranjibles de su espectro están representadas en el espectro Solar.

ESPECTRO DEL VANADIO

Signos	Longitud	Vanadio
λa	6119	9,786680
» b	6089	9,784546
» c	6039	9,780965
» d	5725	9,757775
» e faible	5697	9,755646
» f faible	4459	9,649737
» g	4407	9,644143
» h faible	4389	9,642365
» i	4384	9,641870
» j	4379	9,641375.

(1) Studies in spectrum analysis.

Es de suponer que no existen mas rayas que las anteriores en la parte visible del espectro porque en la obra de la que he sacado esta lista no se dice las principales líneas sino *las* líneas; en tal caso conviene determinar el espacio que ocupa de λa a λj . Desde luego se vé que está comprendida entre las «notas» λ_6 i λ_3 , mas tarde *precisaremos* el intervalo.

I

EL ESPECTRO DEL VANADIO COMPARADO CON EL ESPECTRO SOLAR

λa	9,786680— λb	9,784546— λc	9,780965— λd	9,757775
λ_4	9,792562— λ_6	9,792562— λ_3	9,775510— λ_3	9,756826
	9,994118	9,991984	0,005455	0,000949
λe	9,755646— λf	9,649237— λg	9,644143— λh	9,642365
λ_2	9,756825— λ_3	9,643028—	9,643028— λ_3	9,643028
	9,998821	0,006209	0,001115	9,999337
λi	9,641870— λj	9,641375		
λ_3	9,643028— λ_3	9,643028		
	9,998842	9,998347		

II

(INTERVALOS CONSECUTIVOS)

λa	9,786630— λb	9,784546— λc	9,780965— λd	9,757775— λe	9,755646
λb	9,784546— λc	9,780965— λd	9,757775— λe	9,755646— λf	9,649237
	0,002134	0,003581	0,023190	0,002129	0,106409
λf	9,649237— λg	9,644143— λh	9,642365— λi	9,641870— λj	9,641375
λg	9,644143— λh	9,642365— λi	9,641870— λa	9,641375— λa	9,786680
	0,005094	0,001778	0,000495	0,000495	9,854695

RELACIONES

$$\frac{\lambda a}{\lambda b} = \frac{\lambda d}{\lambda e} \quad ; \quad \lambda h \times \lambda j = \lambda^2 i.$$

Estas relaciones justifican el epíteto de rítmica que se da a la representacion gráfica de ciertos espectros.

$$\lg. \left(\frac{\lambda a}{\lambda_6} \times \frac{\lambda j}{\lambda_3} \right) = \begin{array}{r} 9,994118 \\ 9,998347 \\ \hline 9,992765 \\ 9,992455 = \lg. \sqrt[3]{\frac{128}{25}} = 1 \end{array}$$

Veamos que existe simetría entre estos factores, si uno se representa por κ el otro será $\frac{1}{\kappa} A$.

de modo que el cociente

$$\frac{\left(\frac{\lambda a}{\lambda_6} \right)}{\left(\frac{\lambda j}{\lambda_3} \right)} = \kappa^2 A$$

Efectivamente haciendo el cálculo hallamos por espresion de

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{0,005387}{9,994113} \quad \text{pero} \quad 9,994115 = \lg. \sqrt[3]{\left(\frac{128}{25}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^2}$$

por consiguiente

$$\lambda a = \lambda_6 \sqrt[3]{\left(\frac{128}{25}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^2} = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{128}{9} \left(\frac{128}{25}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^2}$$

$$\lambda j = \lambda_3 \sqrt[3]{\frac{243}{256} \left(\frac{128}{25}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^2} = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{81}{128} \frac{243}{256} \left(\frac{128}{25}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^2}$$

El valor de λi se consigue por medio de la relacion

$$\lg. \frac{\lambda i}{\lambda j} = 0,000495 \text{ observando que } 0,000490 = \lg. \left(\frac{125}{128} \right)^3 \left(\frac{81}{80} \right)^6$$

i el de λb por la relacion:

$$\lg. \frac{\lambda a}{\lambda b} = 0,002130 \text{ o sea } 0,002125 = \lg. \left(\frac{125}{128} \right)^2 \left(\frac{81}{80} \right)^5$$

entónces tendremos la espresion:

$$\lambda b = \lambda a \sqrt[4]{\left(\frac{125}{128}\right)^2 \left(\frac{81}{80}\right)^5} = \lambda_0 \sqrt[4]{\left(\frac{125}{128}\right)^5 \left(\frac{81}{80}\right)^4}$$

Por complicado que parezca este radical hai mucha probabilidad de que sea exacto como pronto lo veremos.

