SECCIÓN TÉCNICA

Gradas de bajada en canales

POR

FRANCISCO JAVIER DOMINGUEZ S.

(*Continuación*)

Si el torrente se produce al pie de la napa se le puede trazar por puntos escalonados pues se conoce su punto de partida, interesa evidentemente prever la posibilidad de su producción. El límite de su posibilidad es que la profundidad relativa al pie de la napa, que hemos llamado R, satisfaga las condiciones de resalto que lo transformará en el río de aguas abajo.

Partiendo de la ecuación conocida de los resaltos (1)

$$\frac{\omega_1 + \omega_o}{2} \omega_o \omega_1 = \frac{\alpha Q^2 l}{g \cos i}$$

en que ω_o y ω_1 son las secciones antes y después del resalto y l el ancho del canal; si suponemos $\cos i = 1$, $\alpha = 1$ y lecho rectangular de ancho constante, notando que $\omega_o = h_o l$; $\omega_1 = h_1 l$ y $\frac{Q^2}{l^2 g} = h_c^3$, obtendremos:

$$\frac{h_o + h_1}{2} h_o h_1 = h_c^3$$

ecuación que dividida por h_c^3, llamando $\frac{h_1}{h_c} = S$ e introduciendo, en el caso límite que nos ocupa la condición $\frac{h_o}{h_c} = R$, profundidad relativa del torrente al pie de

(1) Boussinesq "Eaux courrantes" pág. 131.

la napa, queda finalmente

$$\frac{R^2S}{2} + \frac{S^2R}{2} = 1$$

y despejando S

$$S = \frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{2}{R}}$$

Sustituídos en esta ecuación los valores de R correspondientes a cada valor de K nos resultan para S los valores del cuadro siguiente (1).

K	S	K	S
0,0	1,00	2,00	1,80
0,1	1,24	2,50	1,85
0,2	1,32	3,00	1,89
0,3	1,385	3,50	1,94
0,4	1,44	4,00	1,985
0,5	1,475	5,00	2,02
0,6	1,515	6,00	2,045
0,7	1,55	7,00	2,07
0.8	1,58	8,00	2,085
0,9	1,605	9,00	2,09
1,0	1,635	10,00	2,095
1,25	1,68	12,00	2,10
1,50	1,73	15,00	2,10
1,75	1,76	....	....

Dado K, una profundidad relativa del río S, mayor que la indicada en este cuadro significa que el pie de la napa será cubierto por el resalto y precisamente el valor S anotado corresponde a lo que llamó Bazin «la partida del resalto».

Notemos de pasada que para $K=1{,}762$, $S=1{,}762$ y que en K menores S es mayor que K, lo que quiere decir que la superficie libre del río es superior al umbral de la grada.

(1) Los S negativos no son solución de la cuestión, no aparecen en el cuadro. Las alturas relativas de resaltos vienen tabuladas en Salas E. Escurrimiento variado pág. 97.

El gráfico N.º 5 da la función S = f (K),

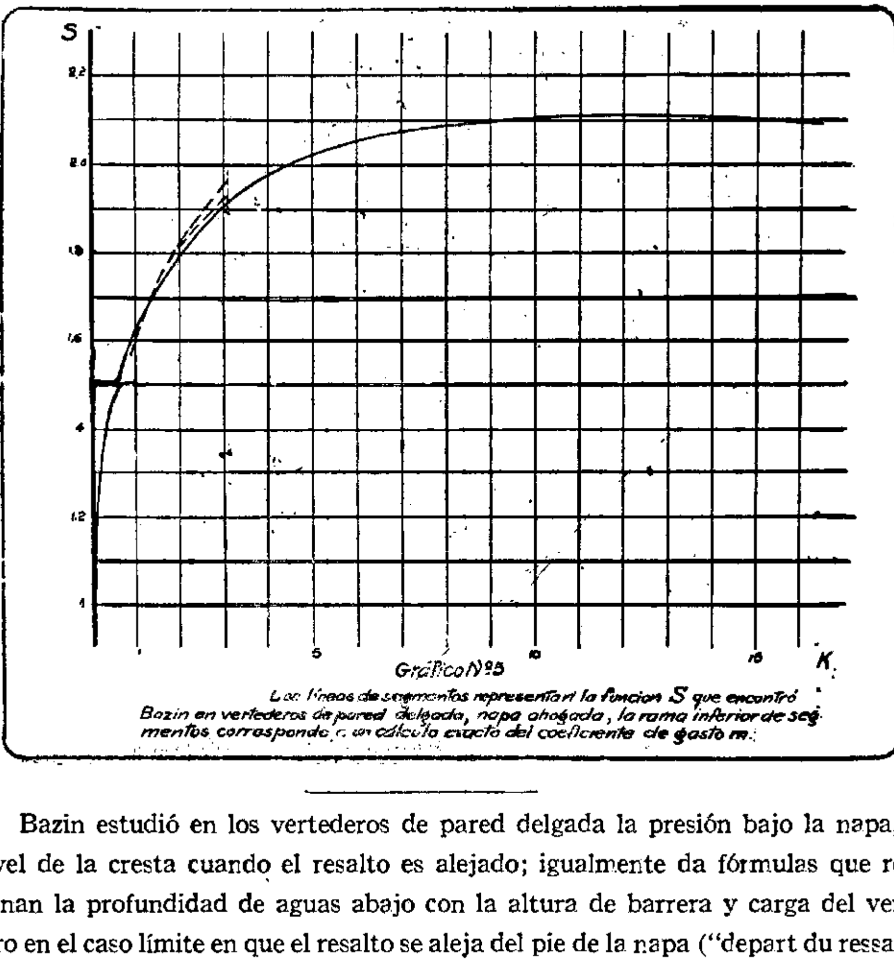


Gráfico N.º 5

Las líneas de segmentos representan la función S que encontró Bazin en vertederos de pared delgada, napa ahogada, la rama inferior de segmentos corresponde a un cálculo exacto del coeficiente de gasto m.

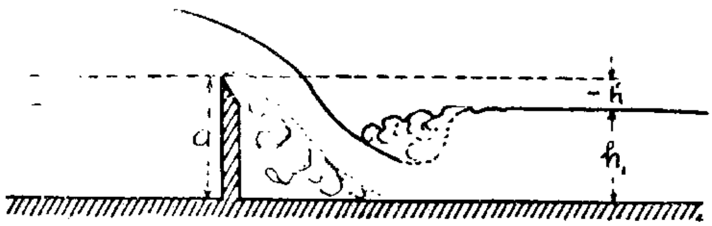
Bazin estudió en los vertederos de pared delgada la presión bajo la napa, al nivel de la cresta cuando el resalto es alejado; igualmente da fórmulas que relacionan la profundidad de aguas abajo con la altura de barrera y carga del vertedero en el caso límite en que el resalto se aleja del pie de la napa ("depart du ressaut" 4. eme article pág. 38). Vamos a ver la relación de los resultados de Bazin en vertederos de napa ahogada, pared delgada, con los que hemos encontrado en las gradas.

Empezaremos por la partida del resalto. Según sus experiencias Bazin, en vertederos de pared delgada y napa ahogada llega a la conclusión que el resalto se aleja del pie de la napa cuando se verifica la relación:

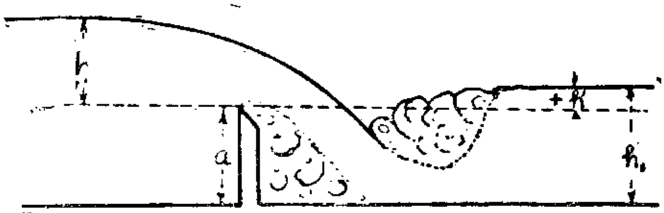
$$\left.\begin{array}{l} \text{vertedero completo } \dfrac{h}{a} = 0.718 + 0.872\,\dfrac{h'}{a} \\[2ex] \text{vertedero incompleto } \dfrac{h}{a} = 0,7 + \dfrac{h'}{a} \end{array}\right\} A$$

en que h es la carga del vertedero, a la altura de barrera y h' la diferencia entre el nivel de aguas abajo y la cresta del vertedero (retenue d'aval), negativa en el vertedero completo y positiva en el incompleto.

Las napas ahogadas se producen como se sabe cuando $\frac{h}{a} > 0.383$ $\left(\text{o sea} \frac{a}{h} < 2.6 \right)$



Vertedero completo



vertedero incompleto.

