# EL METODO DE GAUSS APLICADO AL TAQUIMETRO SIN HACER USO DEL CRONOMETRO

*por Jorge Dowling Desmadryl*

## INTRODUCCION

El método de Gauss, que es el más preciso en cuanto a observaciones astronómicas se refiere, puede traducirse ahora en simples observaciones sin necesidad de tener presente cronómetros y bastando sólo un taquímetro cuyo acimutal pueda aproximar a los segundos de arco.

Como, además, no interviene la refracción, ni la hora y pudiéndose calcular la declinación magnética, cuando el taquímetro, con la mayor acuciosidad, fué orientado al Norte Magnético el método que expongo abunda en ventajas, frente a sus clásicos inconvenientes en las observaciones.

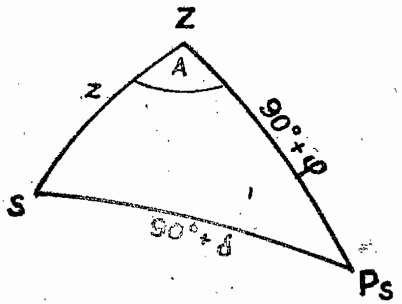
Entrego este trabajo para el conocimiento de todo el personal técnico del Ministerio de Minería y para todas las personas que se interesen por esta clase de estudios.

## METODO PARA DETERMINAR EL AZIMUT DE UN PUNTO Y LA LATITUD DE UN LUGAR CON UN TAQUIMETRO Y SIN RELOJ

El método consiste en medir las diferencias de azimutes que tengan tres estrellas cuando ellas alcanzan una misma distancia cenital. El modo de operar será fijar el taquímetro en una distancia cenital cualquiera y en seguida hacer la puntería a la primera estrella que llegue al hilo horizontal del retículo con el hilo vertical. Se leerá el círculo. Después se observan dos estrellas más que difieran entre sí aproximadamente en 120° de azimut y en las mismas condiciones que la primera, es decir, sin haber variado la distancia cenital del taquímetro. Sean $L_1$, $L_2$, $L_3$ las lecturas en el plato horizontal del taquímetro para las punterías de cada estrella observada, respectivamente.

Del triángulo esférico fundamental cenit-polo sur-estrella se obtiene aplicando el teorema del coseno al lado polo sur-estrella, lo siguiente:

$$-\operatorname{sen}\delta = -\cos z \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen} z \cos\varphi \cos A$$




Si aplicamos esta fórmula a cada una de las tres estrellas observadas y denotamos por $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ sus declinaciones, y por $A_1$, $A_2$, $A_3$ sus azimutes respectivos, se tiene:

$$1)\qquad \operatorname{sen}\delta_1 = \cos z \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen} z \cos\varphi \cos A_1$$
$$2)\qquad \operatorname{sen}\delta_2 = \cos z \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen} z \cos\varphi \cos A_2$$
$$3)\qquad \operatorname{sen}\delta_3 = \cos z \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen} z \cos\varphi \cos A_3$$

a) *Cálculo de los azimutes.*—Restemos las ecuaciones anteriores:

$$4)\qquad \operatorname{sen}\delta_1 - \operatorname{sen}\delta_2 = \operatorname{sen} z \cos\varphi\,(\cos A_2 - \cos A_1)$$
$$5)\qquad \operatorname{sen}\delta_2 - \operatorname{sen}\delta_3 = \operatorname{sen} z \cos\varphi\,(\cos A_3 - \cos A_2)$$

dividiendo estas ecuaciones:

$$6)\qquad \frac{\operatorname{sen}\delta_2 - \operatorname{sen}\delta_3}{\operatorname{sen}\delta_1 - \operatorname{sen}\delta_2} = \frac{\cos A_3 - \cos A_2}{\cos A_2 - \cos A_1}$$

llamemos N al primer miembro.

$$7)\qquad N = \frac{\operatorname{sen}\delta_2 - \operatorname{sen}\delta_3}{\operatorname{sen}\delta_1 - \operatorname{sen}\delta_2}$$

Reemplacemos este valor en la ecuación 6) y desarrollemos las diferencias de cosenos del segundo miembro:

$$8) \qquad N = \frac{\text{sen}\ \frac{1}{2}\,(A_3 + A_2)\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\,(A_3 - A_2)}{\text{sen}\ \frac{1}{2}\,(A_2 + A_1)\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\,(A_2 - A_1)}$$