$\lambda c = \lambda b \sqrt[4]{\left(\frac{80}{81}\right)^2}$ (?) de la única línea que me parece poder dejar lugar a dudas, de todas las que componen este espectro.

$$\lambda d = \lambda_3 \sqrt[4]{\left(\frac{125}{128}\right)^2 \frac{24}{25}} = \lambda_0 \sqrt[4]{\frac{4}{3} \left(\frac{125}{128}\right)^2}$$

$$e = \lambda f \sqrt[4]{\left(\frac{125}{128}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^2 \frac{4}{3}}$$

$$f = \lambda_3 \sqrt[4]{\left(\left(\frac{125}{128}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^4\right)^2} = \lambda_0 \sqrt[4]{\frac{16}{25} \left(\frac{125}{128}\right)^5 \left(\frac{80}{81}\right)^7}$$

Si se efectua las *reducciones* se ve aparecer el valor de λe bajo la forma $\lambda_0 \sqrt[4]{\frac{4}{3} \left(\frac{125}{128}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^5}$ que confirma de un modo mui satisfactorio la exactitud de los coeficientes anteriores.

En efecto la marcha de la operacion ha sido la siguiente: 1.º determinacion λf por medio de λ_3 , que es fácil; 2.º determinacion de λe por medio de λf , que tampoco no ofrecen dificultad. El resultado siendo el mismo que si se hubiese hecho uso de la relacion $\frac{\lambda d}{\lambda e}$, hai gran probabilidad de que el valor hallado sea exacta. Sin entrar en mas pormenores doi a continuacion la tabla completa.

ESPECTRO DEL VANADIO

TABLA DE LOS VALORES RECTIFICADOS DE LAS LONGITUDES
DE ONDAS

Logaritmos	
$\lambda a = 9,786677 ; \lambda_6 \sqrt{\left(\frac{128}{125}\right)^4 \left(\frac{80}{81}\right)^9}$	$= \lambda_0 \sqrt{\frac{16}{9} \left(\frac{128}{125}\right)^3 \left(\frac{80}{81}\right)^9}$
$\lambda b = 9,784552 ; \lambda a \sqrt{\left(\frac{128}{125}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^5}$	$= \lambda_0 \sqrt{\frac{16}{9} \left(\frac{128}{125}\right)^3 \left(\frac{80}{81}\right)^9}$
$\lambda c = 9,780956 ; \lambda b \sqrt{\left(\frac{80}{81}\right)^2}$	$= \lambda_0 \sqrt{\frac{16}{9} \left(\frac{128}{125}\right)^3 \left(\frac{80}{81}\right)^{11}}$
$\lambda d = 9,757782 ; \lambda_3 \sqrt{\left(\frac{128}{125}\right)^2 \frac{24}{25}}$	$= \lambda_0 \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{128}{125}\right)^2}$
$\lambda e = 9,755656 ; \lambda f \sqrt{\left(\frac{128}{125}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^2 \frac{24}{25}}$	$= \lambda_0 \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{128}{125}\right)^4 \left(\frac{80}{81}\right)^3}$
$\lambda f = 9,649241 ; \lambda_5 \sqrt{\left(\frac{128}{125}\right)^6 \left(\frac{80}{81}\right)^4}$	$= \lambda_0 \sqrt{\frac{16}{25} \left(\frac{128}{125}\right)^3 \left(\frac{80}{81}\right)^7}$
$\lambda g = 9,644148 ; \lambda^3 \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{27}{25}\right)^3}$	$= \lambda_0 \sqrt{\frac{1}{2} \frac{81}{80} \left(\frac{27}{25}\right)^3}$
$\lambda h = 9,642350 ; \lambda_3 \sqrt{\frac{243}{256} \left(\frac{128}{125}\right)^9 \left(\frac{81}{80}\right)^{11}}$	
$\lambda i = 9,641860 ; \lambda^3 \sqrt{\frac{243}{256} \left(\frac{128}{125}\right)^6 \left(\frac{81}{80}\right)^{15}}$	
$\lambda j = 9,641370 ; \lambda_3 \sqrt{\frac{243}{256} \left(\frac{128}{125}\right)^3 \left(\frac{81}{80}\right)^9}$	

Dando por terminado el estudio de los espectros, en cuanto al modo de expresar la longitud de ondas, paso a otras aplicaciones de la fórmula jeneral $\lambda = \lambda_0 \times$.