La profundidad h_1 de aguas bajo, queda dada por la relación

$$h_1 = a + h' \qquad h' = h_1 - a$$

teniendo h' su signo propio, como se dijo. Introduciendo arriba, teniendo en cuenta el signo y despejando h_1 se llega por fin

$$\left.\begin{array}{l} \text{vertedero completo } h_1 = 1{,}147\ h + 0{,}177\ a \\ \text{vertedero incompleto } h_1 = h + 0{,}3\ a \end{array}\right\} B$$

Para compararlas con nuestros resultados, dividamos la ecuaciones **B** por la profundidad crítica, notando que $\frac{a}{h_c} = K$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{vertedero completo} & \dfrac{h_1}{h_c} = 1{,}147\,\dfrac{h}{h_c} + 0{,}177\ K \\[2ex] \text{vertedero incompleto} & \dfrac{h_1}{h_c} = \dfrac{h}{h_c} + 0{,}3\ K \end{array}\right\}\ C$$

Es necesario conocer $\frac{h}{h_c}$, lo que es muy sencillo: la fórmula general del gasto por metro de ancho de vertedero es:

$$q = mh\sqrt{2gh}$$

y de aquí deducimos $\dfrac{q^2}{g} = 2m^2h^3$

pero $\dfrac{q^2}{g} = h_c^3$ luego

$$\frac{h}{h_c} = \frac{1}{\sqrt[3]{2m^2}} \qquad D$$

Según Bazin en el punto límite considerado, en que el resalto se aleja, son válidas las fórmulas de m, coeficiente de gasto, que él da para napas influenciadas por el resalto y para napas con resalto alejado, pues ambas dan en ese caso el mismo valor numérico. El señala para resalto alejado la expresión:

$$m = 0{,}47 + 0{,}0075\left(\frac{a}{h}\right)^2 \qquad E$$

cuyos valores extremos de m son 0,47 y 0,521, cuando varía $\frac{a}{h}$ entre los límites posibles de napa ahogada $0 < \frac{a}{h} < 2{,}6$. Bazin experimentó para valores $\frac{a}{h}$ comprendidos entre 0,57 y 2,6; para $\frac{a}{h} = 0{,}57$, $m = 0{,}472$.

Dividiendo y multiplicando el primer miembro de la D por a se tiene:

$$\frac{h}{a} K = \frac{1}{\sqrt[3]{2m^2}} \text{ o sea } \frac{a}{h} = K \sqrt[3]{2m^2} \qquad F$$

y de aquí

$$\left(\frac{a}{h}\right)^2 = 1.587\ K^2 m^{4|3}.$$

Este valor introducido en la E nos da por fin: (1).

$$m\left(1-0{,}0119\,K^2 m^{1|3}\right) = 0{,}47$$

$m^{1|3}$ variará entre 0,805 y 0,779 entre sus valores límites anotados y se puede aceptar como término medio $m^{1|3} = 0{,}792$ sin error importante, que ejecutando da la ecuación sencilla de m en función de K

$$m = \frac{0{,}47}{1-0{,}0094\,K^2} \qquad G$$

que da pequeñas diferencias con la E, por defecto.

La razón $\frac{h}{h_c}$ dada por la ecuación D es siempre mayor que la unidad, pues se necesitarían valores de $m > 0{,}707$ para que fuera menor que ella, esto indica que $\frac{h}{h_c}$, dado por las ecuaciones C, es también siempre mayor que la unidad, cualquiera que sea el valor de K, o en otros palabras $\frac{h}{h_c}$ es una profundidad relativa de río, en este caso del río hasta el cual salta el resalto, es lo que hemos llamado S en la grada.

La sustitución de h, por a en las ecuaciones C da el valor de K que corresponde al límite de validez de la fórmula para vertedero completo o incompleto. Ese límite que debía coincidir en ambas fórmulas es K = 1,793 en la de vertedero completo y 1,837 en la de incompleto. (2)

---

(1) $m = 0{,}47 + 0{,}0075 \times 1{,}587\ K^2\ m \times m^{1|3} = 0{,}47 + 0{,}0119\ K^2\ m \times m^{1|3}$.

$$m\ (1 - 0{,}0119\ K^2\ m^{1|3}) = 0{,}47$$

(2) 4eme article página 18 cuadro en que aparece $\frac{h}{a} = 1{,}70$ como valor extremo. En las experiencias se encuentra hasta $\frac{h}{a} = 1.77$ lo que da $\frac{h}{a} = 0{,}57$

Como se dijo, Bazin experimentó desde $\frac{a}{h} = 0{,}57$ que (según las ecuaciones E y F) equivale a $\frac{a}{h_c} = K = 0{,}75$ hasta la conversión en napa deprimida o adherente $\frac{a}{h} = 2{,}6$ que equivale a $K = 3{,}19$. En el cuadro siguiente aparecen los $\frac{h_1}{h_c}$ según Bazin referidos a nuestro K. La columna N.° 2 se ha calculado por medio de la fórmula G, la N.° 3 por medio de la ecuación D y las 4 y 5 por las ecuaciones C; según se trate de $\frac{h_1}{h_c}$ mayor o menor que K, los valores corresponden a vertedero incompleto o completo; la N.° 6 da nuestros valores de S en gradas que comparados con los de Bazin dan una diferencia máxima de 3,8% por exceso en el vertedero, que corres-

1	2	3	4	5	6	7	8	9
			S			R		
			Bazin			Bazin		
K	m	$\frac{h}{h_c}$	Vertedero completo	Vertedero incompleto	en Grada	Vertedero completo	Vertedero incompleto	en Grada
0.75	0.474	1.306		1.531	1.57		0.610	0.591
1.00	0.475	1.304		1.604	1.635		0.573	0.560
1.25	0.477	1.300		1.675	1.68		0.542	0.536
1.50	0.480	1.294		1.744	1.73		0.515	0.515
1.793	0.485	1.286	1.793	1.824	1.78	0.494	0.483	0.493
1.837	0.485	1.286	1.800	1.837	1.79	0.490	0.475	0.490
2.00	0.488	1.280	1.822		1.80	0.478		0.486
2.5	0.499	1.262	1.889		1.85	0.452		0.466
3.0	0.508	1.247	1.962		1.89	0.427		0.452
3.19	0.521	1.227	1.972		1.92	0.424		0.444

ponde a $K = 3$ y una diferencia media, (sin tomar en cuenta si es por exceso o defecto) de 1,88%. En realidad la diferencia es menor pues la fórmula que hemos aceptado para m y aun la E de Bazin los da menores en los últimos K que las propias experiencias de Bazin, o sea exagera los $\frac{h}{h_c}$. Calculado correctamente m para $K = 3$ (daría $m = 0{,}54$ en vez de 0,508) se obtiene $\frac{h}{h_c} = 1{,}198$ y $S = 1{,}923$ lo que da una diferencia de 1,8% por exceso en vez de 3,8%). Se ha agregado en las columnas 7 y 8 el cálculo de R, altura relativa del torrente al pie de la napa, valiéndose de la relación antes citada:

$$\frac{R^2S}{2} + \frac{S^2R}{2} = 1$$

Los R del vertedero de pared delgada se pueden comparar con los R de la grada que aparecen en la columna 9.

El cuadro solo registra, como es lógico, el margen de las experiencias de Bazin.

En el gráfico N.° 5 se ha trazado con línea de segmentos la curva que une los S de vertederos de Bazin.

El cuadro anterior indica que a igualdad de gasto y altura de barrera son prácticamente iguales en las gradas y vertederos de pared delgada, napa ahogada las profundidades del río en el caso límite en que el resalto abandona el pie de la napa, y también son iguales en ambas disposiciones los espesores del torrente al pie de la napa cuando el resalto es alejado puesto que R no depende en realidad de S sino vice-versa. Este último hecho acepta una nueva demostración con los datos que da Bazin en su 4.° artículo (1) página 20, en una nota que dice así: "*el espesor mínimo de la lámina de agua inmediatamente al pie de la caida está en una razón casi constante con la carga h; esta razón crece a medida que la altura de la barrera disminuye, ha sido en término medio 0,375 para el vertedero de 0,75 m y de 0,43 para el de 0,24. La superficie del agua se levanta en seguida a partir de este mínimo etc.*" Bazin se refiere a napas ahogadas con resalto alejado, sus experiencias (series 35 y 38) abarcan en el vertedero de 0,75 m. desde las cargas de 0,29 a 0,43 m y de 0,14 a 0,40 m en el de 0,24 m. Quiere decir que la razón entre el espesor de la lámina al pie de la napa y la carga, o sea, con nuestra notación, $\frac{h_o}{h}$ vale 0,375 cuando $\frac{a}{h}$ vale como término medio 0,48 (varía de 0,39 a 0,57) y $\frac{h_o}{h}$ =0,43 cuando $\frac{a}{h}$ en término medio vale 1,19. (varía de 0,61 a 1,77) Calculando en la forma que se hizo anteriormente se obtiene el cuadro:

(1) De sus "Experiencies nouvelles sur l'écoulement en deversoir".