Pero

$$9) \qquad A_2 - A_1 = L_2 - L_1$$

$$10) \qquad A_3 - A_1 = L_3 - L_1$$

$$11) \qquad A_3 - A_2 = L_3 - L_2$$

y de 9) y 11) se puede obtener

$$12) \qquad A_2 = A_1 + L_2 - L_1$$

$$13) \qquad A_3 = A_2 + L_3 - L_2$$

y sumando:

$$14) \qquad A_3 + A_2 = (A_2 + A_1) + (L_3 - L_1)$$

Reemplazando los valores de 9), 11) y 14) en 8) queda:

$$15) \quad N = \frac{\text{sen}\ \frac{1}{2}\,[\,(A_2 + A_1) + (L_3 - L_1)\,]\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\,(L_3 - L_2)}{\text{sen}\ \frac{1}{2}\,(A_2 + A_1)\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\,(L_2 - L_1)}$$

$$\frac{N\,\text{sen}\ \frac{1}{2}\,(L_2 - L_1)}{\text{sen}\ \frac{1}{2}\,(L_3 - L_2)} = \cos \frac{1}{2}\,(L_3 - L_1) + \cot \frac{1}{2}\,(A_2 + A_1)\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\,(L_3 - L_1)$$

$$16) \quad \cot \frac{1}{2}\,(A_2 + A_1) = \frac{N\,\text{sen}\ \frac{1}{2}\,(L_2 - L_1)}{\text{sen}\ \frac{1}{2}\,(L_3 - L_2)\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\,(L_3 - L_1)} - \cot \frac{1}{2}\,(L_3 - L_1)$$

De la ecuación 16 se obtiene $A_2 + A_1$ y de la relación 9) $A_2 - A_1$ de manera que es fácilmente calculable $A_1$ y $A_2$. $A_3$ se podría calcular o con 10) u 11).

Una vez calculados los azimutes de las estrellas se podrá obtener el azimut de la mira, a la cual se hubiere hecho punterías, por los métodos usuales.

2) *Cálculo de la latitud* y de la distancia cenital a la cual se observó.

Escribamos las ecuaciones 1) y 2) así:

$$17) \qquad \operatorname{sen}\delta_1 - \cos z \operatorname{sen}\varphi = - \operatorname{sen} z \cos\varphi \cos A_1$$
$$18) \qquad \operatorname{sen}\delta_2 - \cos z \operatorname{sen}\varphi = - \operatorname{sen} z \cos\varphi \cos A_2$$

y dividamos

$$\frac{\operatorname{sen}\delta_1 - \cos z \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\delta_2 - \cos z \operatorname{sen}\varphi} = \frac{\cos A_1}{\cos A_1}$$

$$\operatorname{sen}\delta_1 \cos A_2 - \cos z \operatorname{sen}\varphi \cos A_2 = \operatorname{sen}\delta_2 \cos A_1 - \cos z \operatorname{sen}\varphi \cos A_1$$
$$\cos z \operatorname{sen}\varphi (\cos A_2 - \cos A_1) = \operatorname{sen}\delta_1 \cos A_2 - \operatorname{sen}\delta_2 \cos A_1$$

$$19) \qquad \cos z \operatorname{sen}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\delta_1 \cos A_2 - \operatorname{sen}\delta_2 \cos A_1}{\cos A_2 - \cos A_1}$$

y de 4) obtenemos:

$$20) \qquad \operatorname{sen} z \cos\varphi = \frac{\operatorname{sen}\delta_1 - \operatorname{sen}\delta_2}{\cos A_2 - \cos A_1}$$

Los segundos miembros de 19) y 20) son calculables puesto que ya se ha determinado $A_1$ y $A_2$. Llamémosles P y Q respectivamente:

$$19') \qquad \cos z \operatorname{sen}\varphi = P$$
$$20') \qquad \operatorname{sen} z \cos\varphi = Q$$

Sumando y restando estas dos ecuaciones

$$\operatorname{sen}(\varphi + z) = P + Q$$
$$\operatorname{sen}(\varphi - z) = P - Q$$

de donde se obtiene $(\varphi + z)$ y $(\varphi - z)$ y finalmente $\varphi$ y z.

## *EJEMPLO NUMERICO*

Observación hecha en el Observatorio Astronómico de la Universidad de Chile por un astrónomo de ese Instituto con un teodolito Wild T2. Las estrellas han sido ordenadas por azimutes crecientes y no cronológicamente como se observaron. La reducción está hecha a máquina. En caso que se desee usar logaritmos conviene revisar las fórmulas para adaptarlas al cálculo logarítmico.

## *DATOS*

Fecha: 1953, marzo, 12

| *Estrellas observadas* | *Lecturas azimutales* |
|---|---|
| 1.—$\beta$ Orionis | $L_1$ 100° 37′ 25″ |
| 2.—$\sigma$ Leonis | $L_2$ 214° 39′ 17″ |
| 3.—$\beta$ Chamaleontis | $L_3$ 340° 10′ 44″ |