REFRACCION, POLARIZACION, DISPERSION

Esta clase de fenómenos tiene una importancia muy considerable para el minéralogo i, mas aun, para el filósofo i para todos los que se preocupen de las propiedades íntimas de la materia.

Por desgracia el ramo de física a que pertenecen ha sido algo descuidado, quedan por resolver los problemas mas fundamentales.

Por ejemplo, respecto a la polarizacion ¿cuál de los diversos colores obedece a la luz de Brenster? Probablemente el que corresponde a λ_0 , al ménos esta es la suposicion que parece mas natural. Pero, con todo, es necesario averiguarlo, cosa, por lo demas, muy fácil, una vez que estén determinadas las rayas que corresponden a los colores de la *escala* luminosa.

El espectro del Titano presenta, precisamente, una raya con longitud de onda=512.

De todos modos conviene experimentar con colores situados a igual distancia de λ_0 , a los que hemos dado provisoriamente el nombre de correlativos.

Si se opera eligiendo el ángulo de polarizacion los resultados serán mas completos, dando a la vez las espresiones exactas i significativas (no meros valores numéricos) de

$$\text{la refraccion} \quad \frac{\lambda_1}{\psi \lambda_0} = L$$

$$\text{la polarizacion} \quad L, \text{ ó } P = \left(\frac{\lambda_1}{\psi \lambda_0} \right) (?)$$

$$\text{la dispersion} \quad \frac{\lambda_1}{\psi \lambda_0} = \frac{\lambda_1}{\psi \lambda_0}$$

COLORES COMPLEMENTARIOS

Otra cuestion algo oscura i que deja mucho que desear. Parece que el problema es complejo i que la parte puramente subjetiva es preponderante.

Los tratados de física contienen la lista siguiente:

Límites morado i colorado juntos reproducen el blanco con el verde, es decir λ_7 i λ_6 (juntos)	»	λ_0
λ_5 el colorado	»	λ_1 azul-verde
λ_3 el morado	»	λ_2 amarillo verde
λ_2 el anaranjado	»	λ_3 azul
λ_1 el indigo	»	λ_4 amarillo

Fuera de la simetría en los índices no se observa en las expresiones ninguna particularidad notable; pues, si bien la relacion $x_6 = \frac{15}{3}$ con $x_1 = 3$ parece satisfactorio no así la de x_1 con x_2 $\frac{40}{27}$ con $\frac{4}{3}$.

En cuanto a la lista mas explícita que da Helmholtz i que reproduce Funke (1) no arroja tampoco resultados fáciles de apreciar; aunque los 4 colores ménos refranjibles parecen formar una especie de progresion $\frac{c}{d} = x$; $\frac{b}{c} = x^2$; $\frac{a}{b} = x^4$, como las complementarias correspondientes no ofrecen nada que se les parezca, la cosa no pasa de ser una simple casualidad.

NUEVAS OBSERVACIONES POR HACER

Hai dos séries de observaciones que son mui interesantes i además mui necesarias para aclarar la cuestion fisiológica.

1.º)—¿A qué colores o matices da origen la superposicion de los colores correlativos por ejemplo: λ_1 con λ_2 (?) etc.

2.º)—Del mismo modo ¿cuál es la impresion producida en los órganos de la vista por la reunion de colores que difieren por los intervalos de un octacordio, i dos octacordios?

Parece mui racional el volver a emprender los experimentos iniciados hace unos 30 años en Inglaterra para dilucidar la cuestion de estas curiosas anomalías conocidas bajo el nombre de «*Colour-blindness*».

Quien sabe si varios de los fenómenos que se observan i son puramente subjetivos no corresponden a una diferencia de raza. Al ménos, así lo hace suponer la analogía entre sonidos i colores.

(1) Lehrbuch der Physiologie.

LÍMITES DEL ESPECTRO VISIBLE

La última onda perceptible por el lado colorado tiene una longitud representada por el número 723 (1).

lg. 9,159138
lg. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ 0,200687 para alzarlo hasta el octacordio conocido.

9,658451		
lg. λ_1 9,652371		$\lambda_0 \sqrt[3]{1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{125}{28} \left(\frac{51}{80}\right)^2}$
0,006080		
0,006073	lg. $\sqrt[3]{\frac{1}{4} \left(\frac{11}{12}\right)^2 \frac{1}{12}}$	lg. 9,859131.

Así pues el límite por este lado cae entre las notas λ_{10} i λ_{11} o sea en el 4.º intervalo de la escala *ut*₁ (ver la tabla).