$\frac{h}{a}$	$\frac{a}{h}$	m	$\frac{h}{h_c}$	$\frac{h_o}{h}$	$\frac{h_o}{h_c}$	R en grada	$\frac{a}{h_c}=K$	Diferencia en % de $\frac{h_o}{h_c}$
0,48	2,089	0,503	1,255	0,375	0,470	0,460	2,616	+ 2,4
1,19	0,840	0,475	1,304	0,430	0,560	0,552	1,096	+ 1,43

Si se compara los $\frac{h_o}{h_c}$ de este cuadrito con los R de Bazin correspondientes a los mismos K, deducidos del cuadro anterior se encuentra una diferencia mayor entre ellos que con los R de gradas.

La igualdad del espesor de la napa en las gradas y vertederos de pared delgada que venimos comentando lleva a la conclusión inmediata que la pérdida de carga por inflexiones, choque del fondo y por absorciones de energía en remolinos bajo la napa, es menor en el vertedero que en la grada. En efecto, para un K dado, la igualdad de R supone la igualdad de sumas de Bernoulli al pie de la napa, pero no sucede tal cosa con el Bernoulli inicial que en la grada y vertedero son diversos; en el caso de grada, como queda demostrado es crítico sobre ella, de valor independiente de la grada, $\frac{3}{2}h_c$ o sea referido al fondo $\frac{3}{2}h_c+a$. En el vertedero vale $h+\alpha_o\frac{u_o^2}{2g}+a$ siendo h la carga y u_o la velocidad inicial $\left(\text{fácil de calcular pues } u_o=\frac{q}{h+a},\ \frac{u_o^2}{2g}=\frac{q^2}{g2(h+a)^2} \text{ o sea } \frac{h_c^3}{2(h+a)^2}\right)$. Referido a la profundidad crítica el Bernoulli inicial en la grada vale $\frac{B_g}{h_c}=1,5+K$, y en el vertedero, si $\alpha_o=\frac{5}{3}$ (valor medio de Bazin), llamando $\frac{h}{h_c}=H$.

$$\frac{B_v}{h_c}=H+\frac{5}{6(H+K)^2}+K$$

El Bernoulli al pie de la napa siendo R la profundidad relativa, en ambos casos vale $\left(u=\frac{q}{h_o};\ \frac{u^2}{2g}=\frac{q^2}{g2h_o^2}=\frac{h_c^3}{2h_o^2}=\frac{h_c}{2R^2}\right)$, referido a la profundidad crítica:

$$\frac{B_1}{h_c} = R + \frac{1}{2R^2}$$

En el cuadro siguiente aparecen los valores calculados por medio de estas expresiones de los Bernoulli anteriores y finales y su diferencia que viene a ser la pérdida de carga referida a la profundidad crítica $\left(\frac{\Lambda}{h_c} = \frac{\lambda}{2}\right)$. En este cuadro R se ha tomado de nuestro cuadro de valores en grada. Los H se han obtenido del cuadro de la página 400.

K	Bernoulli inicial $\frac{B_o}{h_c}$ Vertedero	Bernoulli inicial $\frac{B_o}{h_c}$ Grada	Bernoulli final $\frac{B_1}{h_c}$	Pérdida de carga $\frac{B_o B_1}{h_c} = \frac{\Lambda}{h_c}$ Vertedero	Pérdida de carga $\frac{B_o B_1}{h_c} = \frac{\Lambda}{h_c}$ Grada
0.75	2.254	2.250	1.949	0.305	0.301
1.00	2.456	2.500	2.145	0.311	0.355
1.25	2.679	2.750	2.270	0.409	0.480
1.50	2.901	3.000	2.395	0.506	0.605
1.793	3.167	3.293	2.498	0.669	0.795
1.837	3.209	3.337	2.517	0.692	0.820
2.00	3.358	3.500	2.605	0.753	0.895
2.50	3.821	4.000	2.785	1.036	1.215
3.00	4.294	4.500	2.925	1.369	1.575
3.19	4.461	4.690	2.965	1.496	1.725

La pérdida de carga entre los límites de este cuadro, en el vertedero puede llegar a ser hasta 15% menor que en la grada.

Bazin encontró que la altura de presión al nivel de la cresta de los vertederos de pared delgada, napa ahogada y resalto alejado seguía la ley lineal

$$\frac{P_o}{h} = 0,60 - 0.58\frac{a}{h}; \text{ o sea, } P_o = 0,60\,h - 0,58\,a$$

si se supone que varía hidrostáticamente hasta el fondo, lo que no es muy fuera de lo real si se desprecian las velocidades del líquido sub-napa, en el fondo al pie del vertedero, valdría la presión

$$P_1 = 0{,}60\,h - 0{,}58\,a + a = 0{,}60\,h + 0{,}42\,a$$

P_1 es lo que en la grada hemos llamado $\frac{P}{\gamma}$, dividiendo esta ecuación por h_c se tendría

$$\frac{P_1}{h_c} = 0{,}60\frac{h}{h_c} + 0{,}42\,K$$

En el cuadro siguiente aparecen los $\frac{P_1}{h_c}$ calculados por medio de esta expresión, que se compararan con los N que hemos encontrado para las gradas:

K	=	0.75	1.00	1.25	1.50	1.793	1.837	2	2.5	3	3.19
$\frac{P_1}{h_c}$	=	1.099	1.20	1.305	1.406	1.525	1.544	1.578	1.857	2.008	2.076
N	=	1.165	1.266	1.367	1.48	1.58	1.600	1.666	1.813	1.923	1.94

La plancha 41 del 5.° artículo de Bazin que indica la variación del presión bajo la napa en los vertederos de viguetas muestra también como dicha presión, para un mismo $\frac{a}{h}$ varía con la relación $\frac{e}{a}$ entre el espesor del umbral y la altura de barrera. Ateniéndonos a los napas ahogadas, únicas en que la presión al pie de la barrera depende hidrostáticamente de la que existe bajo la napa se vé que la relación válida para vertederos de pared delgada es un término medio de los $\frac{P_o}{h}$ que se obtienen cuando el umbral tiene espesor, pues hay $\frac{P_o}{h}$ bajo la recta $\frac{P_o}{h} = 0{,}60 - 0{,}58\frac{a}{h}$ y sobre ella. El mismo hecho se constata en nuestro gráfico N.° 3, en el cual se ha tratado de encontrar una función media unicamente. En la plancha 41 de Bazin se nota también que $\frac{P_o}{h}$ tiende en todos los $\frac{e}{a}$ registrados al valor único $\frac{P_o}{h}$ — 0,6 más o menos, cuando la carga es pequeña y las napas son deprimidas (1).

---

(1) Al terminar el estudio de la pérdida de carga que se produce por una grada con resalto alejado y como venimos de ver por un vertedero de pared delgada en esas condiciones viene muy al caso comentar lo que al respecto dice Boussinesq (Theorie approchée de l'écoulement sur un déversoir § VI

Antes de continuar el estudio de la grada, terminada esta primera parte que corresponde al resalto alejado es conveniente presentar ejemplos que al mismo tiempo que revelan la utilidadad de este estudio pongan de manifiesto la manera de calcular.

Supongamos que el entrante de un marco de barrera de sección rectangular lleve un gasto de 16 m^3 : s, siendo el marco en la sección de partición de 8 m de ancho, y los anchos de los derivados proporcionales a derechos de 6 y 2 m en la sección de partición. Supuesta la partición bien hecha sus gastos serán 12 m^3 : s en el pasante y 4 en el saliente. Supongamos que siendo pendientes suaves indefinidas las de ambos ramales, sus profundidades de régimen uniforme son 1,8 m en el saliente y 1.20 m en el pasante y sus Bernoulli en régimen uniforme contados desde el fondo 1,85 y 1,36 m respectivamente. La barrera como puede verse en el plano adjunto es de 1 m de altura y de 2,5 m de espesor en el sentido del escurrimiento.

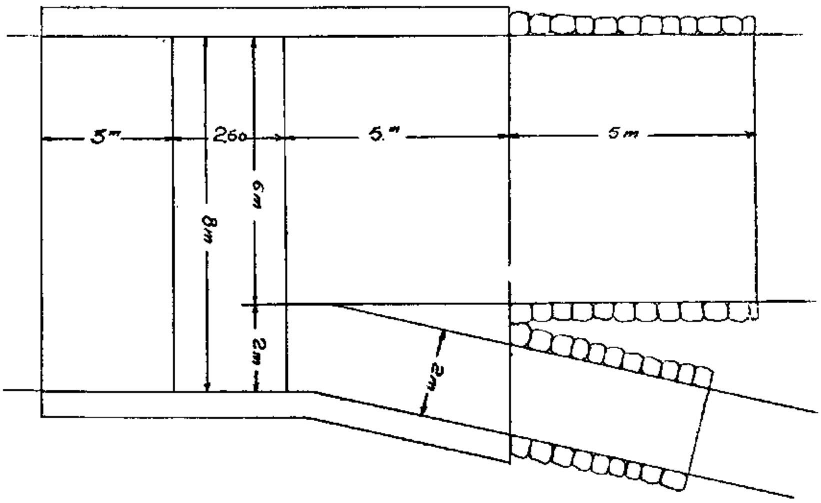
Dadas las demás dimensiones que constan en el plano, se desea conocer cuál será el eje hidráulico de los derivados con el gasto supuesto.