Lectura a la mira: 26° 18′ 26″

## *FORMULAS*

Para el azimut: $$N = \frac{\text{sen}\,\delta_2 - \text{sen}\,\delta_3}{\text{sen}\,\delta_1 - \text{sen}\,\delta_2}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}(A_2+A_1) = \frac{N\ \text{sen}\,\tfrac{1}{2}(L_2-L_1)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(L_3-L_2)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(L_3-L_1)} - \cot\tfrac{1}{2}(L_3-L_1)$$

$$\tfrac{1}{2}(A_2-A_1) = \tfrac{1}{2}(L_2-L_1)$$

Para la latitud y la distancia cenital:

$$P = \frac{\text{sen}\,\delta_1 \cos A_2 - \text{sen}\,\delta_2 \cos A_1}{\cos A_2 - \cos A_1} \qquad Q = \frac{\text{sen}\,\delta_1 - \text{sen}\,\delta_2}{\cos A_2 - \cos A_1} \qquad \begin{aligned} \text{sen}\,(\varphi+z) &= P+Q \\ \text{sen}\,(\varphi-z) &= P-Q \end{aligned}$$

## *CALCULO*

| | | |
|---|---|---|
| $\delta_1$ — 8° 15′ 19″ | sen $\delta_1$ — 0.14358 | sen $\delta_2$ — sen $\delta_3$ + 1.09124 |
| $\delta_2$ + 6° 16′ 58″ | sen $\delta_2$ + 0.10944 | sen $\delta_1$ — sen $\delta_2$ — 0.25302 |
| $\delta_3$ — 79° 3′ 12″ | sen $\delta_3$ — 0.98180 | N — 4.31286 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_2-L_1$ | 114 | 1 | 52 | $\frac{1}{2}(L_2-L_1)$ | 57° | 0′ | 56″ | sen $\frac{1}{2}(L_2-L_1)$ | +0.83882 |
| $L_3-L_2$ | 125 | 31 | 27 | $\frac{1}{2}(L_3-L_2)$ | 62 | 45 | 44 | sen $\frac{1}{2}(L_3-L_2)$ | +0.88912 |
| $L_3-L_1$ | 239 | 33 | 19 | $\frac{1}{2}(L_3-L_1)$ | 119 | 46 | 40 | sen $\frac{1}{2}(L_3-L_1)$ | +0.86796 |
| | | | | | | | | cot $\frac{1}{2}(L_3-L_1)$ | —0.57219 |

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(L_3-L_2)\qquad \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(L_3-L_1)\ +0.77172$$

$$\cot\tfrac{1}{2}(A_2+A_1)+\cot\tfrac{1}{2}(L_3-L_1)\ -4.68786$$

$$\cot\tfrac{1}{2}(A_2+A_1)\ -4.11567$$

$$\tfrac{1}{2}(A_2+A_1)\quad 166^\circ\ 20'\ 36''$$

$$\tfrac{1}{2}(L_2-L_1) = \tfrac{1}{2}(A_2-A_1)\quad 57\ \ 0\ \ 56$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_2$ | 223 | 21 | 32 | $\cos A_2$ | $-0.72706$ |
| $A_1$ | 109 | 19 | 40 | $\cos A_1$ | $-0.33097$ |
| $L_1$ | 100 | 37 | 25 | $\cos A_2-\cos A_1$ | $-0.39609$ |
| correc. lect. + | 8 | 42 | 15 | P | $-0.35500$ |
| lectura mira | 26 | 18 | 26 | Q | $+0.63879$ |
| | | | | $\operatorname{sen}(\varphi+z)$ | $+0.28379$ |
| AZIMUT MIRA | 35° | 0′ | 41″ | $\operatorname{sen}(\varphi-z)$ | $-0.99379$ |
| | | | | $\varphi+z$ | $+\ 16^\circ\ 29'\ 11''$ |
| LATITUD — | 33° | 33′ | 44″ | $\varphi-z$ | $-\ 83\ \ 36\ \ 40$ |
| | | | | $2\varphi$ | $-\ 67\ \ 7\ \ 29$ |
| DIST. ZENITAL | 50° | 2′ | 56″ | $2z$ | $100\ \ 5\ \ 51$ |

*Nota del observador.*—El lugar desde el cual se observó tiene una latitud de —33° 33′ 37″ y la distancia cenital a que se colocó el teodolito fué de 50° 0′ 0″. Como se ve, tanto la latitud y la distancia cenital no quedan bien determinadas por la elección de la distancia cenital misma, pues $\varphi - z$ quedó muy próximo de 90°, región en la cual el seno no define bien al ángulo. Para comparar las distancias cenitales debe tomarse en cuenta la refracción. El azimut de la mira, en cambio, no queda afectado por la distancia cenital que se elija: otras determinaciones hechas en la misma noche dan resultados concordantes al segundo de arco. Los azimutes están contados a partir del punto cardinal sur hacia el oeste.

## CONCLUSION

De todo lo expuesto, se desprende que el método propuesto tiene sus señaladas ventajas y todo depende de la precisión del taquímetro empleado.

También, y esto es indispensable, es necesario, previamente, adoptar una distancia cenital, de tal manera que $\varphi - z$ no sea próximo a 90°.

Para comprobar la exactitud de las observaciones, basta comparar los resultados obtenidos en el cálculo de las distancias cenitales y sus diferencias señalarán la bondad que él tiene para el cálculo de la latitud.