Extremo morado $\lambda = 397$

lg. 397	9,598790
» λ_1	9,608926
	9,989864 = lg. $\sqrt[3]{\left(\frac{11}{12}\right)^4 \left(\frac{11}{12}\right)^2}$

(Aquí no hai nada que cambiar en las cifras).

Resulta, pues, que el límite morado cae entre λ_7 i λ_8 ; la estension por el lado mas refranjible es menor que por el lado colorado, hai una diferencia de 3 intervalos.

Pero no se debe perder de vista que aquí tambien el elemento subjetivo debe entrar en cuenta.

EL METRO

Al fin hemos llegado al objeto primitivo de este trabajo. A nadie se le habrá escapado la observacion de un hecho prodijiosamente asombroso: el metro no es el resultado de la malograda tentativa de hallar un tipo inmutable en las dimensiones de la

(1) Chimie generale de Schützenberger.

tierra; no es una funcion de la entidad ideal que se llama meridiano terrestre: el metro es de oríjen celeste, el metro i la luz son coexistentes. ¡Qué lindo tema para la imaginacion oriental en su edad de oro! Un senáculo de sabios animados de un ardiente amor hácia la humanidad, imaginan de sustituir a esa multitud de medidas heterojéneas, causa de desunion, una única, símbolo de la union que en adelante debe enlazarnos. Pero ellos son hombres i sujetos al error, por fortuna los jénios benéficos encargados de vijilar nuestros actos, intervienen i el metro aparece. Nosotros, occidentales, mas positivos debemos ver allí una realizacion acertada de la hermosa máxima.

«Fais ce que dois adviennne que pourras».

De todos modos no podríamos sin injusticia dejar de tributar nuestro contingente de gratitud a la memoria de los iniciadores de tan útiles reformas, i en particular a la memoria de los que nos han hecho el don de tan preciosa medida.

ESTENSION DEL SISTEMA MÉTRICO

Una de las grandes ventajas de este feliz sistema es la facilidad de crear unidades adoptadas al objeto que se tiene en vista.

Así tenemos para la topografía el miriámetro, para los viajes el kilómetro i la legua, para las transacciones diarias el metro, centímetro, etc.

Del mismo modo para la avaluacion de las distancias moleculares se necesita una unidad que esté en armonía con las diminutivas dimensiones que allí se consideran. El milímetro es ya un grandor excesivo i realmente colosal; la milésima parte del milímetro es la unidad deseada, i es la que hemos adoptado en este trabajo, el nombre de esta unidad molecular, que se impone i que la analogía i la lójica exigen es el de micrómetro.

Es cierto que algunas veces se emplea este térmido para designar un instrumento; pero el buen sentido condena tan vicioso modo de espresarse. El instrumento destinado a medir no es la medida; el compas no es el metro, el pequeño compas (aparato micrométrico) no es el pequeño metro. Si se invoca la prescripcion invocaremos la autoridad de uno de los patriarcas de la ciencia.

«Ignorance or carelessness should not be allowed to give perpetuity, to its blunders under any law of priority» (1).

La série de las unidades métricas seria, pues:

Kilómetro; metro; milímetro; micrómetro; micromilímetro.

KM M MM m mm

queda la relaciones simétricas:

$$\overline{KM} \times \overline{MM} = M^2 \quad ; \quad \overline{MM} \times \overline{mm} = m^2$$

La derivacion de las demas unidades se puede hacer del mismo modo.

A la unidad de volumen —«el litro»=1 decímetro cúbico corresponde «el micrólitro»=1 microdecímetro cúbico.

Al «gramo», peso de 1 centímetro cúbico de agua.

El microgramo id. 1 microcentímetro id.

Para pasar de una série a otra bastan una coma i unos cuantos ceros.

No se puede desear mayor sencillez.

En cuanto a las ventajas que ha de reportar esta estension del sistema métrico no son dudosas: desde luego se echa de ver que los cálculos se simplifican i que las espresiones se hacen mas significativas.

(1) Dona—Mineralog, introduction.

RESÚMEN JENERAL

DEDUCCIONES

La rápida (talvez lacónica) esposicion que antecede no bastaria por sí sola a dilucidar completamente la materia que forma el tomo del presente trabajo, resta otra tarea que cumplir, la de enumerar las consecuencias, o corolarios que se desprenden de la proposicion fundamental representada por la fórmula:

$$\lambda = \lambda_0 \times .$$

Pero ántes de todo tengo que hacer una advertencia indispensable, si la palabra «*analogía*» viene tan a menudo reproducido en estas pájinas, hai, para ello, un motivo poderoso i fundada en el oríjen de este trabajo; en efecto, convencido i, firmemente convencido, de que la *analogía* constituye un principio absoluto, al que todas las cosas, en el universo, están subordinadas, me propuse, hace ya tiempo, basar sobre este principio, un método de investigacion tomando por modelo el órden i los procedimientos acostumbrados en la *análisis* matemática.