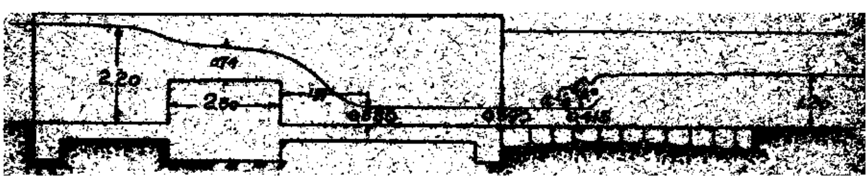
El gasto unitario sobre la barrera es q = 2 $m.^2$: s. La profundidad crítica correspondiente $h_c = 0{,}74$ m. La altura relativa de grada $K = \frac{a}{h_c} = \frac{1}{0{,}74} = 1{,}35$. Leyendo en los gráficos N.°, 5, 4 y 2 respectivamente se obtiene

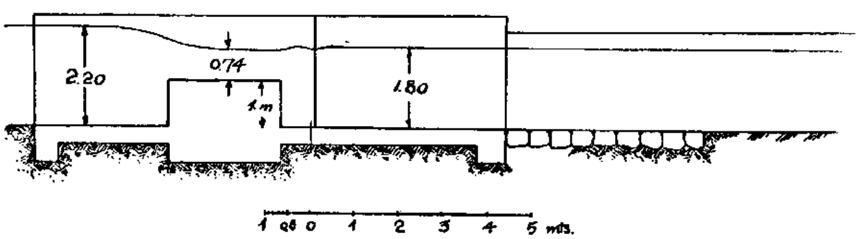
$$S = 1{,}69 \qquad D = 1{,}13 \qquad R = 0{,}52$$

lo que significa que habrá torrente si la profundidad de aguas abajo es menor de $1{,}69 \times 0{,}74 = 1{,}25$ mts; que la distancia desde el pie de la barrera hasta la sección en que los filetes se enderezan es de $1{,}13\ (1 + 0{,}74) = 1{,}97$ mts; y que la profundi-

pág. 70 en la nota). Dice: "la sección normal de la masa fluída en el canal que sigue, donde los filetes de la napa vuelven a ser horizontales es menor que la napa contraída; no parece que haya entre estas dos secciones ensanchamiento sensible de los filetes, **de suerte que las pérdidas de carga deben ser, con cierta aproximación, despreciables** desde aguas arriba donde el nivel es h hasta esta sección del canal que sigue, donde lo llamaremos h_1 Se podrá, pues ensayar de aplicar al fluído, en todo este trecho, el principio de D. Bernoulli; lo que daría, en el canal que sigue, donde la profundidad de agua es $H_0 + h_1$ (con h_1 negativo), la velocidad común $\sqrt{2g\,(h-h_1)}$... Cuanto se ha dicho prueba que tanto en una grada como en un vertedero de pared delgada seguidos por un torrente existe una pérdida de carga apreciable, y tanto mayor mientras, a igualdad de gasto mayor es la altura de caída o barrera. Aparentemente en realidad no se manifiesta el ensanche de filetes líquidos, pero se podría creer que la napa al chocar contra el fondo trata de reflejarse, produciéndose en los filetes inferiores, la contracción y un ensanche de reacción posterior. (Calculando como se ha dicho en el vertedero de pared delgada aceptando con Bazin $\frac{h_c}{h} = 0{,}375$ para $\frac{a}{h} = 209$ se ve que se pierde casi $\frac{h}{2}$ la mitad de la carga sobre el umbral del vertedero).







dad inicial del torrente sería de 0,52 $\times$ 0,74 = 0,385 mts. Según esto habrá torrente en el pasante cuya profundidad de régimen es de 1,20 mts, en cambio el saliente de profundidad mayor de 1,25, (despreciando la pérdida de carga por codo) tomará sensiblemente su profundidad de régimen. 1.80 mts., desde el pie de la grada; siendo sin embargo su Bernoulli (1,85 m) menor que el crítico en la barrera, $\left(\frac{3h_c}{2} = 1,11\right.$ referido al emplantillado 1,11 + 1 = 2,11) y menor en cantidad suficiente para hacer frente a la pérdida de carga por ensanche brusco, no influenciará la partición y efectivamente sobre la barrera se verificará el Bernoulli mínimo.

En el presente, al pie de la napa donde empieza el torrente, la sección mojada es 0,385 × 6 = 2,31 m²., y en consecuencia la velocidad media es $U = \frac{12}{2,31} = 5,2$ m : s, magnitud que está al límite superior de lo aceptable en concreto, con agua que no lleva arrastres, pero, que en nuestros canales del Centro del País, que llevan troncos arenas y piedras de gran tamaño significaría la ruina a corto plazo del emplantillado de un marco. La supresión del torrente puede hacerse por medio de un colchón

de agua que aumentando mucho la profundidad de aguas abajo, (a pesar del aumento de K), la hace fácilmente mayor que la *Shc* correspondiente. En el caso nuestro bastaría un colchón de agua de 10 cm. En caso de hacer la corrección se adoptará igual disposición en ambos ramales, pues aunque el saliente, como sucede aquí no lo necesita se evita en la igualdad de condiciones dificultades provenientes de las personas interesadas en la partición (1),

(1) En el supuesto que el emplantillado y el trozo revestido siguiente, ambos de 5 m de longitud, no tengan pendiente y sean de sección rectangular de 6 m de base, el trazado del torrente y ubicación del resalto se calculan a continuación:

Profundidad relativa final del resalto $\frac{1,2}{0,74} = 1,622$

Profundidad relativa inicial que le corresponde: 0,564, es decir que el torrente se desarrollará desde la profundidad 0,385 a la 0,565 × 0,74 = 0,415 mts. El cálculo del eje hidráulico por puntos escalonados, computando los frotamientos por la fórmula de Bazin, va en el cuadro siguiente:

h m	Ω 2	Ψ m	R m	$\frac{1}{2}$	U m : s	$\frac{U^2}{2g}$ m	B m	$B_0 - B_1$ m	J	$\frac{J_0+J_1}{2}$	l m	L m
Trozo de concreto												
0,385	2.31	6.77	0.341	0.000216	5.20	1.38	1.765		0.0172			1.67
0,395	2.37	6.79	0.349	,,	5.06	1.31	1.705	0.060	0.0159	0.0165	3.64	5.21
Trozo empedrado												
0,395	2.37	6.79	-0.349	0.00077	5.06	1.31	1.705		0.0565			5.00
0,415	2.49	6.83	0.365	,,	4.81	1.185	1.600	0.105	0.0490	0.0527	1.99	7.06

Por último otro ejemplo del trazado del eje hidráulico que produce una grada de bajada, comparando con la experiencia, y que pone de manifiesto la bondad del método de calcularlo por puntos escalonados ofrece la experiencia 2 de la serie 81 de Bazin, dibujado por él en la plancha XXV de sus "Recherches Hydrauliques". Aguas arriba de la grada, el canal de sección rectangular, de paredes recubiertas de tablitas espaciadas 0,05 m es de 1,96 m de ancho y tiene una pendiente de 0.0015; sirvió este canal para la serie 15 de escurrimiento uniforme, cuyo gráfico de $\frac{1}{C^2}$ aparece en función de $\frac{1}{R}$ en la plancha IX de las Recherches. Hemos calculado los J de la ecuación $J = \frac{U^2}{C^2R}$ trazando sobre el gráfico de dicha plancha una línea continua. La grada es de 0,15 m de alto. Aguas abajo sigue el canal con pendiente 0,00208, revestido de tablas, de sección también rectangular de 1,99 m de base. Para este segundo trozo experimentado por Bazin en escurrimiento uniforme en su serie 6, hemos calculado los J con los resultados de dicha serie expuestos en la pág. 78 de las "Recherches". El gasto en la experiencia 2 de la serie 81 fué de 0,824 m^3 : s.

La profundidad de régimen de aguas arriba de la grada, que satisface la expresión $I = 0{,}0015 = J = \frac{U^2}{C^2R}$ resulta ser de $h_r = 0{,}496$ m y la de aguas abajo $h_r = 0{,}290$ m. La profundidad crítica (algo diferente aguas arriba de aguas abajo de la grada, por la pequeña diferencia de ancho del canal) calculada por medio de la expresión $h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{l^2g}}$ es de $h_c = 0{,}262$ mts. aguas arriba y $h_c = 0{,}259$ m, aguas abajo de la grada. La comparación de las profundidades de régimen con la crítica indica que ambas pendientes son suaves.