Debo añadir que hasta ahora los resultados han salido suficientemente satisfactorios.

Es cierto que el problema que sirvió de punto de partida a los demas, se presta del modo mas completo al empleo de esta clase de procedimientos basados sobre la analogía.

En efecto, este problema consiste en buscar la resolucion de la ecuacion del 3.^{er} grado por medio de la trigonometría; basta enunciarlo para que desde luego se eche de ver la perfecta analogía o, por mejor decir, la HOMOLOGÍA entre las raices de la ecuacion del 2.^o grado, consideradas como los catetos de un triángulo recto i las raices del 3.^{er} grado representadas por las aristas de un tetraedro con vértice rectangular. Sí, para que la analogía sea mas estrecha todavía, el triángulo va inscrito en una circunferencia de círculo i el tetraedro en una esfera, entónces los resultados que dan las relaciones entre los varios elementos de estas figuras no dejan nada

que desear en cuanto al objeto en vista i ademas proporcionan un método nuevo para el estudio de los sólidos i por consiguiente de la cristalografía. Pero, con la cristalografía están íntimamente ligados los fenómenos ópticos, i de allí resulta que insensiblemente i por la fuerza de las cosas el primitivo problema, puramente matemático, ha venido a parar en una cuestion enteramente física i química.

Despues de esta esplicacion nadie estrañará mi insistencia en ponderar el papel prominente que desempeña la analogía; i, si mis apreciaciones parecen exajeradas, tienen al ménos el mérito de la sinceridad; no están inspiradas por el necio prurito de imitar a los antiguos sofistas, abogando «*a outrance*» por una tésis antojadizamente elejida.

Comparacion entre la luz i los sonidos musicales.—De que, desde los tiempo mas remotos la analogía entre la luz i el sonido, aparece como una verdad formalmente estampada en la conciencia humana, no puede quedar la menor duda. Ya Homero compara la voz blanca de los ancianos de *Ilion* a la azucena. Toda la terminología adoptada por los músicos griegos está basada sobre esta analogía.

Pero, si se considera la concordancia completa que existe entre ambas clases de fenómenos, tomando en cuenta las relaciones numéricas que son idénticas, la palabra analogía viene a ser insuficiente. En efecto, desde los tiempos de Theler i Pythagoras, la gama musical u octacordio se compone de 2 tetracordios, cada uno de ellos incluyendo una cuarta.

El órden de las notas puede variar, i a cada variacion corresponde un «*modo*» distinto; pero la relacion entre las notas consecutivas es siempre la misma a saber:

ó un tono mayor.....	$\frac{9}{8}$
ó un tono menor.....	$\frac{10}{9}$
ó un semi-tono.....	$\frac{15}{16}$

Nocion de la correlacion.—Ya en aquellos tiempos vemos la nocion de la correlacion aparecer mui de manifiesto en la disposicion i en el arreglo de las escalas que llevan el nombre de Myxolydia i de Hypolydia (1).

(1) Véase la obra de Rudolf Wapthal «*Hermonik und Melopöie der griechen*», páj. 78.

Myxolydia, si, ut, re, mi, fa, sol, la, si
 Hypolydia, fa, mi, re, ut, si, la, sol, fa
 Intervalos, $\frac{1}{2}$ 1 1 $\frac{1}{2}$ 1 1 1.

Es una mera tentativa i no se debe exigir una completa exactitud matemática; sin embargo, el hecho de comparar ambas escalas en sentido invertido es digno de llamar la atención; es el primer paso hacia el estudio sistemático de los fenómenos sonoros i hácia el conocimiento de esta condicion característica de ellas, a saber la *correlacion*.

Pero la música de los griegos nos reserva todavía mayores sorpresas. En su continuo i constante afán para perfeccionar a la vez el arte i la ciencia de los sonidos musicales, modificando i, sobre todo, ensanchando las escalas, los vemos llegar de tetracordios en heptacordios, de octacordios en dodecacordios, etc., hasta la escala siguiente:

la, si, tn, re, mi, fa, sol, la, si, ut, re, mi, fa, sol, la. (1)
 < octacordio > < octacordio >

I, a esta escala, segun lo refiere el célebre matemático Claudio Ptolemeo, le dan el nombre de

Σύστημα τέλειον καὶ ἀμετάβητον

¡ESCALA COMPLETA E INMUTABLE!