El cálculo de la grada da:

---

la última columna que da la distancia acumulada donde la profundidad respectiva se produce, contada desde el pie de la barrera se ha calculado redondeando las cifras y aceptando para el fin del emplantillado h = 0,395, que según el cálculo se produce 0,2 m más abajo. Según estos cálculos el resalto se sitúa a unos 7,0 m del pie de la barrera. Aparece dibujado en el plano del marco.

torbellino que se forma bajo la contracción, en vez de tomar el sentido general de la corriente, como lo hacían otras situadas mas aguas abajo.

La aplicación del teorema de Bernoulli al haz de filetes, desde una sección A suficientemente alejada de la grada para que en ella, siendo los filetes paralelos, rija la ley hidrostática, hasta la sección D, sobre la grada en que restablecido el paralelismo de filetes, hay por hipótesis escurrimiento crítico, exige agregar a la carga de aguas abajo la pérdida de carga de entrada para igualarla a la de agua arriba. Tomando como referencia el plano (que se puede suponer horizontal) de la cresta de la grada, en D el Bernoulli, siendo crítico, vale $\frac{3}{2}$ hc; en A, refiriendo al mismo plano el Bernoulli es la suma de la altura h y la altura media de velocidad $\alpha\frac{U_o^2}{2g}$. La pérdida de carga, contada en alturas de velocidad final será $\lambda\frac{U_c^2}{2g} = \lambda\frac{h_c}{2}$

Se tiene pues la igualdad

$$h + \alpha\frac{U_o^2}{2g} = \frac{3}{2}h_c + \lambda\frac{h_c}{2}$$

Llamando H la carga total inicial, $H = h + \alpha\frac{U_o^2}{2g}$ se obtiene:

$$H = h_c\,(1{,}5 + 0{,}5\,\lambda)$$

ecuación que dividida por h_c vale:

$$\frac{H}{h_c} = 1{,}5 + 0{,}5\,\lambda$$

Como se sabe, siempre que se pueda prescindir de los frotamientos interiores el número λ en las pérdidas de carga singulares depende únicamente de la disposición geométrica y no de las velocidades. En este caso siendo la altura de velocidad crítica la mitad de la profundidad crítica, y dependiendo ésta únicamente del gasto por unidad de ancho la razón $\frac{H}{h_c}$ debe ser constante existiendo escurrimiento crítico sobre la grada. Como se desprenderá de las observaciones siguientes, la experiencia corrobora este raciocinio, indicando que λ, descontados los frotamientos

$K = \frac{0,15}{0,26} = 0,577$; buscando en los gráficos para este valor de K se obtiene S = 1,53;—D = 1,58;—R = 0,63; por lo tanto aguas abajo de la grada habrá torrente puesto que 1,53 × 0,26 = 0,398 m. es mayor que la profundidad de régimen (1), por lo tanto se desarrollará un torrente que a medida que avance y los frotamientos le absorban energía ganará en profundidad (torrente deprimido en pendiente suave). Aguas arriba de la grada se desarrollará lo que vulgarmente se llama el remanso de bajada, que termina en el escurrimiento crítico que habrá sobre la caída.

A continuación va el cálculo del eje hidráulico; primeramente el del lecho superior a la grada, hecho por puntos escalonados partiendo de aguas abajo, donde es punto de partida en la caída la profundidad crítica. El cálculo de las distancias se hace como se sabe por las sencilla ecuación:

$$l = \frac{B_o - B_1}{J - i}$$

en que l es la distancia a que una nueva profundidad se produce partiendo de otra dada; Bo y B_1 los Bernoulli contados desde el fondo, de aguas arriba y aguas abajo, J la pérdida de carga por frotamientos por metro corrido, (2) computada por la fórmula general de escurrimiento uniforme, término medio de la que corresponde a las dos profundidades cuya distancia se busca y por último i es la pendiente del fondo. La última columna da las distancias acumuladas, suponiendo que la grada sea el origen. Se ha supuesto que la profundidad crítica se produce a una distancia igual a dos veces su magnitud hacia aguas arriba de la caída, por eso la L correspondiente es 0,52 m. A plomo de la caída la profundidad se supone que es 0,85 de la crítica es decir de 0,213 m.

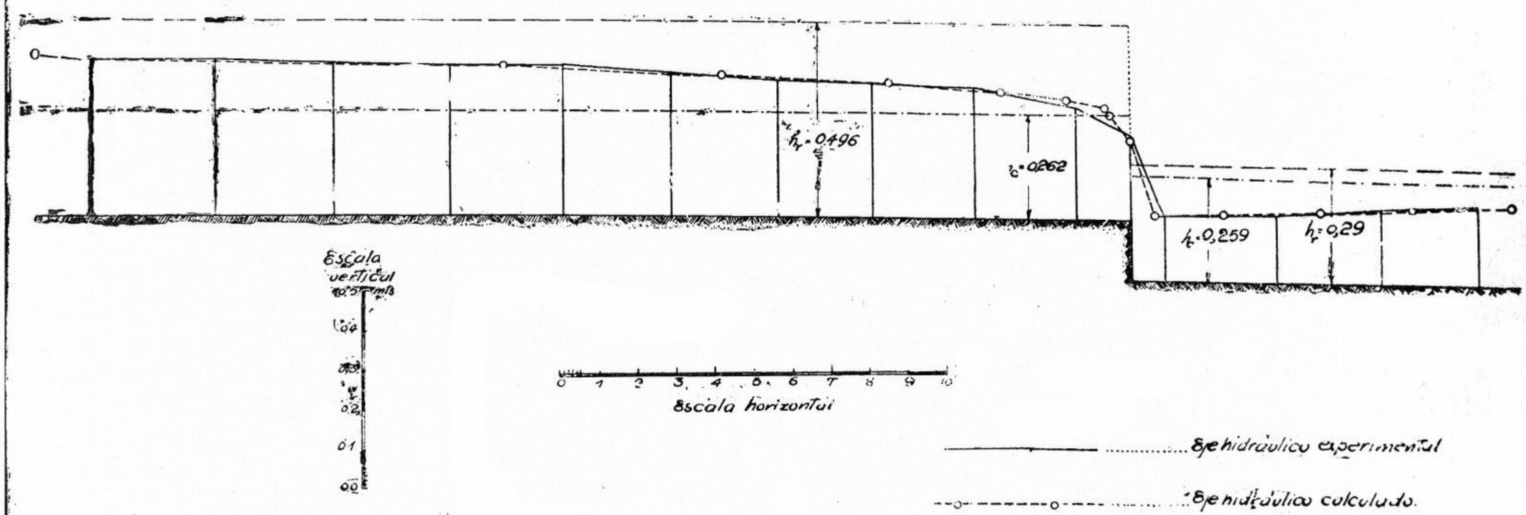
(1) Es claro que esa afirmación supone que la pendiente de 0.00208 existe en largo trozo después de la grada y que no hay otras perturbaciones. A esa suposición nos lleva a mas del eje hidráulico de la experiencia en cuestión el hecho que la grada está situada a mas de 200 m del fin del canal de experiencias y que Bazin al mencionar la condición de experimentación de la serie 81 solo menciona la caída brusca a 3,70 m del origen.

(2) Nos parece que la concordancia del eje hidráulico calculado con el experimental prueba una vez mas que no se comete error sensible al calcular las pérdidas por frotamientos en escurrimiento variado con la fórmula de escurrimiento uniforme. Interesante es al respecto la discusión experimental que hace Don Ramón Salas E. en Escurrimiento Variado págs. 26 y sigtes.