Que se reemplace la fundamental «la» por la fundamental «ut» i tendremos un *calco* del espectro solar.

La tabla siguiente pone de manifiesto el paralelismo notable que existe entre los fenómenos sonoros i luminosos.

(1) Rud. Westphal loc cit., p. 98.

CONDICIONES	SONIDO	LUZ
<i>Espresiones algebraicas</i>	$L = I_0 K ; LL' = L_0^2$	$\Lambda = A_0 K ; \Lambda \Lambda' = A_0^2$
<i>Movimiento vibratorio</i>	Longitudinal.....	Transversal.
<i>Vehículo</i>	El aire	El ether.
<i>Longitud de ondas expresada</i>	{ En funcion del metro { i per medio de que { bracos racionales.	{ En funcion del <i>micro-</i> { metro por medio de { raices terceras.

Por lo que respecta a la parte puramente subjetiva del fenómeno es claro que la percepcion se efectúa solo por medio de los órganos especiales :

OIDO ; OJO

Percepcion.....

Pero queda un problema fisiológico que resolver, el que no carece de importancia, a saber:

¿En qué proporcion pueden los demas organos estar afectados por las vibraciones que producen el ruido i el colorido?

Propiedad funda-
mental..... {

CORRELACION ; CORRELACION

«Recurrencia»

«Recurrencia» (?)

Si la máxima:
Bis repetita placent,
tiene aplicacion, ciertamente en ninguna parte, mejor que en la música la podemos hallar. Desde la humilde cancion hasta la sinfonia, toda obra musical ofrece esta particularidad de reproducir varias veces el mismo tema, modificado o no modificado.

Aunque la impresion que nos causa la repeticion de los colores no es tan marcada como la de los sonidos; sin embargo en el arte de la «ornamentation» vemos que la sucesion rítmica de los colores dispuestos en series bien determinadas, produce los efectos mas gratos a la vista.

Condición especial {

El placer que causa esta repeticion i su uso jeneral, no puede ménos de infundirnos ciertas dudas respecto del éxito que espera, en la aplicacion, la música dicha del Porvenir o sea de *melodía continua*.

Problema común a ambas clases de fenómenos.—Existen otros factores armónicos, otros intervalos a mas de los de la gama usual, otros coeficientes que los del espectro Solar?

Si se debe dar fé a lo que refieren los autores griegos i entre ellos el famoso Aristóxeno, uno de los mas prominentes intérpretes del arte musical, el número de los intervalos posibles es mayor de lo que creen los físicos; por ejemplo no solo los factores $7/8$ $11/8$ son admisibles para los músicos puramente *prácticos* sino que no tienen reparo en agregar a la lista hasta quebrados irracionales.

Pero una tentativa hecha en los tiempos modernos por un músico de Berlin, para introducir el factor $7/8$ ha tenido muy mal éxito, lo que nos debe inspirar alguna desconfianza respecto de las aserciones de los historiadores griegos.

Esta desconfianza parecerá tanto mas fundada cuanto que Aristóxeno, el principal promotor de la doctrina exclusivamente empirica aplicada a la música no reconocia la validez de los cálculos de los físicos.

El filólogo alemán ya citado, dice espresamente en el artículo intitulado «*Los intervalos cromáticos, segun Aristóxeno*» (1).

«Él (Aristóxeno) no admite que los intervalos musicales sean determinados por medio del cálculo, sino por la sola apreciacion del oído».

¡Qué diferencia entre el práctico Aristóxeno i el teórico Pythágoras!

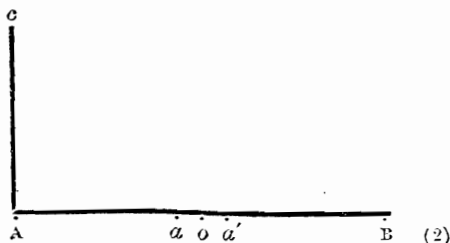
Ambos emiten una teoría, aunque el primero lo hace como Mr. Jourdain hacia prosa; pero la teoría del gran filósofo basada sobre los principios de la física es inmortal; mientras que la asercion del empirico queda burlada por la realidad de los hechos i por la experiencia racional.

No, la simple sensacion percibida por el oído no puede, por sí sola, dar el conocimiento exacto de las relaciones numéricas que rigen los sonidos.