Grafico Nº 5

Experiencia Nº 2 de la Serie 81 de Bazin

(Recherches Hydrauliques apéndice - Pág. 475 - plancha XXV.



h m	Ω 2	ψ m	R m	$\frac{1}{C^2 R}$	U m ; s	J	$\frac{J_o+J_1}{2}$	$\frac{U^2}{2g}$ m	B m	B_o-B_1 m	J—i	$\frac{B_o-B_1}{J-i}$	L
0.262	0.514	2.48	0.207	0.00427	1.605	0.011		0.131	0.393				0.52
0.28	0.549	2.52	0.218	0.00382	1.500	0.0086	0.0098	0.114	0.394	0.001	0.0083	0.12	0.64
0.30	0.588	2.56	0.230	0.00350	1.402	0.0069	0.0077	0.100	0.400	0.006	0.0062	0.97	1.64
0.32	0.627	2.60	0.245	0.00316	1.314	0.0050	0.0062	0.088	0.408	0.008	0.0047	1.70	3.34
0.34	0.666	2.64	0.253	0.00300	1.237	0.0046	0.0050	0.0780	0.418	0.010	0.0035	2.86	6.20
0.36	0.705	2.68	0.263	0.00285	1.169	0.0039	0.0043	0.0696	0.430	0.012	0.0028	4.29	10.50
0.38	0.745	2.72	0.274	0.00270	1.106	0.0033	0.0036	0.062	0.442	0.012	0.0018	6.67	17.15
0.40	0.784	2.76	0.284	0.00253	1.051	0.0028	0.0031	0.056	0.456	0.014	0.0013	10.77	27.95
0.42	0.822	2.80	0.294	0.00240	1.003	0.0024	0.0027	0.051	0.471	0.015	0.0009	16.66	44.90

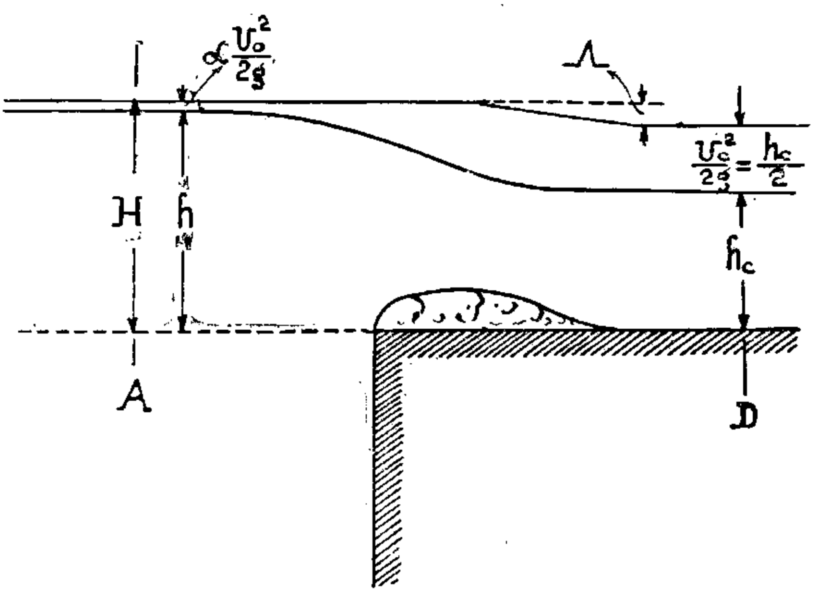
El torrente que sigue a la grada tiene una profundidad inicial Rhc = 0,63 × 0,26 = 0,164 profundidad que se produce a una distancia D (a + h_c) = 1,58 × 0,15 × 0,26) = 0,65 m del pie de la grada. El eje hidráulico del torrente va calculado a continuación:

h	Ω	ψ	R	$\frac{1}{C^2 R}$	U	J	$\frac{J_o+J_1}{2}$	$\frac{U^2}{2g}$	B	B_o-B_1	J—	l	L
0.164	0.326	2.32	0.141	0.00225	2.530	0.0144		0.329	0.492				0.65
0.17	0.338	2.33	0.145	0.00215	2.435	0.0128	0.0136	0.302	0.472	0.020	0.01152	1.74	2.40
0.18	0.358	2.35	0.152	0.00195	2.300	0.0103	0.0115	0.269	0.449	0.023	0.00942	2.44	4.85
0.19	0.378	2.37	0.160	0.00175	2.179	0.0083	0.0093	0.242	0.432	0.017	0.00722	2.35	7.20
0.20	0.398	2.39	0.167	0.00165	2.070	0.0071	0.0076	0.218	0.418	0.014	0.00552	2.54	9.75

En el gráfico N.° 5_a se puede ver la coincidencia del eje hidráulico experimental de Bazin con el calculado. El único punto en que se nota discrepancia es en la ubicación de la primera profundidad del torrente que Bazin colocó a 0,85 m y según nuestros cálculos esta a 0,65 m de la caída.

Concluído el estudio experimental de la grada de bajada con resalto alejado, antes de entrar en el estudio de esa grada con resalto al pie abramos un paréntesis para que estudiemos la grada de subida, pues su conocimiento será necesario en la interpretación de algunas experiencias referentes a aquella. Estudiaremos aquí la grada de subida en las hipótesis hechas de escurrimiento permanente y lecho rectangular ancho, para que podamos considerar el fenómeno por unidad de ancho.

A estas hipótesis agregaremos que su cara o paramento sea vertical, su arista de entrada viva y que sobre ella, por efecto de las condiciones de aguas abajo se verifica el escurrimiento crítico (1).



Por efecto de la arista viva se verifica una contracción de entrada que da lugar a un ensanche de reacción y pérdida de carga consiguiente. La contracción la hemos constatado en el Laboratorio de la Universitdad Católica, introduciendo corpúsculos que toman movimiento giratorios antes de ser arrastrados por la corriente; en marcos de barrera la hemos comprobado también observando que pequeñas algas acuáticas (de las llamadas vulgarmente lamas), arraigadas en ese sitio, se dirigían hacia aguas arriba, bien unidas al fondo, por efecto del sentido de la velocidad del

(1) Esas condiciones de aguas abajo son que la grada esté seguida de pendiente fuerte o de una cercana grada de bajada (como se verifica en el vertedero de pared gruesa).

Referencia a Bazin Serie	Nro de la experienc.	Carga h mts	Coefic. de gasto m	$\sqrt[3]{2m^2}$	Prof. critica h_c mts	Alt med de veloc afluente $\alpha \frac{V_0^2}{2g}$ mts	Carga total H mts	$\frac{h_c}{H}$	$\frac{H}{h_c}$
113	1	0,0635	0,3294	0,601	0,0381	0,0000	0,0635	0,601	1,664
spesor de	2	0,0883	0,3313	0,603	0,0533	0,0002	0,0885	0,601	1,664
mbral 0.40	3	0,1107	0,3307	0,602	0,0667	0,0003	0,1110	0,601	1,664
apa libre	4	0,1352	0,3302	0,602	0,0814	0,0007	0,1359	0,599	1,670
	5	0,1580	0,3321	0,605	0,0956	0,0009	0,1589	0,6015	1,662
	6	0,1806	0,3348	0,607	0,1095	0,0013	0,1819	0,6015	1,662
	7	0,2035	0,3378	0,611	0,1244	0,0016	0,2051	0,605	1,653
114	3	0,1074	0,3229	0,593	0,0637	0,0003	0,1077	0,592	1,689
e = 0,80 m.	4	0,1321	0,3245	0,595	0,0786	0,0007	0,1328	0,592	1,689
capa libre	5	0,1539	0,3233	0,593	0,0912	0,0008	0,1547	0,590	1,695
	6	0,1764	0,3241	0,594	0,1048	0,0011	0,1775	0,590	1,695
	7	0,2003	0,3270	0,598	0,1197	0,0016	0,2019	0,593	1,686
	8	0,2241	0,3272	0,598	0,1340	0,0021	0,2262	0,592	1,689
	9	0,2471	0,3281	0,600	0,1483	0,0027	0,2498	0,593	1,686
	10	0,2693	0,3300	0,602	0,1622	0,0034	0,2727	0,595	1,680
	11	0,2921	0,3316	0,604	0,1766	0,0040	0,2961	0,596	1,678
	12	0,3154	0,3336	0,606	0,1910	0,0046	0,3200	0,597	1,675
115	9	0,2415	0,3243	0,595	0,1438	0,0027	0,2442	0,593	1,686
e = 2 mts	10	0,2658	0,3245	0,595	0,1531	0,0033	0,2691	0,588	1,700
capa libre	11	0,2890	0,3245	0,595	0,1720	0,0038	0,2928	0,588	1,700
	12	0,3120	0,3250	0,596	0,1860	0,0045	0,3165	0,588	1,700
	13	0,3347	0,3281	0,599	0,2005	0,0053	0,3400	0,589	1,698
	14	0,3592	0,3294	0,600	0,2157	0,0073	0,3665	0,588	1,700
	15	0,3843	0,3302	0,602	0,2312	0,0081	0,3924	0,589	1,698
	16	0,4055	0,3342	0,607	0,2461	0,0106	0,4161	0,591	1,692
	17	0,4231	0,3348	0,607	0,2570	0,0109	0,4340	0,592	1,689
	18	0,4342	0,3365	0,609	0,2644	0,0111	0,4453	0,593	1,686
	19	0,4474	0,3362	0,609	0,2724	0,0118	0,4592	0,594	1,684
18	2	0,0887	0,3140	0,582	0,0516	0,0002	0,0889	0,581	1,720
0,4 mts	3	0,1113	0,3203	0,590	0,0657	0,0003	0,1116	0,590	1,695
... deprim	4	0,1343	0,3230	0,593	0,0797	0,0007	0,1350	0,5905	1,693
19	3	0,1033	0,3252	0,596	0,0617	0,0003	0,1036	0,595	1,680
= 0,8 mts	4	0,1250	0,3240	0,595	0,0794	0,0005	0,1255	0,593	1,686
... deprim	5	0,1485	0,3297	0,6015	0,0894	0,0008	0,1493	0,598	1,670
	6	0,1723	0,3304	0,6025	0,1039	0,0010	0,1730	0,600	1,666
	7	[illegible]	0,3327	0,605	0,1185	0,0015	0,1973	0,601	1,664
	8	0,2202	0,3321	0,6045	0,1332	0,0020	0,2222	0,599	1,670
	9	0,2424	0,3366	0,610	0,1479	[illegible]	0,2450	0,603	1,658
						Termino medio		0,5943	1,685

vale $\frac{1}{3}$ y tomando en cuenta éstos, que aunque pequeños, en general no se puden despreciar, sube a 0.36 o sea:

$$\frac{H}{h_c} = 1.5 + 0.5 \times 0{,}36 = 1.68$$

Las experiencias de Bazin en vertederos de 0,75 m de altura y de 0,4, 0,8 y 2 m de espesor, con napas libres (Experiencias Nouvelles 5eme article, series 113, 114 y 115) y napas deprimidas (mismo artículo series 118 y 119), sin redondeo de entrada, comprueban este hecho, como puede verse en el cuadro que a va en la página anterior. Las experiencias que en él aparecen son solamente las de las series indicadas que caen entre los límites de $\frac{h}{e}$ 0,13 a 0,33 entre los cuales se verifica bien el paralelismo de filetes, condición necesaria, como queda dicho, para la existencia del escurrimiento crítico. Los cálculos se han efectuado partiendo de la ecuación del gasto unitario: $q = m h \sqrt{2gh}$, en que m y h son datos de la experiencia. De aquí siendo $h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$ se deduce $\frac{h}{h_c} = \frac{1}{\sqrt[3]{2m^2}}$. La altura de velocidad inicial, aceptando $\alpha = \frac{5}{3}$ vale $\alpha \frac{U_o^2}{2g} = \frac{5}{3} \frac{m^2 h^3}{(h+a)^2}$ expresión en que a tiene el significado de siempre, altura de la grada. La razón $\frac{H}{h_c}$ valdrá según esto:

$$\frac{H}{h_c} = \frac{h}{h_c} + \alpha \frac{U_o^2}{2gh_c} = \frac{1}{\sqrt[3]{2m^2}} + \frac{5}{3} \frac{m^2 h^3}{(h+a)^2 h_c}$$

El cuadro indica que la razón $\frac{H}{h_c}$ disminuye algo con el espesor del umbral, disminución pequeña debida a los menores frotamientos. El término medio aritmético de $\frac{H}{h_c}$ en todo el cuadro es 1,685; las mayores diferencias que revela con este término medio son de 1,37%, por defecto, en la experiencia 5 de la serie 113 y 2,08%, por exceso, en la 2 de la serie 118, que como se vé son insignificantes. Como en el vertedero de 2 m de espesor no alcanzan las experiencias hasta el límite $\frac{h}{e} = \frac{1}{3}$ y se observa que en él los frotamientos, sensibles en las pequeñas cargas, no lo son en las mayores, el término medio de las razones $\frac{H}{h_c}$ completando esas experiencias habría bajado un tanto, por eso hemos adoptado que englobando los frotamientos sobre el umbral y la pérdida de carga de entrada, las experiencias de Bazin arrojan, entre los límites de $\frac{h}{e}$ citados una razón constante $\frac{H}{h_c} = 1{,}68$ o sea $\lambda = 0{,}36$.

Este hecho pudo ponerse de manifiesto, sencillamente, analizando las series 116 y 117 del mismo autor en el artículo citado, hechas en vertederos de 0,75 m de altura y de 0,8 y 2 m de espesor de umbral, con redondeo de entrada, pues, comparando el gasto de los vertederos de igual altura y espesor, encontró Bazin, que el de 0,8 m daba un gasto 1,14 veces mayor con redondeo de entrada y el de 2 m. 1,12 veces mas gasto en iguales circunstancias. El coeficiente de gasto muy poco variable entre los límites de $\frac{h}{e}$ contemplados, en los vertederos redondeados fué $m = 0{,}3764$ en el de 0,8 m. y $m = 0{,}3689$ en el de 2 m, como término medio y es por lo tanto en los de arista viva:

$$\text{en el } e = 0{,}8 \text{ mts.}; \; m = \frac{0{,}3764}{1{,}14} = 0{,}3285$$

$$\text{en el } e = 2{,}0 \text{ mts.}; \; m = \frac{0{,}3689}{1{,}12} = 0{,}3295$$

lo que da calculando como antes se indicó:

$$e = 0{,}8 \text{ mts.}; \; \frac{h}{h_c} = \frac{1}{\sqrt[3]{2m^2}} = 1{,}666$$

$$e = 2{,}0 \text{ mts.}; \qquad \frac{h}{h_c} = 1{,}664$$

corregidos estos valores en un valor medio de la altura de velocidad inicial que sería $\frac{\alpha U_o^2}{2gh_c} = 0{,}014$ en el vertedero de 0,8 m. y 0,024 en el de 2 m. se obtendría:

$$e = 0{,}8 \text{ mts.}; \; \frac{H}{h_c} = 1{,}68$$

$$e = 2{,}0 \text{ mts.}; \; \frac{H}{h_c} = 1{,}688$$

Nótese, aun, que vale respecto al vertedero de 2 m. la observación hecha sobre la falta de experiencias cercanas al límite $\frac{h}{e} = \frac{1}{3}$, lo que bajaría en poquito la razón $\frac{H}{h_c}$ en él.

Las experiencias de la Universidad de Cornell demuestran también la constancia y el valor de la razón $\frac{H}{h_c}$, así se comprueba calculándolas por medio de las tablas de Williams y Hazen. Por vía de ejemplo hemos calculado tres que van a continuación, conservando las medidas inglesas. En ellas como en las experiencias de Bazin se nota la pequeña influencia de los frotamientos

a pies	e pies	h pies	q pies^2: s	$\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$ pies	$\alpha \frac{U_o^2}{2g}$ pies	H pies	$\frac{H}{h_c}$
11.25	5,84	0,5	0,950	0,304	0,000	0,500	1,665
,,	12,24	3	13,72	1,802	0,024	3,024	1,680
,,	16,30	4	21,08	2,400	0,048	4,048	1,688

Merriman, tratando sobre las experiencias de crestas gruesas, sin umbral redondeado, de la Universidad de Cornell, dice que con cargas mayores de 2 pies y espesores mayores de 3, se puede aceptar en la fórmula del gasto unitario $q = c\,h^{3/2}$ el valor único del coeficiente $c = 2{,}64$, lo que conservando las medidas inglesas da:

$$\frac{q^2}{g} = \frac{2{,}64^2 h^3}{32{,}16} = h_c^3 \text{ de donde } \frac{h}{h_c} = \frac{1}{\sqrt[3]{0{,}02158}} = 1{,}666$$

valor que subiría tomando la carga total H

Por último, aludiendo a las mismas experiencias don Gustavo Lira (1) dice que para cargas comprendidas entre 0,15 y 1,2 mts, con espesores de umbral superiores de 1,5 mts da valores muy exactos del gasto el uso del coeficiente teórico de gasto máximo, $m = 0,385$, multiplicado por un coeficiente de corrección que varía de 0,82 a 0,87. Esto quiere decir que en los vertederos sin entrada redondeada (2) entre esos límites, el coeficiente de gasto varía entre 0,3350 y 0,3157, lo que calculando como se ha hecho da $\frac{h}{h_c}$ variable entre 1,712 y 1,647, o sea en término medio 1,680. Nótese que los límites de validez de esta fórmula aceptan razones $\frac{h}{e}$ mucho menores de 0.13 en espesores grandes, que llegan a 5 mts, e igualmente las cargas grandes, en los espesores menores se salen del límite $\frac{h}{e} = \frac{1}{3}$, de ahí la mayor amplitud de los extremos de la razón $\frac{h}{h_c}$.

Deteniendo especialmente la atención sobre las experiencias de Bazin corroboradas en general, por las de la Universidad de Cornell, puede aceptarse, como se ha dicho, que en la pérdida singular de entrada, englobando los frotamientos se pierden 0,36 alturas de velocidad finales, críticas.

Todas las experiencias comentadas han sido efectuadas con alturas relativas de grada, K, superiores a 2,7, en ellas lo contracción de entrada parece completa, pues no se nota perturbación en el valor de $\frac{H}{h_c}$; bajo cierto valor de K la contracción sería imperfecta y $\frac{H}{h_c}$ se modificaría tendiendo a 1,5 como sucedería en $K = 0$.