Aristóxeno se encuentra haber realizado anticipadamente la hipótesis de Condillac, reduciéndose voluntariamente al papel de la estátua dotada de un solo sentido.

El problema de los factores harmónicos no puede ser resuelto satisfactoriamente sino por el estudio de la *espectroscopia*; cosa que felizmente no ofrece dificultad.

Cánon de Pythágoras modificado.—Mientras tanto el espectro solar tal como se presenta a nuestra vista nos ofrece los medios de modificar nuestra escala musical; para lo cual podemos hacer uso del aparato imaginado por Pythágora i que lleva su nombre, pero modificado como sigue:



(1) Nicht durch Berechnung sondern durch das gehör, willer er den Unterschieden Töne bestimmt wissen.—Loc. cit.

(2) Por falta de cliché no se completa la figura.

Sea una línea horizontal AB i otra vertical Ac ; demos a Ac el valor 0,512 (poco importa la unidad) valor que llamaremos L_0 .

Supongamos que esta línea Ac pueda jirar al rededor del punto A hasta coincidir con AO . Estando dicha línea $Ac=L_0$ en esta última posicion es decir tendida sobre AB la levantamos hasta formar un ángulo $BAC=27^{\circ}16'$ cuyo coseno= $8/9$. De la estrechidad c bajemos una perpendicular sobre AB la que cae en a i tiremos otra perpendicular sobre la misma Ac , hasta cortar AB en a' : La distancia aa' será igual a $Ac \cos. 27^{\circ}16' = L_0 \cdot 8/9$ i naturalmente la otra línea aa' tendrá por valor: $Ac \sec 27^{\circ}16' = L_0 \cdot 9/8$. De modo que reemplazando la línea AB por una cuerda de música, i formando así un monocordio como el de Pythágoras. Si colocamos un caballete sucesivamente en a i en a' , produciremos el sonido *re* (sea re_2) i su correlativo *si*, $b \cdot 81/80$.

La misma construccion pudiendo repetirse con todas las demas notas, formaremos por este procedimiento la tabla que viene a continuacion.

Si en lugar de una cuerda son dos las que se emplean simultáneamente, el aparato podrá servir para estudiar los efectos de la correlacion.

Del mismo modo para el estudio completo de la harmonía se podría dar mas ensanche al primitivo aparato; reuniendo 7 pares de cuerdas, etc., etc.

Volviendo a la primera construccion, la que da el *re*, vemos que la nota que le corresponde es el *si* b modificado por el quebrado $\frac{81}{80}$, que los músicos llaman *coma*; esta nota no existe en la música actual; pero debería existir en virtud del principio de *correlacion*. Sin mas pormenores pasaremos a la tabla que representa la escala musical heliocromática (1).

(1) O gama cromática formada a imitacion de la escala de colores del espectro solar

GAMA HELIOCROMÁTICA

SIGNOS	NOTAS	COEFICIENTES	NOTAS CORRELATIVAS (1)	COEFICIENTES
L_0	ut_3	1	ut_4	$\frac{1}{2}$
L_0^*	ut^*	$\frac{2^4}{2^5}$	$ut\ b$	$\frac{2^5}{4^8}$
L_1b	$re\ b$	$\frac{2^5}{2^7}$	$si\ \frac{8^1}{8^0}$	$\frac{2^7}{5^0}$
L_1	re	$\frac{8}{9}$	$si\ b\ \frac{8^1}{8^0}$	$\frac{9}{1^8}$
L_1^*	re^*	$\frac{6^4}{7^5}$	$la\ \frac{1^2^5}{1^2^8}$	$\frac{7^5}{1^2^8}$
L_2b	$mi\ b$	$\frac{5}{6}$	la	$\frac{3}{5}$
L_2	mi	$\frac{4}{5}$	$la\ b$	$\frac{5}{8}$
L_2^*	mi^*	$\frac{9^6}{12^5}$	$sól\ \frac{1^2^5}{1^2^8}$	$\frac{1^2^5}{1^2^8}$
L_3b	fa	$\frac{3}{4}$	sol	$\frac{3}{5}$
L_3	fa	$\frac{1^2^5}{2^5}$	$sol\ b$	$\frac{2^5}{3^8}$
L_3^*	fa^*	$\frac{2^7}{4^0} \frac{1^2^5}{1^2^8}$	$fa\ \frac{8^0}{8^1} \frac{1^2^5}{1^2^8}$	$\frac{2^0}{2^7} \frac{1^2^5}{1^2^8}$
L_4b	$sol\ \frac{8^1}{8^0} \frac{1^2^5}{1^2^8}$	$\frac{2^5}{3^6} \frac{8^1}{8^0} = \frac{4^5}{8^4}$	$fa^*\ \frac{8^0}{8^1}$	$\frac{1^8}{2^5} \frac{8^0}{8^1}$
L_4	$sol\ b\ \frac{8^1}{8^0}$	$\frac{2^7}{4^0}$	$fa\ \frac{8^0}{8^1}$	$\frac{2^0}{2^7}$
L_4^*	$sol\ \frac{8^1}{8^0}$	$\frac{8^1}{1^2^5}$	$fa\ b\ \frac{8^0}{8^1}$	$\frac{2^5^0}{3^2^4}$
L_5b	$sol^*\ \frac{8^1}{8^0}$	$\frac{2^7}{4^0} \frac{1^2^5}{1^2^8}$	$fa\ \frac{8^0}{8^1} \frac{1^2^5}{1^2^8}$	$\frac{2^0}{2^7} \frac{1^2^5}{1^2^8}$
L_5	$sol\ \frac{8^1}{8^0} \frac{1^2^5}{1^2^8}$	$\frac{8^1}{1^2^8}$	$mi\ \frac{8^0}{8^1}$	$\frac{4}{5} \frac{8^0}{8^1}$
L_5^*	$la\ b\ \frac{8^1}{8^0}$	$\frac{3}{5} \frac{8^1}{8^0}$	$mi\ b\ \frac{8^0}{8^1}$	$\frac{5}{6} \frac{8^0}{8^1}$
L_6b	$la\ \frac{1^2^5}{1^2^8}$	$\frac{3}{5} \frac{1^2^5}{1^2^8}$	$mi\ b\ \frac{1^2^5}{1^2^8}$	$\frac{5}{6} \frac{1^2^5}{1^2^8}$
L_6	$si\ b\ \frac{8^1}{8^0}$	$\frac{9}{1^6}$	re	$\frac{8}{9}$
L_6^*	$si\ \frac{8^0}{8^1}$	$\frac{2^7}{5^0}$	$re\ b$	$\frac{2^5}{2^7}$
L_7b	ut_4b	$\frac{2^5}{4^8}$	ut^*	$\frac{2^4}{2^5}$
L_7	ut_4	$\frac{1}{2}$	ut_3	1

(1) Puestas a la octava superior para facilitar la comparacion.

Vemos que ademas de los factores cromáticos $24/25$ i $80/81$ existe un tercero: $125/128$, que se repite con mucha frecuencia, i tambien representa un intervalo susceptible de ser apreciado por el oido.

Todos los sonidos de la gama usual van reproducidos, a escepcion de uno, el *si natural*, circunstancia que no puede ménos de causar sorpresa, visto el papel importante que desempeña la «*séptima*» llamada tambien la *nota sensible* por excelencia. Ademas hemos visto que el factor $8/15$ puede servir de base o producto constante para formar una nueva gama. Seria de desear que algun músico enterado en la acústica buscara la explicacion de estos hechos que parecen verdaderamente anómalos.

Conclusion.—La simple vista de la tabla que sigue puede servir de resúmen final i sin mas comentarios técnicos la entrego a las meditaciones de los adeptos de la ciencia. Pero no puedo prescindir de señalar un *hecho* imposible de conciliar con la doctrina moderna llamada positiva. Seis siglos ántes de la era moderna, el jeómetra Pythágoras descubre las relaciones numéricas de los sonidos musicales i de allí infiere que la armonía, *traducible en números*, es la lei universal a la que todo en el cosmo está subordinado; la idea es aceptada con un entusiasmo delirante por los contemporáneos del gran filósofo, es comentada i sistematizada por sus sucesores, Platon a la cabeza; i, andando el tiempo, esta idea grandiosa llega a no ser mas que un sueño metafísico. Para los modernos la «*Harmonía de las esferas celestes*» es un lindo tema poético i nada mas; hasta que la química por una parte i sobre todo los estudios espectrales vienen a dar razon, del modo mas espléndido, a los antiguos metafísicos.

Así, en un tiempo mas o ménos lejano, las utopías de los iniciadores del gran movimiento social cuyo aniversario acabamos de celebrar, llegarán a ser verdades triviales a la par que realidades benéficas, entónces principiarán a despuntar otras utopías mas enormes, ya no contento con la armonía terrestre, el hombre,—*audex Jopeli genus*—aspirará a la ciudadanía universal.