Que en las experiencias citadas los frotamientos tienen su pequeña parte en ese valor de λ se puede evidenciar, aceptando que J, pérdida de carga por unidad de longitud, debida a ellos, vale $J = \frac{U^2}{C^2 R}$, válida para ascurrimiento uniforme y gradualmente variado y en que, como se sabe, U es la velocidad media, C coeficiente dependiente de la rugosidad de pared y del radio hidráulico y R el radio hidráulico de la sección. Sobre el umbral, en las secciones sucesivas, aceptado el

(1) Curso de Hidráulica pág. 203. Santiago de Chile, 1916

(2) Dice "en pared gruesa rectangular".

paralelismo de filetes, la velocidad media se puede aceptar crítica. Escribiendo la pérdida por unidad de longitud en función de la altura de dicha velocidad se obtiene:

$$J = \frac{2g}{C^2 R} \quad \frac{U_c^2}{2g}$$

Aceptando una longitud media de umbral (descontando el trozo correspondiente a la contracción y ensanche) de unas 5 hc, y suponiendo grande el ancho respecto a la profundidad crítica, lo que autoriza a tomar R = hc, se puede escribir la pérdida de carga total por frotamientos:

$$\Lambda_f = \frac{2_g \times 5h_c}{C^2 h_c} \quad \frac{U_c^2}{2_g}$$

es decir que aproximadamente el factor de resistencia valdrá:

$$\lambda_f = \frac{100}{C^2}$$

Con un valor medio de C = 60 (se tratará siempre de pared lisa y pequeña profundidad en esta singularidad) se obtendría:

$$\lambda_f = 0{,}028$$

Restando de λ = 0,36 la parte correspondiente a los frotamientos, así calculada, se obtendría el factor de resistencia λ_e debido al ensanche de reacción de entrada

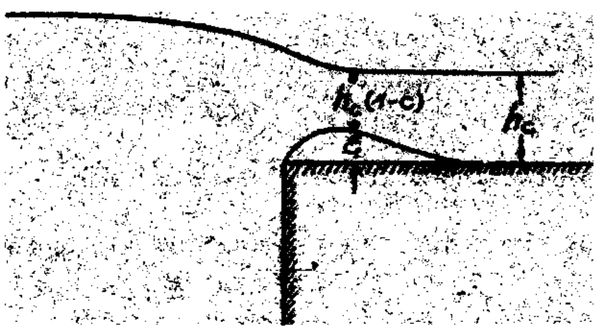
$$\lambda_e = 0{,}36 - 0{,}028 = 0{,}332$$

prácticamente $\frac{1}{3}$.

En el supuesto que esta pérdida de entrada se deba totalmente al ensanche de reacción, aplicandole la fórmula de Borda, según la cual el número λ en función de la velocidad final es $\lambda = \left(\frac{\omega}{\omega_o} - 1\right)^2$; aceptando que el eje hidráulico es horizontal o de muy pequeña inclinación, desde la sección contraída hasta donde restablecido el paralelismo la profundidad sobre la grada es crítica, se podría calcular cuanto vale la contracción $c = \frac{\epsilon}{h_c}$ partiendo de valor encontrado $\lambda_e = \frac{1}{3}$, pues se tendría, por unidad de ancho:

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{1-c} - 1\right)^2$$

$$c = 0{,}366$$



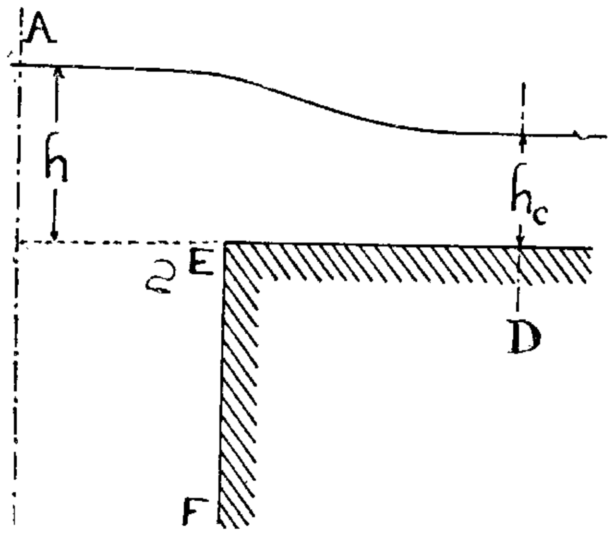
y en función de la carga total H de la grada

$$\frac{\epsilon}{H} = \frac{0{,}366}{1{,}68} = 0{,}22$$

A primera vista puede parecer excesivo esta contracción, sin embargo debe recordarse que Bazin encontró en los vertederos, que ella aumentaba con la contrapresión o presión de aguas abajo, y que cuando la napa se hacía ondulada (Experiencies nouvelles pág. 176), $\frac{\epsilon}{h}$ tomaba el valor 0,19; la pared gruesa y la grada de subida, en las hipótesis de partida, son asimilables a la napa ondulada para los efectos de la contrapresión.

Sería fácil relacionar analíticamente las alturas h y h_c mediante la aplicación del teorema de las cantidades de movimiento, si se pudiera aceptar en la pared EF de la grada presiones regidas por la ley hidrostática correspondiente al nivel A.

Analoga suposición sirve a Boussinesq (1) para el estudio del vertedero entrante, hipótesis que sería inaceptable con velocidades sensibles en la pared, tales como se producen cuando las aristas de entrada son redondeadas o los paramentos suficientemente inclinados. Vamos también a suponer que la grada sea de bastante altura para que h valga prácticamente H.



Eligiendo como eje de proyección uno horizontal se aplica el teorema citado a la masa líquida encerrada entre la sección A donde los filetes son aun paralelos y rige la ley hidrostática y la sección D donde restablecido el paralelismo de filetes, la profundidad es por hipótesis crítica. La masa que en la unidad de tiempo se incrementa de velocidad es la masa del gasto, (que por unidad de ancho es $\frac{\gamma}{g} q$). Siendo la velocidad despreciable en A, el incremento de velocidades es la velocidad crítica que se adquiere en D; por lo tanto el incremento de las cantidades de movimiento en la unidad de tiempo es $\frac{\gamma}{g} q\, v_c$. Las fuerzas que obran sobre la masa considerada, que se proyectan sobre el eje elegido, descontada la presión atmosférica que da proyección resultante nula y despreciados los frotamientos pa-

(1) "Theorie approchée de l'écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction laterale"; pág. 26, París 1907.

rietales son las presiones en las caras A y D. Según la hipótesis hecha la reacción de la cara EF es igual y de sentido contrario a la que hay en la cara A a esa misma altura por lo tanto la resultante de las presiones terminales valdrá

$$\gamma \frac{(h^2 - h_c^2)}{2}$$

El teorema dice que:

$$\frac{\gamma}{g} q u_c = \gamma \frac{(h^2 - h_c^2)}{2}$$

Como $u_c = \frac{q}{h_c}$ y $\frac{q^2}{g} = h_c^3$, la ecuación de arriba resulta

$$h_c^2 = \frac{h^2 - h_c^2}{2}$$

$$h^2 = 3 h_c^2$$

$$\frac{h}{h_c} = \sqrt{3} = 1.73$$

El valor de la razón así deducido difiere poco del experimental 1,68.

Para terminar este estudio de la grada de subida observemos que no vale la pena tomar en cuenta las conclusiones sobre la razón entre la profundidad sobre un unbral de cresta gruesa y la carga a que se llega siguiendo a Grialou (1), quien supone estudiando la napa libre que la presión (generalmente atmosférica) que obra bajo la napa después de abandonado el umbral obra también sobre todo el umbral, hipótesis teóricamente falsa puesto que necesita suponer que los filetes conservan el paralelismo hasta la misma sección de caída. Bazin midió la presión sobre el umbral y encontró que siempre que no hubiera influencias de aguas abajo (equivalente a la existencia de escurrimiento crítico) la razón entre la presión y la carga el vertedero era constante y valía 0,585, cifra muy poco diferente de la

---

(1) Cours d'Hydraulique París 1916, pág. 102 y siguientes.

$\frac{1}{1.68} = 0{,}595$ que hemos señalado para la razón $\frac{h_c}{H}$, lo que constituye aceptado el paralelismo de filetes y ley hidrostática consiguiente una nueva prueba de la existencia del escurrimiento crítico (2).

(Continuará)

---

(2) Con el número $\lambda = 0{,}36$ como factor de resistencia, en barreras de sección rectangular y aceptando el escurrimiento crítico, se puede, razonando análogamente a Bazin (Experiencies Nouvelles pág. 21 y 22) encontrar una fórmula de vertederos de pared gruesa cuyo coeficiente de gasto sería:

$$m = 0{,}325 + 0{,}08 \frac{h^2}{(h+a)^2}$$

en que el segundo término se debe a la velocidad inicial y en que h es la carga del vertedero y a su altura de aguas arriba.

Tal coeficiente coincide muy bien con las experiencias de Bazin, y Universidad de Cornell y con la fórmula de Gibson entre sus límites de valides que serían, siendo e el espesor del umbral:

$$0.13 < \frac{h}{e} < 0.33$$